

場の理論におけるルジャンドル変換 — On-shell 展開と Inversion 法 —

慶大理工・福田礼次郎

I. 作用積分汎関数と effective action

古典力学では運動方程式次の様に得ることが出来る。

つまり、ラグランジアン $L(\dot{q}, q)$ の時間積分である作用汎関数 $I[q]$ の停留条件を満たす $q(t)$ を求めればよい。

$$I[q] = \int dt L(\dot{q}, q), \quad \frac{\delta I[q]}{\delta q(t)} = 0 \quad (1)$$

ここで $\delta/\delta q(t)$ は汎関数微分である。量子論でも、 q -数 $\hat{q}$ と $\hat{q}$ -数 $\hat{q}$ に置き換えて (1) 式は成り立つが、 $\hat{q}$ -数方程式を解くことは、一般には不可能なので、期待値 $\langle \hat{q} \rangle$ に対する方程式を作ることと考える。その為にまず Green's function の生成汎関数 $W[J]$ を

$$\exp i W[J] = \int [dq] \exp i \int_{-\infty}^{\infty} dt \{ L(\dot{q}, q) + J(t) q(t) \} \quad (2)$$

により導入する。ここで $\int [dq]$ は経路積分を表す。古典力学の作用汎関数 $I[q]$ に対応するものは effective action

と呼ばれ $\Gamma[g]$ と書かれる。これは $W[J]$ から次の様に汎関数
 のリジヤント変換で定義される。

$$\Gamma[g] = W[J] - \int_{-\infty}^{\infty} dt J(t) \frac{\delta W[J]}{\delta J(t)}, \quad (3)$$

$$g(t) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(t)} = \langle 0 | \hat{\phi}(t) | 0 \rangle_J. \quad (4)$$

式(4)は g の定義であり、外場 J の存在下での基底状態 $|0\rangle_J$ を表している。 $\Gamma[g]$ が作用汎関数に対応するものであることは、次の恒等式から示すことができる。

$$\frac{\delta \Gamma[g]}{\delta g(t)} = -J(t) \quad (5)$$

これはリジヤント変換の性質からくるものである。人為的に入れた外場 $J(t)$ は probe と呼ばれ、正しい理論におけるためには $J(t) = 0$ としなければならない。この条件が $\Gamma[g]$ の停留条件

$$\frac{\delta \Gamma[g]}{\delta g(t)} = 0 \quad (6)$$

と一致して、(6)式が期待値 $g(t)$ に対する運動方程式である。その解の一つを $g^{(0)}(t)$ とおくと

$$g^{(0)}(t) = \langle 0 | \hat{\phi}(t) | 0 \rangle \quad (7)$$

と書けるが、 $|0\rangle = |0\rangle_{J=0}$ はもともとの理論における基底状態である。普通は $g^{(0)}(t)$ は t に依らない。そこで $g^{(0)}(t) = g^{(0)}$ と書くことにする。

II On-shell 条件

式(6)から $q^{(0)}$ が決まるという意味で基底状態 $|0\rangle$ を決定する。ここで基底状態は $q^{(0)}$ という1点の値で決まる。このため、通常の古典力学の微小振動論に比して、(6)式の $q^{(0)}$ の近傍の解を

$$q(t) = q^{(0)} + \Delta q(t) \quad (8)$$

とおいて探す。

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\delta \Gamma[q]}{\delta q(t)} \right|_{q^{(0)} + \Delta q} \\ &= \left. \frac{\delta \Gamma[q]}{\delta q(t)} \right|_{q^{(0)}} + \int dt' \left. \frac{\delta^2 \Gamma[q]}{\delta q(t) \delta q(t')} \right|_{q^{(0)}} \Delta q(t') + \dots \end{aligned}$$

ここで第一項は $q^{(0)}$ 自身が(6)式の解であるから零、したがって Δq が小さいとすると系(9)は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \Gamma^{(2)}(t, t') \Delta q(t') = 0 \quad (9)$$

という微小振動モードを決定する方程式を得る。次にこれを定義式

$$\Gamma^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \equiv \left. \frac{\delta^n \Gamma[q]}{\delta q(t_1) \delta q(t_2) \dots \delta q(t_n)} \right|_{q^{(0)}} \quad (10)$$

を導入する。量子論では(9)式が2点グリーン関数の極と求まる式であることはルジャンドル変換から容易に導かれる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(x')} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x') \delta \phi(x'')} = -\delta(x-x'')$$

より明らかである。(9)式が我々の On-shell 展開の最低次の式であり、モード決定方程式または On-shell 方程式と呼ぶことにする。

さて On-shell 展開の高次項は、(9)式で決ったモード間の散乱行列と表わすことが次のように判る。よく知られた S-行列との関係と見るとこれは量子化された場の理論に移る。最も簡単な Klein-Gordon 場 $\phi(x)$ と見ると上の議論の $\phi(x)$ と多成分 $\phi_i(x)$ に対して (i, x) を空間座標 x と見做して

$$\phi(x) \rightarrow \phi_i(x) \rightarrow \phi(i, x) \rightarrow \phi(x, i) \equiv \phi(x, i) = \phi(x)$$

のように思えばおすだけでおいて通用する。例えば、(9)式は

$$\int dx' \Gamma^{(2)}(x, x') \Delta \phi(x') = 0 \quad (11)$$

と書ける。また On-shell 展開の高次項を議論するために、

$$\phi(x) = \phi^{(0)} + \Delta \phi(x), \quad (12)$$

$$\Delta \phi(x) = \Delta \phi^{(1)}(x) + \Delta \phi^{(2)}(x) + \Delta \phi^{(3)}(x) + \dots \quad (13)$$

とおいて、 $\Delta \phi^{(n)}(x)$ ($n \geq 2$) は $(\Delta \phi^{(1)}(x))^n$ のオーダーの量と考へる。(12)式を

$$0 = \left. \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi^{(0)} + \Delta \phi}$$

に代入して、 $\Delta \phi^{(1)}$ の幂で整理し、各の幂でおいて零とさせるという条件を課す。最低次は $\Delta \phi^{(1)}$ の一次で (11)式に一致する。

$$\int dx' \Gamma^{(2)}(x, x') \Delta \varphi^{(1)}(x') = 0 \quad (14)$$

$n \geq 2$ に対する $\Gamma^{(n)}$ の系を果に次のように表す。

$$\Delta \varphi^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} W^{(n+1)}(x, x_1, \dots, x_n) W^{(2)-1}(x_1, x'_1) \dots W^{(2)-1}(x_n, x'_n) \\ \times \Delta \varphi^{(1)}(x'_1) \Delta \varphi^{(1)}(x'_2) \dots \Delta \varphi^{(1)}(x'_n). \quad (15)$$

ここで (1) 以下でも) 系を、返 (現わぬ) 変数 $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n$ について δ が δ 全時空で積分することと見做すに等しいと解さうとする。すると

$$W^{(n+1)}(x, x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^{n+1} W[J]}{\delta J(x) \delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (16)$$

を導入する。 (15) 式において $W^{(n+1)}$ の x -channel を除いて、 x'_1 の channel は $W^{(2)-1}$ で pole をとり取る (足とり), δJ は On-shell の wave function $\Delta \varphi^{(1)}$ となる。 x -channel は pole を含む (wave function となる) ため。 δJ (15) 式は x -channel を除くと LSZ の reduction の式となる。 π の場合、実際 LSZ の方法を逐次適用して見るとよくわかる。

この為 $\hat{\phi}(x) \in$ Heisenberg 表示での Klein-Gordon 場として、in, out field を次のように導入する。

$$\hat{\phi}(x) \longrightarrow \sqrt{2} \hat{\phi}_{in(out)}(x), \quad (x^0 \rightarrow -\infty (+\infty))$$

$$\hat{\phi}_{in(out)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} [\hat{a}_{in(out)}(k) e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{in(out)}^\dagger(k) e^{ik \cdot x}],$$

$$[\hat{a}_{in}(k), \hat{a}_{in}^\dagger(k')] = \delta_{k, k'}, \quad (\text{out も同様}),$$

$$k_0 = \sqrt{k^2 + m^2}.$$

さらに n -粒子状態は

$$\begin{aligned} |1^{(+)(-)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{a}_{in(out)}^+(k) |0\rangle \\ |2^{(+)(+)}\rangle &= \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \\ &\quad \times \tilde{a}_{in(out)}^+(k) \tilde{a}_{in(out)}^+(k') |0\rangle \end{aligned} \quad (17)$$

等が定義される。ここで $\tilde{a}^+$ は

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{out}(k) &= \tilde{C}^-(k) \hat{a}_{out}(k), \\ \tilde{a}_{in}^+(k) &= \tilde{C}^+(k) \hat{a}_{in}^+(k), \end{aligned} \quad (18)$$

が定義されるが、 $\tilde{C}^\pm$ は次のように理解される。(14)式において

$\Gamma^{(2)}$ は $x-x'$ の関数であり、そのフーリエ変換は p^2 の関数で、

(14)式は フーリエ空間では

$$\Gamma^{(2)}(p^2) \Delta\phi^{(1)}(p) = 0 \quad (19)$$

と書ける。 $p^2 = m^2$ で $\Gamma^{(2)}$ が零となるのは m^2 が粒子

(モード) の質量を示すものである。(19)式の non-trivial 解

は $\Delta\phi^{(1)}(p) \propto \delta(p^2 - m^2)$ の形を取るが、この解は、 p_0 について

見ると $p_0 = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$ の 2つの branch を持つ。

$$\Delta\phi^{(1)}(p) = 2\pi (C^+(p)\theta(p) + C^-(-p)\theta(-p_0))\delta(p^2 - m^2)$$

と置く。この x -空間へ変換すると

$$\Delta\phi^{(1)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\tilde{C}^+(k)e^{-ik\cdot x} + \tilde{C}^-(k)e^{ik\cdot x}], \quad (20)$$

$$\tilde{C}^\pm(k) = \frac{C^\pm(k)}{2k_0}, \quad (21)$$

と書ける。(18)式の $\tilde{C}^\pm(k)$ は 2つのように定義される。

さて LSZ を適用 (T2 系結果)

$$\Delta\varphi^{(1)}(x) = \langle 1^{(-)} | \hat{\Phi}(x) | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{\Phi}(x) | 1^{+} \rangle,$$

$$\Delta\varphi^{(2)}(x) = \langle 2^{(-)} | \hat{\Phi}(x) | 0 \rangle + \langle 1^{(-)} | \hat{\Phi}(x) | 1^{+} \rangle \\ + \langle 0 | \hat{\Phi}(x) | 2^{(+)} \rangle,$$

等が得られる。 $\Delta\varphi^{(n)}$ についても $\forall n \in \mathbb{N}$ とすると φ が $\mathbb{R}$ 上の関数であることが得られる。これを $\mathbb{R}$ 上の関数に拡張し、これを $\mathbb{R}$ 上の関数に拡張する。

$$\varphi(x) = \varphi^{(0)} + \Delta\varphi^{(1)}(x) + \Delta\varphi^{(2)}(x) + \dots \\ = \langle 0^- | \hat{\Phi}(x) | 0^+ \rangle, \quad (22)$$

$$|0^{+(-)}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n^{+(-)}\rangle \\ = \exp \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{a}_{in(out)}^+(k) \right] |0\rangle. \quad (23)$$

$\Gamma[\varphi]$ の S 行列のものは S -行列要素の生成汎関数と見做すことも出来る:

$$\Gamma[\varphi^{(0)} + \Delta\varphi] = -i \langle 0^+ | 0^- \rangle \quad (24) \\ = -i \sum \tilde{c}^- \tilde{c}^- \dots \tilde{c}^- \tilde{c}^{+*} \tilde{c}^{+*} \dots \tilde{c}^{+*} \\ \times \langle 0 | \hat{a}_{out} \hat{a}_{out} \dots \hat{a}_{in}^+ \hat{a}_{in}^+ \dots | 0 \rangle$$

ここには簡単のため運動量変数等を省略 (T2)。 (22) 式と (23) 式が C -shell 展開式の公式である。結局我々は C -数の汎関数 $\Gamma[\varphi]$ から出発して、Fock 空間を構成 (T2) して行く。

II Inversim 法.

ルンゲ-クッタ法の変換の最も大切な点は、(4)式を逆に解いて、 J を q の汎関数として表わすところにある。このことと利用してルンゲ-クッタ法の変換を拡張したのが Inversim 法である。まず $W[J]$ の定義を拡張する。(2)式の右辺を

$$\int [dq] \exp i \int dt L(\dot{q}, q, J) \quad (25)$$

と置く。ここで $L(\dot{q}, q, J)$ は任意の J -dependence を許すようにして $J=0$ とすれば元の Lagrangian に帰着する条件は満たせばよいとする。

$$L(\dot{q}, q, J=0) = L(\dot{q}, q) \quad (26)$$

この拡張されたラゲランジアンのもとで任意の量を計算する。

この量は別にオペレーターの期待値として書けることもよい。実際の計算は摂動によるものであり相互作用定数 g のべき展開となる。計算対象量 φ とする；

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} g^n f_n(J) \quad (27)$$

のように置く。 $n=0$ の項が J に対して厳密解を得ることにあてはまる。ふつうは有限項までしか計算できない。そこで (27) 式を J について解く（つまり invert する）。

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} g^n h_n(\varphi) \quad (28)$$

（(27) 式で $n=N$ まで計算（打ち切り）すると (28) 式でも $n=N$ まで求めることができる。 (28) 式で $J=0$ とし φ の値を求めると、(27) 式

で $J=0$ として求めたものよりよい値が得られる。特に対称性がある波数の解は (27) 式の有限項から得られる。(28) 式の有限項としたもので $J=0$ として他の解の中にはちゃんと存在する。これは J について解いたとき、グラフの言葉で言えば、あるクラスの無限個のグラフが自動的に取り込まれることに依る。

特に $O(g)$ とあるターム - (g の次数は (27) と (28)

$$L(g, g, J) = L(g, g) + J O(g),$$

$$\varphi = O(g)$$

であることは、上の inversion による方法が "ルジャンドル変換" のおまじけ一致する点で明かである。また、ルジャンドル変換後の $\Gamma[g]$ に対するグラフルール等々知られていない場合でも、inversion の方法は有効である。

以上で述べた On-shell 展開と Inversion を両方使うことにより様々な応用が可能である。そのいくつかを以下で述べる。詳細は各々に対応する論文にゆずる。

IV 応用

On-shell 方程式 (14) は普通の場合 (1) であり、到るところ、創野と関係が現れる。

(A) N -体束縛 態の方程式

外場 J による外場 J と

$$J(x) \phi(x) + J(x, y) \phi(x) \phi(y)$$

$$+ \dots + J(x, y, \dots, z) \phi(x) \phi(y) \dots \phi(z)$$

と N -本に couple する 2 点により (14) 式が $\frac{1}{2}$ の N について N -本の BS 方程式と等しくなることを示す。なお、 $\frac{1}{2}$ の N についての BS 方程式はここで初めて与えられるのである。(次の横断の report を参照)。

特に非相対論的ラグランジアンでは N -本のシュレーディンガー方程式と (14) 式が一致することを示す。

さらに $\frac{1}{2}$ の N について BS 振動 $\Delta \phi^{(1)}$ の規格化もあり、ここで与えられたように特別に議論が不用であることが判る。

(B) On-shell BS

外場 J は勝手であるので例えは $J(x, y)$ が x と y の channel について on-shell 因子 $(\square_x + m^2)(\square_y + m^2)$ を含んでおれば合致するようになる。このとき (14) 式は on-shell の 2 粒子から束縛状態をつくる方程式となる。しかしこのとき束縛状態が存在する channel は unphysical であるので解析接続が必要である。このように出来た (14) 式は S-行列, T-行列, 正(負) T-行列, の pole を探すこととなる。

(c) 非摂動的な真空の上での反起モードと散乱。

On-shell 展開は基底状態を決定する。これは非摂動的なものも含まれる。展開の高次は その上に 反起モード,

ミラーのモード間の散乱を決定するので QCD の様に 真空が非摂動的である場合に好都合である。特に散乱等、どの部分もハドロン wave function のどの部分も散乱に寄与するものについてはっきりした区別を付けられる。

(D) On-shell 展開の方法は非摂動的場の分野 例として原子の系、固体物理の系、等に適用がなされていることが 222117 と出ているので述べた。

以上の話の因縁は、主として次の文献を参考にしたものである。

- 1) R. Fukuda, M. Komachiya and M. Ukita, *Phys. Rev. D* 38, 3747 (1988).
- 2) M. Komachiya, M. Ukita and R. Fukuda, *Phys. Rev. D* 42, 2792 (1990)