

無限和の収束と無限積の収束

九大理 佐藤 坦 (HIROSHI SATO)

$\{x_k\}$ を $x_{k+1} > 0$ なる実数列とすると、 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の収束と $\prod_{k=1}^{\infty} (1+x_k)$ の収束は、一般には同等でない。ただし本稿を通して $\prod_{k=1}^{\infty} (1+x_k)$ が収束するとは、 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1+x_k) > 0$ なることとする。ところが $\{X_k\}$ を $X_{k+1} > 0$, a.s. なるマルチンゲール差列とすると、 $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ の概収束と $\prod_{k=1}^{\infty} (1+X_k)$ の概収束は同等である。(Sato [4]).

本稿の目的は、Lepingle et Mémin の結果と方法に基づいて、 $\{X_k\}$ が独立変数列の場合に得られた Sato [3] の結果を精密化し、さらに additive martingale の場合に拡張することにある。

(I) 無限和の収束と無限積の収束

$\{x_k\}$ を $x_{k+1} > 0$ なる実数列で、 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ が共に収束するとき、 $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1+x_k)$, さらに $\prod_{k=1}^{\infty} (1+x_k)$ の収束が導かれる。このことに注意すると Carleson の

定理から次が示される。

THEOREM 1. $\{a_k\}$ を実数列で, $\sum_k a_k^2 < +\infty$, 且つ $a_0 \neq -1$ とすると, $\sum_k a_k e^{2\pi i k t}$, $\prod_k (1 + a_k e^{2\pi i k t})$ は殆んど全ての $t \in [0, 1]$ について収束する。

マルチンゲール差列について次が知られている。

THEOREM 2. $\{X_k, \mathcal{F}_k\}$ をマルチンゲール差列, 即ち $E[X_k | \mathcal{F}_{k-1}] = 0$, a.s. 且 $X_{k+1} > 0$, a.s. とするものとする。このとき

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k \text{ 概収束} \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} (1 + X_k) \text{ 概収束}$$

cf. Sato [4]

(II) Lepingale et Mémmin の結果

Lepingale et Mémmin [2] で次の命題が証明されている。

THEOREM 3 (L. et M. [2], Prop I-5).

$M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$, $T = [0, +\infty)$ を local martingale で $\Delta M_t > -1$, $P(\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = -\infty) = 0$ とするもの,

$E(M)_t = \exp\left[M_t - \frac{1}{2} \langle M^c \rangle_t\right] \prod_{s \leq t} (1 + \Delta M_s) e^{-\Delta M_s}$ とする。このとき

$$\{E(M)_\infty > 0\} = \{\langle M^c \rangle_\infty + \sum_{0 \leq s < \infty} \Delta M_s^2 < +\infty\}$$

THEOREM 4 (L. & M. TH. II-5)

$M = (M_t, \mathcal{F}_t), t \in T$, is quasi-left continuous martingale 且つ $\Delta M_t > -1$, a.s. $\forall t \in T$ とする。

Z_t process

$$Z_t \equiv \langle M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2 I_{\{|\Delta M_s| \leq 1/t\}} + \sum_{s \leq t} \Delta M_s I_{\{|\Delta M_s| > 1/t\}}$$

に対して predictable compensator $\{C_t\}$ が存在するものとする。このとき、

$$\text{ess. sup } C_\infty < +\infty \Rightarrow E\left[\sup_t E(M)_t\right] < +\infty$$

(III) 独立確率変数列の場合

THEOREM 5

$\{X_k\}$ を独立確率変数列で $1+X_k > 0$, a.s. 且つ $E[X_k] = 0$ とする。このとき次の (A) ~ (F) は全て同値。

(A) $E\left[\sup_n \left|\sum_{k=1}^n X_k\right|\right] < +\infty$

(B) $\sum_{k=1}^n X_k$ は L^1 -収束 (一様可積分)

(C) $\sum_k X_k$ は概収束

(D) $\prod_k (1+X_k)$ は概収束

(E) $\prod_k (1+X_k)$ は L^1 -収束 (一様可積分)

(F) $E\left[\sup_n \prod_{k=1}^n (1+X_k)\right] < +\infty$

(証明) (B) ~ (E) の同値性は Sato [3] で示した。

また (A) $\Rightarrow$ (B) と (F) $\Rightarrow$ (E) は明らか。

(C) $\Rightarrow$ (A) コルモゴロフの三級数定理と仮定より

$$\mathbb{E}[X_k; |X_k| \leq 1] + \mathbb{E}[X_k; |X_k| > 1] = \mathbb{E}[X_k] = 0$$

に注意すると

$$(1) \quad \sum_k \mathbb{E}[X_k; |X_k| > 1] = \sum_k |\mathbb{E}[X_k; |X_k| \leq 1]| < +\infty$$

$$(2) \quad \sum_k \mathbb{E}[X_k^2; |X_k| \leq 1] < +\infty$$

が示される。

$$\begin{aligned} X_k &= (X_k I_{\{|X_k| \leq 1\}} - \mathbb{E}[X_k I_{\{|X_k| \leq 1\}}]) + X_k I_{\{|X_k| > 1\}} \\ &\quad + \mathbb{E}[X_k I_{\{|X_k| \leq 1\}}] \Rightarrow U_k + V_k + W_k \end{aligned}$$

とおくと、 $\sum_k U_k$ は L^2 -収束、従って

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sup_n |\sum_{k=1}^n U_k|] &\leq \mathbb{E}[\sup_n |\sum_{k=1}^n U_k|^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2(\sum_k \mathbb{E}[U_k^2])^{\frac{1}{2}} < +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathbb{E}[\sup_n |\sum_{k=1}^n X_k|] &\leq \mathbb{E}[\sup_n |\sum_{k=1}^n U_k|] + \mathbb{E}[\sup_n |\sum_{k=1}^n V_k|] \\ &\quad + \mathbb{E}[\sup_n |\sum_{k=1}^n W_k|] \leq \mathbb{E}[\sup_n |\sum_{k=1}^n U_k|] \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_k; |X_k| > 1] + \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbb{E}[X_k; |X_k| \leq 1]| < +\infty$$

(C) $\Rightarrow$ (F) また $n \geq -1$ に對して

$$\sqrt{1+u} - 1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{1+u} (\sqrt{1+u} - 1)^2 (\sqrt{1+u} + 2) \geq 0$$

とすることから $(1+u)^{\frac{1}{2}} \geq 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2$, $u \geq -1$ に注意すると

$$1 \geq \mathbb{E}[(1+X_k)^{\frac{1}{2}}] \geq 1 - \frac{1}{2} \mathbb{E}[X_k^2; |X_k| \leq 1]$$

また

$$M_n \equiv \prod_{k=1}^n (1+X_k), \quad \tilde{M}_n \equiv \prod_{k=1}^n \frac{(1+X_k)^{\frac{1}{2}}}{\mathbb{E}[(1+X_k)^{\frac{1}{2}}]}$$

は共に平均 1 の正マルチンゲールであり、

$$\begin{aligned} (M_n)^{\frac{1}{2}} &\leq \tilde{M}_n \leq \prod_{k=1}^n \frac{(1+X_k)^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2} \mathbb{E}[X_k^2; |X_k| \leq 1]} \\ &\leq e^{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_k^2; |X_k| \leq 1]} (M_n)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Doob の不等式と (2) より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sup_n M_n] &\leq \mathbb{E}[\sup_n (\tilde{M}_n)^2] \\ &\leq 4 \mathbb{E}[(\tilde{M}_{\infty})^2] \\ &\leq e^{2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_k^2; |X_k| \leq 1]} \mathbb{E}[M_{\infty}] \\ &\leq e^{2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_k^2; |X_k| \leq 1]} < +\infty \end{aligned}$$

より (F) が示された。

(IV) 加法過程の場合.

THEOREM 6 $\{X_t : t \in T\}$, $T = [0, +\infty)$ を加法過程

で $E[X_t] \equiv 0$, 確率連続且つ path は右連続左極限を持つ (cadlag) ものとし, また $X_0 = 0$, a.s. さらに

$$\Delta X_t > -1, \forall t \in T, \text{ a.s.}$$

を仮定する。このとき次の条件は全て同値。

- (A) $E[\sup_t |X_t|] < +\infty$
- (B) $\{X_t : t \in T\}$ は一様可積分
- (C) $\exists X_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} X_t, \text{ a.s.}$
- (D) $E(X)_\infty > 0, \text{ a.s.}$
- (E) $\{E(X)_t : t \in T\}$ は一様可積分
- (F) $E[\sup_t E(X)_t] < +\infty$

(証明)

(A) $\Rightarrow$ (B) $\Rightarrow$ (C), (F) $\Rightarrow$ (E) は明らか。

(E) $\Rightarrow$ (D) $\{X_t\}$ が加法過程であることから $\{E(X)_\infty > 0\}$ は末尾事象。従って 0-1 法則より

$P(E(X)_\infty > 0) = 0$ または 1. 他方 (E) より $P(E(X)_\infty > 0) > 0$. 故に $P(E(X)_\infty > 0) = 1$.

(D) $\Rightarrow$ (C) 定義より $E(X)_t \leq \exp X_t, \forall t \in T, \text{ a.s.}$ 従って $P(\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty) \leq P(E(X)_\infty = 0) = 0$. また仮定より $\Delta X_t > -1$ であるから Th.3 より

$$P(\langle X^c \rangle_\infty + \sum_{0 \leq s < +\infty} (\Delta X_s)^2 < +\infty) = 1.$$

これよりまず $\exists \langle X^c \rangle_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle X^c \rangle_t, \text{ a.s.}$ また.

$$\sum_{0 \leq s < +\infty} |\Delta X_s|^2 < +\infty, \text{ a.s.} \quad \text{より} \quad \#\{s \in (0, +\infty) : |\Delta X_s| > \frac{1}{2}\} < +\infty, \text{ a.s.} \text{ であり.}$$

$|\Delta X_s| \leq \frac{1}{2}$ でありは"

$$-|\Delta X_s|^2 \leq \log(1 + \Delta X_s) - \Delta X_s \leq 0$$

である。 $\mathcal{E}(X)$ の定義から

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \log \mathcal{E}(X)_t + \frac{1}{2} \langle X^c \rangle_\infty + \sum_{0 \leq s < +\infty} \{\log(1 + \Delta X_s) - \Delta X_s\} \quad \text{a.s.}$$

(C) $\Rightarrow$ (A) $\exists X_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} X_t, \text{ a.s.}$ より、任意の $\varepsilon > 0$ について $\#\{s \in (0, \infty) : |\Delta X_s| > \varepsilon\} < +\infty$ とすることにより、加減過程の一般論が適用出来る。

$$X_t = Y_t + M_t + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s \mathbb{I}_{(1, +\infty)}(\Delta X_s) - a(t)$$

と分解される。ここに $\{Y_t : t \in T\}$ は平均 0 の連続な (従って Gaussian) 確率過程で $\exists Y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} Y_t, \text{ a.s.}$

Gaussian であることから、 $\mathbb{E}[s_{\tau \wedge t}^2 | Y_t] < +\infty$ 。 従って

$\{M_t : t \in T\}$ は 2 乗可積分マルチンゲールで、 $\mathbb{E}[M_\infty^2] < +\infty$ 。

従って $\mathbb{E}[s_{\tau \wedge t}^2 | M_t]^2 \leq \mathbb{E}[s_{\tau \wedge t}^2 | M_t|^2] \leq 4 \mathbb{E}[M_\infty^2] < +\infty$ 。

$a(t)$ は連続関数で $\exists a(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} a(t)$ 。

$$\text{最後に } \mathbb{E}[s_{\tau \wedge t}^2 \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s \mathbb{I}_{(1, \infty)}(\Delta X_s)]$$

$$= \mathbb{E}[\sum_{0 \leq s < +\infty} \Delta X_s \mathbb{I}_{(1, \infty)}(\Delta X_s)] = a(\infty) < +\infty.$$

(C) $\Rightarrow$ (F) (C) を仮定する。このとき確率過程

$$Z_t \equiv \langle X^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} |\Delta X_s|^2 \mathbb{I}_{(-1, 1)}(\Delta X_s) + \sum_{s \leq t} \Delta X_s \mathbb{I}_{(1, \infty)}(\Delta X_s)$$

の predictable compensator は

$$C_\infty = E[Y_\infty^2] + E\left[\sum_{s \leq \infty} |\Delta X_s|^2 I_{(-1,1)}(\Delta X_s)\right] \\ + E\left[\sum_{s \leq \infty} \Delta X_s I_{[1,\infty)}(\Delta X_s)\right] < +\infty$$

故に定理4が適用出来て、(F)が示される。

//

(V) 応用

定理5を無限直積測度の絶対連続性に適用すると次が得られる。

THEOREM 7 $\{\mu_n\}, \{\nu_n\}$ を $\mathbb{R}$ 上の確率測度の列で $\mu_n \sim \nu_n$ (2...に絶対連続), $\forall n \in \mathbb{N}$, とする。

このとき $\mu \equiv \prod_n \mu_n \sim \nu \equiv \prod_n \nu_n$ であるための必要十分条件は $E_\mu \left[\sup_{n \geq 1} \prod_{k=1}^n \frac{d\nu_k}{d\mu_k} \right] < +\infty$ とすること。

文 献

- [1] K. KITADA and H. SATO : On the absolute continuity of infinite product measure and its convolution.
Prob. Theory. Related Fields 81(1989) 609-627
- [2] D. Lepingue et J. Mémin : Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles.
Z.W.V.G. 42(1978) 175-203
- [3] H. SATO : On the convergence of the product

of independent random variables. J. Math.

Kyoto Univ. 27 (1987) 381-385

[4] H. SATO : Convergence of sum and product
of a martingale difference sequence.

Hiroshima Math. J. 18 (1988) 69-72.