

可換環上の Chevalley 群と Steinberg 群

筑波大 数学 阿部英一

Steinberg [5] は Chevalley 型の単純, 単連結 k -代数群 $G(k)$ に対して, 現在 Steinberg 群とよばれている群 $St(k)$ を生成元と基本関係によって定義した. リー群の covering の理論の群での代数的類似として,

リー群	群
connected	perfect
covering	(perfect) central extension
simply connected	centrally closed
universal covering	universal central extension
fundamental group	Schur multiplier

をとると, $St(k)$ は少数の例外を除いて, $G(k)$ の universal covering になっている. しかし, このような類似によって, リー群の homotopy 群にあたるものを群に対して定義する

ことはできない。ここでは、一般に、Strooker [8] をどと同じ方法で、可換環上の Chevalley 群に対して、代数的に homotopy 群を定義し、Steinberg 群との関係を調らべる。

1. Chevalley 群と Steinberg 群

1. 1. Chevalley 群と K_1 一般に、単位元をもつ可換環の圏 $\underline{M}_1$ から群の圏 $\underline{Gr}$ への関手を群関手とよび、表現可能な群関手を群スキームという。 $GL_n(R)$, $SL_n(R)$ をそれぞれ単位元をもつ可換環 R の元を成分に持つ n 次正方行列で行列式が R の単元または 1 である行列の全体とする群とすると、 GL_n , SL_n は群スキームである。 $SL_n(\mathbb{C})$ は単連結、単純リー群で、 k が代数的閉体のとき、 $SL_n(k)$ は連結単純代数群になっている。一般に、 Φ を既約ルート系とすると、群スキーム

$$G = G(\Phi, \) : \underline{M}_1 \longrightarrow \underline{Gr}$$

で、 k が代数的閉体のとき、 $G(\Phi, k)$ が素体上定義され、素体上分裂する Φ 型の連結、単連結、単純代数群になるものが存在する。 $G(\Phi, R)$ を単に $G(R)$ とかき、 R 上の Φ 型の Chevalley 群とよぶ。 1 -parameter 部分群から生成される $G(R)$ の部分群 $E(R) = \langle x_\alpha(t) ; \alpha \in \Phi, t \in R \rangle$ を $G(R)$ の elementary 部分群という。

$$E = E(\Phi,) : M_1 \longrightarrow Gr$$

は群関手であるが、群スキームではない。 SL_n のとき、

$$E(R) = \langle I + tE_{ij} ; t \in R, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \rangle$$

である。ここで、 I は単位行列、 E_{ij} は (i, j) 成分が 1, 他のすべての成分が 0 である行列である。 R が体または半局所環ならば $G(R) = E(R)$, また、 $\Phi = A_n (n > 1)$ のとき、 $G(R) \supset E(R)$ であるが、一般に、 $G(R) \supset E(R)$ であるかどうかは未解決である。

$$K_1(\Phi, R) = G(\Phi, R)/E(\Phi, R)$$

とおく。 $K_1(\Phi, R)$ は一般には homogeneous space であるかわからず、 $\Phi = A_n (n > 1)$ ならば群である。 $K_1(\Phi, R) = 0$ なる環 R を Φ に関して generalized Euclidean であるという。半局所環、ユークリッド環などは Φ に関して generalized Euclidean である。

定理 1 (Suslin [9]) $\Phi = A_n (n > 1)$ のとき、 k が体ならば

$$K_1(\Phi, k[X_1, \dots, X_r]) = 0.$$

一般に、 X を集合とし、 $k[X]$ を X から生成される自由可換 k 代数とするとき、 $K_1(\Phi, k[X]) = 0$ である。

問題 1 Φ を階数 > 1 の既約ルート系、 k を体とするとき、 $K_1(\Phi, k[X]) = 0$ か？ また、 R を整域とするとき、 $K_1(\Phi, R[X]) = K_1(\Phi, R)$ か？

1. 2. Steinberg 群と K_2 Φ を階数 > 1 の既約ルート系とし, R を単位元を 1 個持つ可換環とする. $St(\Phi, R)$ を $\hat{x}_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$ から生成され, 次の基本関係で定義される群とする.

$$(A) \quad \hat{x}_\alpha(s) \hat{x}_\alpha(t) = \hat{x}_\alpha(s+t)$$

$$(B) \quad [\hat{x}_\alpha(s), \hat{x}_\beta(t)] = \prod_{\substack{\alpha+\beta \in \Phi \\ i, j \geq 1}} \hat{x}_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij} s^i t^j)$$

ここで, $\alpha+\beta \neq 0$, 積はルート系 Φ の順序を 1 に固定する.

$N_{\alpha\beta ij}$ はルート系にのみよって決まる整数である.

$E(R)$ の生成元 $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$ は (A), (B) をみたすから自然な上への群同型 $\phi: St(\Phi, R) \rightarrow E(\Phi, R)$ が存在する. このとき,

$$K_2(\Phi, R) = \text{Ker}(\phi: St(\Phi, R) \rightarrow E(\Phi, R))$$

と定義する.

注意: $St(R) = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} St(A_n, R)$, $E(R) = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} E(A_n, R)$

とあくと, $St(R)$ は $E(R)$ の universal central extension で $K_2(R) = \text{Ker}(\phi: St(R) \rightarrow E(R))$ は $E(R)$ の Schur multiplier である.

定理 2 (Silvester [4]) k を体とし, $k\langle X \rangle$ を集合 X から生成される非可換自由 k -代数とすると,

$$K_2(A_n, k\langle X \rangle) = K_2(A_n, k)$$

問題 2 Φ を階数 > 1 の既約ルート系, X を集合, R を整域とするとき, $K_2(\Phi, R[X]) = K_2(\Phi, R)$ が成り立つか?

1.3. $G(\Phi, R)$ の presentation Φ, R を 1.2. と同じとし, $E_u(\Phi, R)$ を $\hat{\alpha}_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi, t \in R$ から生成され, 基本関係 (A), (B) および次の (C) で定義される群とする.

$$(C) \quad \hat{h}_\alpha(u) \hat{h}_\alpha(v) = \hat{h}_\alpha(uv), \quad u, v \in R^*$$

ここで, R^* は R の単元からなる乗法群で, $u \in R^*$ のとき,

$$\hat{w}_\alpha(u) = \hat{\alpha}_\alpha(u) \hat{\alpha}_{-\alpha}(-u^{-1}) \hat{\alpha}_\alpha(u), \quad \hat{h}_\alpha(u) = \hat{w}_\alpha(u) \hat{w}_\alpha(-1)$$

である. $E_u(\Phi, R) = E(\Phi, R)$ をみたすとき, R を Φ に関して universal であるという. 体 k は少数の例外を除いてすべての Φ に関して universal である (Steinberg [5]). また, 有理整数環 $\mathbb{Z}$ は Φ (階数 > 1) に関して universal である. (Behr [1]). $K_2(\Phi, k[x_1, \dots, x_r]) = K_2(\Phi, k)$ ならば $k[x_1, \dots, x_r]$ は Φ に関して universal である. 一般に,

定理 3. R, Φ について, 問題 2 が成り立ち, R が Φ に関して universal ならば, $R[X]$ も Φ に関して universal である.

R が Φ に関して, generalized Euclidean かつ universal ならば $G(\Phi, R)$ は生成元 $\hat{\alpha}_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi, t \in R$ と基本関

係 (A), (B), (C) によって定義される。例えば、体 k のとき少数の例外を除いて、また、有理整数環 $\mathbb{Z}$ 、体 k 上の一次変数多項式環 $k[X]$ はそうである。一般に、 R がユークリッド環で α に関して universal でない例がある。

(Hurtenblich [2]).

2. 群関手の homotopy 群

先づ homotopy 群を定義するために、一般論を準備する。

2.1. Cotriple system (S. Eilenberg & J. C. Moore [3])

A を圏とし、 $F: A \rightarrow A$ を関手とする。次の条件をみたす関手射 $\varepsilon: F \rightarrow 1_A$ と $\delta: F \rightarrow F^2$ があたえられたとき、 (F, ε, δ) を A の cotriple system といい。

$$(T1) \quad \varepsilon F \cdot \delta = F \varepsilon \cdot \delta = 1_F$$

$$(T2) \quad \delta F \cdot \delta = F \delta \cdot \delta$$

このとき、 $F_{-1} = 1_A$ 、 $F_i = F^{i+1}$ とおき、 $F_* = \{F_i; i \geq -1\}$ とおく。

$$\partial_i = F^i \varepsilon F^{n-i} : F_n \rightarrow F_{n-1} \quad (0 \leq i \leq n)$$

$$s_i = F^i \delta F^{n-i} : F_n \rightarrow F_{n+1} \quad (0 \leq i \leq n)$$

をそれぞれ face operator, degeneracy operator とよび、次の条件が成り立つ。 $\{F_*, \partial_i, s_i\}$ を $\text{End}(A)$ における simplicial object といい。

- (i) $\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i \quad (i < j)$
- (ii) $s_i s_j = s_{j+1} s_i \quad (i \leq j)$
- (iii) $\partial_i s_j = s_{j-1} \partial_i \quad (i < j)$
- (iv) $\partial_i s_i = \partial_{i+1} s_i = id$
- (v) $\partial_i s_j = s_j \partial_{i-1} \quad (i > j+1)$

2.2 随伴関数に属する Cotriple system $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を圏とし, $S: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}, T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を関手とする. B, A をそれぞれ $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ の object とするとき,

$$\sigma_{B,A}: \mathcal{A}(S(B), A) \rightarrow \mathcal{B}(B, T(A))$$

が 2 変数関手として同型のととき, S は T に *coadjoint* であるという. $\alpha(A) = \sigma_{T(A), A}^{-1}(1_{T(A)}), \beta(B) = \sigma_{B, S(B)}(1_{S(B)})$ とおくと,

$$\alpha: ST \rightarrow 1_{\mathcal{A}}, \quad \beta: 1_{\mathcal{B}} \rightarrow TS$$

は関手射で,

$$F = ST: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$\varepsilon = \alpha: F \rightarrow 1_{\mathcal{A}}$$

$$\delta = S\beta T: F \rightarrow F^2$$

とおくと, (F, ε, δ) は cotriple system になる. これを関手 S, T に属する cotriple system とよぶ.

2.3 simplicial ring A を単位元をもつ可換環とし,
 $\underline{AM}$ を可換 A -代数 (必ずしも単位元をもつとは限らな
い) の圏とし, $\underline{S}_*$ を pointed sets の圏とする. $\underline{S}_*$ の
object (X, x) に対して, $S(X)$ を $X - \{x\}$ から生成される
自由可換 A -代数 (単位元をもたない) とし, $\underline{AM}$ の object
 R に対して, $T(R)$ を 集合 R と R の零元でさまる $\underline{S}_*$
の object とする,

$$S: \underline{S}_* \rightarrow \underline{AM}, \quad T: \underline{AM} \rightarrow \underline{S}_*$$

は関手で, S と T は coadjoint である. (2.2) により,

S, T に属する $\underline{AM}$ の cotriple system (F, ε, δ) が
きまる. $\{F_*, \partial_i, s_i\}$ は $\text{End}(\underline{AM})$ における simplicial
object で $F_*R = \{F_iR, \partial_iR, s_iR\}$ は simplicial
ring になる.

2.4. 圏 $\underline{AM}$ と $\underline{AM}_1$ 単位元をもつ可換 A -代数の
圏を $\underline{AM}_1$ とおき, $Q: \underline{AM}_1 \rightarrow \underline{AM}$ を $\underline{AM}_1$ の object
と $\underline{AM}$ の object とみる関手とする. R を $\underline{AM}$ の object
とするとき,

$$R_A = \{(r, a); r \in R, a \in A\}$$

に積を

$$(r, a)(s, b) = (rs + as + br, ab)$$

と定義すると, R_A は単位元 $(0,1)$ をもつ可換 A -代数である. R に R_A を対応させて, 関手 $P: \underline{AM} \rightarrow \underline{AM}_1$ が与えられ, P は Q に coadjoint である. R が単位元をもてば $R_A \cong R \times A$ ($\underline{AM}_1$ での直積) である.

2.5. 群関手の $\underline{AM}$ への延長 $G: \underline{AM}_1 \rightarrow \underline{Gr}$ を群関手とする. 群関手 $\bar{G}: \underline{AM} \rightarrow \underline{Gr}$ の $\underline{AM}_1$ への制限が G と同型なとき, $\bar{G}$ を G の延長とよぶ. $\underline{AM}$ の object R に対して, $f: R_A \rightarrow A$ を自然な射影とすると, $\text{Ker } f \cong R$ である.

$$\bar{G}(R) = \text{Ker}(G(f): G(R_A) \rightarrow G(A))$$

と定義すると, G が積を保存するならば (すなわち, R, R' を $\underline{AM}_1$ の object とするとき, $G(R \times R') \cong G(R) \times G(R')$ が成り立つ), $\bar{G}$ は G の延長である. $G(\oplus,)$, また, $\oplus$ の階数が > 1 ならば, $E(\oplus,)$, $St(\oplus,)$ は積を保存し, $\bar{G}(\oplus,)$, $\bar{E}(\oplus,)$, $\bar{St}(\oplus,)$ はそれぞれ $G(\oplus,)$, $E(\oplus,)$, $St(\oplus,)$ の延長になる.

2.6. 群関手の homotopy 群 $G: \underline{AM}_1 \rightarrow \underline{Gr}$ を群関手とし, 積を保存するとする. $\bar{G}: \underline{AM} \rightarrow \underline{Gr}$ を G の延長とすると, (2.3) の cotriple system (F, ε, δ) について,

$$GF_*R = \{ \bar{G}(F_*R), \bar{G}(\partial_*R), \bar{G}(s_*R) \}$$

は simplicial group であり $n \geq 1$ に対して n -homotopy 群が定義できる。これを

$$\pi_n(G, R) = \pi_n(G \bar{F} \star R) = K_{n+1}^S(G, R)$$

と置く。 $n > 1$ からは可換群であり, $n=0$ のときは,

homogeneous space として $\pi_0(G, R)$ を定義できる。

3. Covering group と Steinberg 群

群関手 $G: \mathbf{AM}_1 \rightarrow \mathbf{Gr}$ に対して,

$$0 \rightarrow R \rightarrow R' \Rightarrow 1 \rightarrow G(R) \rightarrow G(R')$$

$$R \rightarrow R' \rightarrow 0 \Rightarrow G(R) \rightarrow G(R') \rightarrow 1$$

を満たすとき, G は左完全, 右完全であるという。 $E(\mathbf{A},)$, $St(\mathbf{A},)$ は左かつ右完全で, $G(\mathbf{A},)$ は左完全であるが右完全でない。 G が積を保存し, 左完全のときは, G の homotopy 群は次のようにあらわされる。記号は (2.6) と同じとし, $G \bar{F} \star R$ を simplicial group とする。

$$G_n^*(R) = \bar{G}(F_n R) \cap \text{Ker } \bar{G}(\partial_1 R) \cap \cdots \cap \text{Ker } \bar{G}(\partial_n R)$$

$$d_n = \bar{G}(\partial_0 R)|_{G_n^*(R)}: G_n^*(R) \rightarrow G_{n-1}^*(R) \quad (n \geq 1)$$

と定義する。群射の列

$$\cdots \rightarrow G_3^*(R) \xrightarrow{d_3} G_2^*(R) \xrightarrow{d_2} G_1^*(R) \xrightarrow{d_1} G_0^*(R) \xrightarrow{d_0} 1$$

から、 $\text{Im } d_n \triangleleft \text{Ker } d_{n-1} \ (n > 1)$ を得る。よって、

$$\pi_n(G, R) = H_n(G, R) = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1} \quad (n \geq 0)$$

より、

$$K_1^S(G, R) = \pi_0(G, R) = \bar{G}(R) / \text{Im } \bar{G}(\varepsilon R)$$

$$K_2^S(G, R) = \pi_1(G, R) = \text{Ker } \bar{G}(\varepsilon R) / \bar{G}(\varepsilon FR) (\text{Ker } \bar{G}(F\varepsilon R))$$

となる。 $\pi_0(G, R) = 0$ となるとき、 $\bar{G}(R) = \text{Im } \bar{G}(\varepsilon R)$ のとき、 $\bar{G}(R)$ を connected, 一般に、 $\text{Im } \bar{G}(\varepsilon R)$ を $\bar{G}(R)$ の連結成分という。 $\pi_1(G, R) = 0$ となるとき、 $\text{Ker } \bar{G}(\varepsilon R) = \bar{G}(\varepsilon FR) (\text{Ker } \bar{G}(F\varepsilon R))$ となる、 $\bar{G}(R)$ を simply connected, 一般に、 $\pi_1(G, R)$ を $\bar{G}(R)$ の fundamental group いう。

$$\hat{G}(R) = \bar{G}(FR) / \bar{G}(\varepsilon FR) (\text{Ker } \bar{G}(F\varepsilon R))$$

を $\bar{G}(R)$ の universal covering いう。 $\hat{G}: A[M] \rightarrow Gr$ は群環から $\bar{G}(\varepsilon R)$ にかきおこされる群環同射 $\pi: \hat{G} \rightarrow \bar{G}$ を covering 射いう。このとき、次の定理がえられる。

Theorem 4 A を単位元をもつ可換環とし, Φ を階数が >1 の既約ルート系とする. 任意の集合 X について,

$$K_1(\Phi, A[X])=0, K_2(\Phi, A[X])=K_2(\Phi, A)$$

が成り立つならば, 任意の可換 A -代数 R に対して,

$$K_1^S(\Phi, R) = \overline{G}(\Phi, R)/\overline{E}(\Phi, R)$$

$$K_2^S(\Phi, R) = \text{Ker}(\overline{St}(\Phi, R) \rightarrow \overline{E}(\Phi, R))$$

$$\hat{G}(\Phi, R) = \overline{St}(\Phi, R)$$

が成り立つ. 逆に, R が単位元をもつ可換 A -代数ならば

$$K_1^S(\Phi, R) = G(\Phi, R)/E(\Phi, R)$$

$$K_2^S(\Phi, R) = \text{Ker}(St(\Phi, R) \rightarrow E(\Phi, R))$$

$$\hat{G}(\Phi, R) = St(\Phi, R)$$

である.

Theorem 4 の仮定について, 任意の整域 A に対して成り立つであろうと予想している. 現在のところまだ部分的な結果しか得られていない.

References

- 1 H.Behr, Explizite Präsentation von Chevalley Gruppen über $\mathbb{Z}$, Math. Zeit. 141 (1975), 235-241
- 2 J. Hurrenblick, On $K_2(\mathcal{O})$ and presentations of $SL_n(\mathcal{O})$ in the real quadratic case, to appear in Crelles Journal.
- 3 S.Eilenberg and J.C.Moore, Adjoint functors and triples, Ill. J. Math. 9 (1965), 381-398
- 4 J.R.Silvester, On the K_2 of a free associative algebra, Proc. London Math. Soc. 26 (1973), 35-56
- 5 R.Steinberg, Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques Coll. Theo. Groupes algébriques, CBRM (1962), 113-327
- 6 M.Stein, Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings, Amer. J. Math. 93 (1971), 965-1004
- 7 J.R.Strooker and O.E.Villamayor, Building K-theories, Adv. Math. 15 (1975), 232-268
- 8 J.R.Strooker, The fundamental group of general linear groups, J. Alg. 48 (1977), 477-508
- 9 A.A.Suslin, On the structure of the special linear group over polynomial rings, Math. USSR, Izv. 11 (1977), 221-238