

Mumford の擬射影平面に関連した smoothing の問題

東北大学理学部 石田正典

序文

もう10年以上前になるが、マンフォードは[6]において射影平面と同じベッチ数を持つ一般型代数曲面を構成した。いわゆるマンフォードの擬射影平面(Mumford's fake projective plane)である。この性質を持つ一般型代数曲面はいまだにこれ以外に知られていない。またマンフォードの曲面自体、2進整数環上の形式スキームの代数化という方法で構成された為、その複素解析的構造を知ることが困難で、ヤウの定理により普遍被覆空間が単位球になること以外ほとんど何もわかっていない。

[4]ではマンフォードの曲面 M の8次の不分岐被覆 V への位数168の単純群 G の作用について調べ、 V/G が楕円曲面になること等がわかったが、その楕円曲面もまだ確定できていない。

ここではマンフォードの曲面の標数2の素体 F_2 上のファイバーについての組み合わせ的問題の計算結果と、それから生じる F_2 上定義された正規交叉のみを特異点として持つ曲面の標数0への非特異持ち上げの問題について考えたことを述べる。

1 マンフォードの曲面の閉ファイバーの組み換え

マンフォードの曲面は正確には3次元正則かつ Z_2 上の相対2次元射影スキーム M として与えられ、 $\text{Spec } Z_2$ の生成点での幾何学的ファイバー M_{Q_2} が擬射影平面となる。マンフォードはその構成において栗原及びマスターフィンによる p 進単位球体の理論を用いた。つまり2次元2進単位球体 X を $GL(3, Q_2)$ のある離散部分群 Γ の自由な作用で割って出来た Z_2 上の形式スキーム X/Γ を考え、それをグロタンディエックの理論[3]により代数化したものがその M である。

Z_2 スキーム M の閉点 $\text{Spec } F_2 \subset \text{Spec } Z_2$ 上のファイバー M_0 は、正規交叉のみを特異点として持つ2次元既約 F_2 スキームである。 M_0 の正規化 $\tilde{M}_0$ は F_2 上の射影平面 $P^2_{F_2}$ をその上の7つの F_2 有理点でブローアップしてできた有理曲面 B と同一視出来る。 $p: B \rightarrow P^2_{F_2}$ を自然な正則写像とする。7つの F_2 有理点の p による引き戻しを $E_1, \dots, E_7$ とする。これらは第一種例外曲線であり以後 (-1) 曲線と呼ぶ。また $P^2_{F_2}$ には7本の F_2 上定義された直線が存在するが、それらの p による引き戻しの主要成分を $C_1, \dots, C_7$ とする。これらは自己交点数が -2 の非特異有理曲線で、以後 (-2) 曲線と呼ぶことにする。各 E_i は $P^1_{F_2}$ と同型であり丁度3つの F_2 有理点を持つ。従って B 上の F_2 有理点は21個でこれを $P_1, \dots, P_{21}$ とおく。また $A = E_1 \cup \dots \cup E_7 \cup C_1 \cup \dots \cup C_7 \subset B$ とおく。 A は14本の既約因子からなり $P_1, \dots, P_{21}$ で通常2重点を持つ。

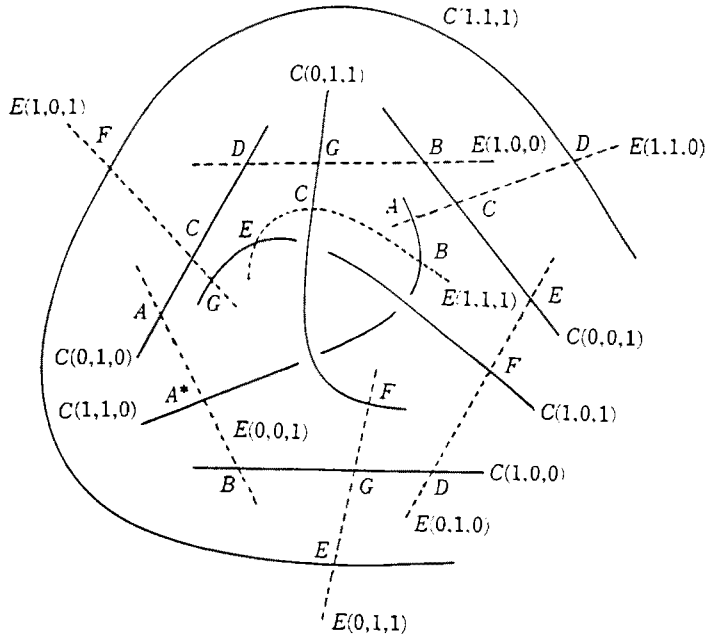


図 1: M_0 の展開図

$\mathbf{F}_2$ スキーム M_0 はその正規化 B の適当な 7 組の (-1) 曲線と (-2) 曲線との対をそれぞれ同型により 1 つの有理曲線に同一視する事により回復される。その 7 つの組と同一視の仕方を具体的に示したのが図 1 である。ここで $C(a, b, c)$ とあるのは $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_2}$ の直線 $aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0$ の引き戻しである C_i のことで、 $E(a, b, c)$ は $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_2}$ の点 $(a : b : c)$ の p による引き戻しである E_j のことである。

図の各交点に A から G までの記号がつけられているが、各 C_i に対しその上にある 3 つの記号と同じ記号を持つ E_j が必ず唯 1 つあり、その C_i と E_j が同じ記号のある点がそれぞれ 1 つの点になるように同一視される。そしてそれぞれが曲面 M_0 の正規交叉している部分の 2 重曲線となる。但し $C(1, 1, 0)$ と $E(0, 0, 1)$ との同一視は $A \rightarrow A^*$, $A^* \rightarrow A$, $B \rightarrow B$ となるようにする。したがってこれから得られた 2 重曲線は 2 重点を持つ。A から G の各記号について、その記号のつけられた 3 つの点は M_0 では同一視されて正規交叉の 3 重点となる。

M_0 が B からこのようにして作られることは $\mathcal{X}$ に対応するティツビルディングへの離散群 Γ の作用を見ることにより確認出来る。

このようにマンフォードの擬射影平面の標数 2 への退化である M_0 の構造は完全にわかったことになる。

ここで多分にパズル的な興味から考えたことであるが、逆に B の上の曲線 $C_1, \dots, C_7$ 及び $E_1, \dots, E_7$ から 1 つずつ 7 組の対を作りそれぞれを同一視して出来た曲面がいつ正規交叉のみを特異点として持つかを考えてみる。なお、このような同一視は一般にはスキームのカテゴリーではなく更に広い代数的空間 (algebraic space) の範囲で考えなくてはならない。

まず 7 組の対の作り方は $7!$ とおりである。また各組について同一視の仕方は、 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_2}$ の自己

同型群 $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{F}_2)$ の位数と同じ 6 とおりだから、全体として $7! \times (6 \text{ の } 7 \text{ 乗})$ (約 14 億) とおりの同一視の仕方が考えられる。これらの内どれが正規交叉のみを特異点として持つ曲面を与えるかは B の 21 個の $\mathbf{F}_2$ 有理点が同一視により 3 つずつ 7 組の同値類に分かれることが必要かつ十分な判定条件となる。

これをパソコンを使って調べてみた。実際に 14 億回ループを回すと大変だが再帰性を使ったプログラムで行なうと以外に簡単で、数分で 408 とおりの同一視だけが正規交叉のみの曲面を与えることがわかり、実際にその 408 とおりの組み合わせを書き出すことが出来た。

さて $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_2}$ には位数 168 の単純群 $G = \mathrm{PGL}(3, \mathbf{F}_2)$ が作用しており $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_2}$ の 7 つの $\mathbf{F}_2$ 有理点の集合が G の作用で不変であることによりこれは B への作用に持ち上げられる。この作用により、先の 408 とおりの組み合わせ方は 7 つの軌道に分解される。その類等式は

$$408 = 168 + 56 + 56 + 56 + 56 + 8 + 8$$

となる。このうち最初の 168 は先に図 1 に書いたマンフォードの M_0 を与える組み合わせの同値類である。

つまり正規交叉を与える組み合わせが本質的に 7 とおり存在し、その内マンフォードの曲面から得られるものだけが全く対称性を持っていないことがわかる。

新しい 6 とおりの組み合わせ方の各代表を表 1 に示した。(1) から (6) の各縦列にある A から G の記号を図 1 の各 2 重点に書き込めばそれぞれの展開図となる。但し、図 1 で入れた星印はここでは省略してあるので 1 つの曲線上に同じ記号が 2 つついている時はその対と固定点の無いように同一視する。(0) には図 1 と同一ではないが共役な組み合わせを 1 つ書いた。

表 1 の (1) から (6) の各組み合わせ方により得られた曲面をそれぞれ $M_0^{(1)}$ から $M_0^{(6)}$ とする。これらはまずは代数的空間と考える。

命題 1.1. 各 $k = 1, \dots, 6$ について $M_0^{(k)}$ は $\mathbf{F}_2$ 上射影的である。 K を $M_0^{(k)}$ の標準束とすると $k = 1, 2$ のとき $K^{\otimes 2}$ 、また $k = 3, 4, 5, 6$ のとき $K^{\otimes 3}$ が非常に豊富 (very ample) である。

証明 $E' = E_1 + \dots + E_7$ とおき $\mathcal{L}$ を B 上の可逆層 $p^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(4) \otimes \mathcal{O}_B(-E')$ とする。この可逆層は非常に豊富であり、 $H^0(B, \mathcal{L})$ は $\mathbf{F}_2[X_0, X_1, X_2]$ の斉次 4 次式で $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_2}$ の 7 つの $\mathbf{F}_2$ 有理点で 0 となるもの全体と自然に 1 対 1 に対応している。

さて $M'_0 = M_0^{(k)}$ とおき、必要なら $E_1, \dots, E_6$ の番号を付け替えることにより M'_0 は B 上の曲線の同型 $\phi_i: E_i \rightarrow C_i$, $i = 1, \dots, 7$ による同一視から得られると仮定する。 $\alpha': B \rightarrow M'_0$ を自然な正規化の写像とする。

まず $k = 1, 2$ の場合を考える。表 2 から得られた展開図からわかるように、このときすべての二重曲線 D_i が非特異である。

ベクトル空間 $H^0(B, \mathcal{L}^{\otimes 2})$ は自然に $H^0(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(8))$ の部分空間と考えられる。後者は多項式環 $\mathbf{F}_2[X_0, X_1, X_2]$ の斉次 8 次式全体に等しく 45 次元である。完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes 2} \rightarrow p^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(8) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^7 \mathcal{O}_{2E_i} \rightarrow 0$$

を考える。ここで $2E_i$ はイデアル $\mathcal{O}_B(-2E_i)$ で定義された B の閉部分スキームである。容易にわかるように $\dim H^0(\mathcal{O}_{2E_i}) = 3$, $i = 1, \dots, 7$ であるから $H^0(B, \mathcal{L}^{\otimes 2})$ は少なくとも 24 次元となる。さらに、曲面 B の 21 個の $\mathbf{F}_2$ 有理点 $\{P_1, \dots, P_{21}\}$ で零となる $H^0(B, \mathcal{L}^{\otimes 2})$ の元全体は 3

2 重点	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
$E(1,0,0) \cap C(0,1,0)$	A	C	C	A	A	A	A
$E(1,0,0) \cap C(0,0,1)$	C	A	A	B	B	C	C
$E(1,0,0) \cap C(0,1,1)$	B	B	B	C	C	B	B
$E(0,1,0) \cap C(1,0,0)$	B	B	B	B	B	B	B
$E(0,1,0) \cap C(0,0,1)$	D	F	E	D	D	D	D
$E(0,1,0) \cap C(1,0,1)$	A	D	G	A	A	G	G
$E(0,0,1) \cap C(1,0,0)$	A	A	A	A	A	A	A
$E(0,0,1) \cap C(0,1,0)$	D	D	D	D	D	A	A
$E(0,0,1) \cap C(1,1,0)$	F	G	G	G	G	D	D
$E(1,1,0) \cap C(0,0,1)$	E	E	F	E	E	E	E
$E(1,1,0) \cap C(1,1,0)$	G	C	B	C	F	G	B
$E(1,1,0) \cap C(1,1,1)$	G	D	D	F	E	E	F
$E(1,0,1) \cap C(0,1,0)$	B	E	E	B	B	D	D
$E(1,0,1) \cap C(1,0,1)$	F	G	F	D	D	C	E
$E(1,0,1) \cap C(1,1,1)$	E	B	A	E	E	E	C
$E(0,1,1) \cap C(1,0,0)$	C	C	C	C	C	C	C
$E(0,1,1) \cap C(0,1,1)$	F	G	F	F	C	F	F
$E(0,1,1) \cap C(1,1,1)$	G	F	G	G	F	G	F
$E(1,1,1) \cap C(1,1,0)$	C	F	E	F	G	B	G
$E(1,1,1) \cap C(1,0,1)$	D	A	C	G	G	F	G
$E(1,1,1) \cap C(0,1,1)$	E	E	D	E	F	F	E
共役類の大きさ	168	8	8	56	56	56	56
2 重点を持つ 2 重曲線	1	0	0	0	3	3	3

表 1: $M_0^{(k)}$ の展開

次元以上あることがわかる。しかし、これを $H^0(\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_2}(8), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2})$ の部分空間として見ると、各元が 7 つの $\mathbf{F}_2$ 有理直線上で零となることがわかり 7 次式

$$u = X_0 X_1 X_2 (X_0 + X_1)(X_0 + X_2)(X_1 + X_2)(X_0 + X_1 + X_2)$$

を因子として持つことになり、丁度 3 次元のベクトル空間

$$L_0 = \{(aX_0 + bX_1 + cX_2)u; a, b, c \in \mathbf{F}_2\}$$

に等しいことがわかる。

このことから $H^0(B, \mathcal{L}^{\otimes 2})$ は丁度 24 次元であり、A から G までの 7 つの各記号について、その記号のついている点で 1 (つまり零でない) となり、その他の記号の点で零となる $H^0(B, \mathcal{L})$ の元が存在することがわかる。ここで可逆層 $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ の E_i や C_i への制限の次数は 2 であり各切断は 3 点での値で決まる。従って、 $H^0(B, \mathcal{L}^{\otimes 2})$ の部分空間

$$L_1 = \{s \in H^0(B, \mathcal{L}^{\otimes 2}); s|_{E_i} = \phi_i^*(s|_{C_i}), i = 1, \dots, 7\}$$

は10次元で固定点を持たず B から $\mathbf{P}_{\mathbf{F}_2}^9$ への正則写像を与えることがわかる。但しここで使っている ϕ_i^* は $\mathbf{F}_2$ スキーム E_i 上の可逆層の自己同型が恒等写像のみであることから一意的に定まる引き戻しであることに注意する。 x を M'_0 の点、つまりある体 k についての k 有理点、 s を L_1 の元とするとき L_1 の定義より s は $\alpha'^{-1}(x)$ 上で恒等的に零かまたはどの点でも零でない。そこで、それに応じて s は x で零とか零でないと言うことにする。

L_1 から得られた写像を $\alpha'' : B \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{F}_2}^9$ とおき $M''_0 = \alpha''(B)$ とおく。 B 上の曲線 E_i と C_i がすべての i について M''_0 で同一視されていることから自然な写像 $\beta : M'_0 \rightarrow M''_0$ が得られるが、これが同型であることを示す。

まず同型 $\phi_i : E_i \rightarrow C_i$ から得られる M'_0 の2重曲線を D_i とし $D = D_1 \cup \cdots \cup D_7$ とおく。また $Q_1, \dots, Q_7$ を M'_0 の3重点とし $S = \{Q_1, \dots, Q_7\}$ とおく。

β が同型であることというには次を示せば良い。

(i) $\beta(M'_0 \setminus D)$, $\beta(D \setminus S)$, $\beta(S)$ はいずれも互いに交わらない。

(ii) β の $M'_0 \setminus D$ への制限は埋め込みである。

(iii) β の D への制限は単射である。

(iv) β は S の各点の近傍で同型である。

(v) β は $D \setminus S$ の各点の近傍で同型である。

以下これらを示す。

(i) $\beta(M'_0 \setminus D) \cap \beta(D) = \emptyset$ であることは部分一次系 L_0 の固定部分が A であり、 $\alpha'(A) = D$ であることから従う。 $\beta(D \setminus S) \cap \beta(S) = \emptyset$ であることは $Q_i \in S, x \in D \setminus S$ に対し、 x を含む D の既約因子 D_j が Q_i を含めば Q_i で零で x で零でない L_1 の元があり、さもなければ Q_i で1で D_j で恒等的に零となる L_1 の元が存在することからいえる。

(ii) $M'_0 \setminus D = B \setminus A$ は $\mathbf{P}_{\mathbf{F}_2}^2$ の開部分スキームと同型であり部分一次系 L_0 はそこで直線の完備一次系と同じであるので正しい。

(iii) まず S の各点について、その点だけで1となり他の S の点で零となる L_1 の元が存在するので β の S への制限は単射である。 M'_0 の2つの2重曲線で3点を共有するものはない。従って任意の2つの2重曲線について一方で恒等的に零で他の一方では2つの $\mathbf{F}_2$ 有理点でのみ零となる L_1 の元が存在する。従って D_i, D_j が相異なる M'_0 の2重曲線であれば $\beta(D_i \setminus S) \cap \beta(D_j \setminus S) = \emptyset$ である。 β の D_i への制限は2次曲線としての埋め込みになっているので単射である。(i) を考え合わせれば (iii) がいえる。

(iv) $M'_0 = M_0^{(1)}$ 又は $M_0^{(2)}$ の場合、表1からわかるように S の任意の点 Q に対し Q を含む2重曲線は3本で、それらは Q 以外では交わらない。従って、そのうち任意の2本の上で恒等的に零で残りの1本では Q と S の別の1点だけで1位の零をとる L_1 の元が存在する。このことから β の3重点 Q での接空間の写像は単射となり (iv) がいえる。

(v) D_i を M'_0 の2重曲線 x を $D_i \setminus S$ の点とし $x' = \beta(x)$ とおく。すでに β の単射性は示されているので E_i の点 y と C_i の点 z で $\alpha''(y) = \alpha''(z) = x'$ を満たすものがいずれも一意的に存在する。このとき接空間の写像 $d\alpha''(y) : T_{y,B} \rightarrow T_{x',\mathbf{P}^9}$ と $d\alpha''(z) : T_{z,B} \rightarrow T_{x',\mathbf{P}^9}$ について $H_1 = d\alpha''(y)(T_{y,B})$, $H_2 = d\alpha''(z)(T_{z,B})$ とおく。 β が x の近傍で同型であることを示すには $\dim H_1 = \dim H_2 = 2$ かつ $H_1 \neq H_2$ を示せば良い。まず $d\alpha''(y)(T_{y,E_i}) = d\alpha''(z)(T_{z,C_i}) =$

$T_{x',\beta(D_i)}$ であるので、いずれも1次元部分空間 $T_{x',\beta(D_i)}$ を含む。また L_0 の元で E_i または C_i で1位の零しかとらないものがそれぞれ存在するので H_1, H_2 はいずれも2次元である。また直線 $aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0$ が C_i の $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_2}$ への像と異なり、かつ E_i の像である点を含むように a, b, c をとれば $(aX_0 + bX_1 + cX_2)u \in L_0$ は C_i で1位の零 E_i で2位の零を持つので $H_1 \neq H_2$ である。

これで $k = 1, 2$ について M'_0 が射影スキームであることはいえた。 M'_0 の特異点は正規交叉のみでゴーレンスタイン特異点であるから標準可逆層(双対化層) K が存在する。 ω_B を B の標準層とすると $\alpha'^*K = \omega_B(A)$ であり、[4, p.383] より $\alpha'^*K \simeq \mathcal{L}$ である。従って $\alpha'^*K^{\otimes 2} \simeq \mathcal{L}^{\otimes 2}$ で、一方 $M'_0 \subset \mathbf{P}^9_{\mathbf{F}_2}$ に関して $\mathcal{O}_{M'_0}(1)$ を考えると $\alpha'^*\mathcal{O}_{M'_0}(1) = \mathcal{L}^{\otimes 2}$ であり $\mathcal{L}^{\otimes 2}|_{E_i}$ と $\phi_i^*(\mathcal{L}^{\otimes 2}|_{C_i})$ の同型が各 i について唯一つしかないことを考えると $K^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}_{M'_0}(1)$ を得る。従って $k = 1, 2$ の場合 $K^{\otimes 2}$ は非常に豊富となる。

$k = 3, 4, 5, 6$ の場合の証明も方針は同じで $K^{\otimes 2}$ でうまくいかない部分を $K^{\otimes 3}$ に上げて示すだけである。証明が長くなっているのではと省略するが、違いは $k = 4, 5, 6$ の場合 M'_0 の2重曲線で2重点を持つものがあり $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ で作った写像はその2重曲線で単射でなく $\mathbf{P}^9_{\mathbf{F}_2}$ の直線の分岐2重被覆となる。また $k = 3$ のときは表1のFに対応する M'_0 の3重点の接空間の像が2次元に退化しそこで埋め込みにならない。これらの問題は $\mathcal{L}^{\otimes 3}$ では起こらない。これは L_1 を同様に定義したとき、任意の D_i に対し他の2重曲線上では恒等的に零で D_i だけでは零でない L_1 の元が存在することによる。これらの場合は完備一次系により M'_0 は $\mathbf{P}^{27}_{\mathbf{F}_2}$ に埋め込まれる。

注意 マンフォードの曲面 M の場合 M_0 は2重点を持つ2重曲線が1つあるので上の $k = 4, 5, 6$ の場合と同じで $\omega_M^{\otimes 2}$ から作った写像 $M \rightarrow \mathbf{P}^2_{\mathbf{Z}_2}$ は M_0 上では埋め込みにならないが $\text{Spec } \mathbf{Z}_2$ の生成点上で、つまりマンフォードの擬射影平面への制限は埋め込みになっていることが確かめられる。

2 d半安定性と問題点

マンフォードの擬射影平面の標数2への退化が M_0 と考えられるので逆に $M_0^{(k)}$ について次のことが問題となる。

問題 $k = 1, \dots, 6$ について $M_0^{(k)}$ は $\mathbf{Z}_2$ 上、標数0に非特異に持ち上げられるか。具体的には、正則な $\mathbf{Z}_2$ 平坦射影スキーム $M^{(k)}$ が存在して $M^{(k)} \otimes_{\mathbf{Z}_2} \mathbf{F}_2 \simeq M_0^{(k)}$ となるか。

命題 1.1 より埋め込まれた $\mathbf{P}^9$ または $\mathbf{P}^{27}$ の中での $M_0^{(k)}$ の変形を考えるべきなのであろうがデータが複雑になりすぎて、まだ無限小変形についても可能かどうか確認できていない。可能性のための弱い条件である次は成立する。

命題 2.1. $k = 1, \dots, 6$ について $M_0^{(k)}$ はフリードマンの意味でd半安定である。

フリードマン [2] のd半安定性は変形による大域的な非特異化のための必要条件で、そこでは複素数体上の単純正規交叉型の多様体に対して定義されているが、標数正の体上の正規交叉型の多様体でも同様に定義出来る。以下少し説明を行なう。

X を体 k 上定義された既約とは限らない代数多様体で $\bar{k}$ を k の代数的閉包とする時 $X \otimes_k \bar{k}$ が特異点として正規交叉しか持たないと仮定する。そのとき [7] による X の余接複体 L_X^* から得られる

$$T^1 = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^1(L_X^*, \mathcal{O}_X)$$

は [5] に局所的な形が与えられている様に X の特異部分 D 上の可逆層となる。

k を剰余体とする離散付値環上の正則固有スキーム V が存在して閉点上のファイバーが X と同型になる場合 T^1 は $\mathcal{O}_D$ と同型になる。従って $T^1 \simeq \mathcal{O}_D$ であることは X が大域的に変形で非特異化出来るための必要条件となりこれを X の d 半安定性という。

命題 2.1 の証明 $X = M_0^{(k)}$ とおき $D = D_1 \cup \dots \cup D_7$ 上の可逆層 T^1 を考える。 $\tilde{D}_i$ を 2 重曲線 D_i の正規化とし $\lambda_i: \tilde{D}_i \rightarrow D$ を自然な写像とする。また D_i は E_i と C_i の同一視から得られたものとし $\epsilon_i: \tilde{D}_i \rightarrow E_i$, $\delta_i: \tilde{D}_i \rightarrow C_i$ をそれぞれ自然な同型とする。[5, Theorem 2.3] または [2, Proposition 2.3] からわかるように同型

$$\lambda_i^* T^1 \simeq \epsilon_i^* N_{E_i/B} \otimes \delta_i^* N_{C_i/B} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{D}_i}(P_0 + P_1 + P_\infty)$$

を得る。ここで P_0, P_1, P_∞ は $\tilde{D}_i$ の 3 つの $\mathbf{F}_2$ 有理点である。

E_i は (-1) 曲線 C_i は (-2) 曲線だから $\lambda_i^*(T^1)$ の次数は 0 であり、 $\tilde{D}_i \simeq \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_2}$ であることから $\lambda_i^*(T^1) \simeq \mathcal{O}_{\tilde{D}_i}$ を得る。

$$H^0(T^1) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^7 H^0(\mathcal{O}_{\tilde{D}_i}) = \mathbf{F}_2^{\oplus 7}$$

であるが $D_1, \dots, D_7$ の 2 重点や互いに交わっている点はすべて $\mathbf{F}_2$ 有理点であるから $(1, \dots, 1) \in \mathbf{F}_2^{\oplus 7}$ は $H^0(T^1)$ の元であることがわかる。よって可逆層 T^1 はいたるところ零でない切断を持ち $T^1 \simeq \mathcal{O}_D$ となる。 証明終わり

問題で述べた $M^{(k)}$ は、その存在も一意性も不明であるが、存在すると仮定してその無限小変形を考えてみる。

n を自然数とし

$$M_n^{(k)} = M^{(k)} \otimes_{\mathbf{Z}_2} (\mathbf{Z}_2/2^{n+1}\mathbf{Z}_2)$$

とおく。 $M_n^{(k)}$ は $\mathbf{Z}/2^{n+1}\mathbf{Z}$ スキームとなる。 $M_n^{(k)}$ の展開 $\tilde{M}_n^{(k)}$ を次のように定義する。

正規交叉型の曲面 $M_0^{(k)}$ のエタール被覆 $V_0 \rightarrow M_0^{(k)}$ で V_0 の各既約成分が非特異となるようにとる。 $M_0^{(k)} = (M_n^{(k)})_{\text{red}}$ であるので $M_n^{(k)}$ のエタール被覆 V_n で $(V_n)_{\text{red}} = V_0$ となるものが一意的に存在する。 V_n の各被約な既約成分 X に対し X の V_n での定義イデアルを I_X とし、 I_X^{n+1} で定義される V_n の閉部分スキームを X_n とおく。また X 以外の V_n の被約な既約成分の和の X_n への制限を $A(X_n)$ とおく。そして V_n すべての既約成分 X についての X_n の直和をとったものを $\tilde{V}_n$ とする。作り方から自然な写像 $\phi: \tilde{V}_n \rightarrow V_n$ が存在し $\phi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}_n} \supset \mathcal{O}_{V_n}$ となる。 $\tilde{V}_n$ のエタールな関係

$$(\phi \times \phi)^{-1}(V_n \times_{M_n^{(k)}} V_n) \subset \tilde{V}_n \times \tilde{V}_n$$

から得られる代数的空間を $\tilde{M}_n^{(k)}$ とおく。 $(\tilde{M}_n^{(k)})_{\text{red}}$ は $M_0^{(k)}$ の正規化と同じで B に等しくスキームであることから $\tilde{M}_n^{(k)}$ も [1, III, Cor.3.6] によりスキームとなる。 $\tilde{M}_n^{(k)}$ には閉部分スキーム $A(\tilde{M}_n^{(k)})$ が存在して各 X_n への引き戻しが $A(X_n)$ となる。

存在のわかっているマンフォードのスキーム M について $M \otimes_{\mathbf{Z}_2} (\mathbf{Z}_2/2^{n+1}\mathbf{Z}_2)$ の同様に定義された展開を B_n と書くことにする。 B_n は M の 2 進単位球体を用いた構成法から次のように具体的に表わすことができる。

3 次元正則スキーム $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Z}_2}$ を閉部分スキーム $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_2}$ の 7 つの $\mathbf{F}_2$ 有理点でブローアップしたものを W とし、さらに $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_2}$ の 7 本の $\mathbf{F}_2$ 有理直線の W への引き戻しの主要成分である互いに交わ

らない7本の非特異有理曲線で W をブローアップしたものを V とおく。このとき $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_2}$ の V への引き戻しの主要成分が B と同一視される。 V の余次元1の閉部分スキームである B のイデアルを I_B とおけば B_n は V の I_B^{n+1} で定義された閉部分スキームに同型である。14回のブローアップによる V での例外因子の和の B_n への制限を $\mathcal{A}_n$ とする。 $\mathcal{A}_n$ は M に対して定義された $A(B_n)$ に等しい。なお2次元2進単位球体 $\mathcal{X}$ はこの V の中の B の近傍を $\mathrm{GL}(3, \mathbf{Q}_2)$ の作用で動かして和をとったものである。

命題 2.2. 任意の $k = 1, \dots, 6$ について、もし $M^{(k)}$ が存在したとすると各自然数 n について $\tilde{M}_n^{(k)}$ は B_n と同型である。

略証 $B'_n = \tilde{M}_n^{(k)}$ 及び $\mathcal{A}'_n = A(\tilde{M}_n^{(k)})$ とおく。まず B'_n と $\mathcal{A}'_n$ の組がそれらの構造層として局所的には自然な写像

$$\mathbf{Z}_2[x, y, z]/(xyz - 2, z^{n+1}) \longrightarrow \mathbf{F}_2[x, y, z]/(xy, z^{n+1})$$

と同型であることを n に関する帰納法で証明する。これで $(B'_n, \mathcal{A}'_n)$ が $(B_n, \mathcal{A}_n)$ と局所的には同型であることがわかる。

つぎに完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_B(nA) \longrightarrow \mathcal{O}_{B'_n} \longrightarrow \mathcal{O}_{B'_{n-1}} \rightarrow 0$$

が存在するが $H^1(B, \mathcal{O}_B(nA)) = 0$, $n > 0$ を示すことにより B'_n が B'_{n-1} から一意的に定まることがわかる。よって帰納的に $B'_n \simeq B_n$ を得る。

注意 上の略証の中の $\mathcal{A}'_n$ と $\mathcal{A}_n$ が同型であることも容易に示せるが、組 $(B'_n, \mathcal{A}'_n)$ として $(B_n, \mathcal{A}_n)$ と同型であるかどうかはわからない。実際 $A \hookrightarrow B$ の拡張である埋め込み $i: \mathcal{A}_n \rightarrow B_n$ で $(B_n, i(\mathcal{A}_n))$ と $(B_n, \mathcal{A}_n)$ が同型でない場合は存在する。これは $H^1(B, \mathcal{O}_B)$ が6次元あることによる。

この命題より $M^{(k)}$ が存在すれば有限写像

$$\phi_n: B_n \longrightarrow M_n^{(k)}$$

が存在し $\phi_{n+1}\mathcal{O}_{B_n} \subset \mathcal{O}_{M_n^{(k)}}$ が成り立つ。つまり $M_n^{(k)}$ は B_n からその部分スキーム $\mathcal{A}_n$ の無限小近傍を適当に同一視することにより得られることになるが、まだ同一視のためのデータがコントロールできていない。それができれば非常に具体的な問題であるから変形が可能かどうか判定できると思われる。

もし標数0に非特異持ち上げ可能であれば $c_1^2 = 3c_2 = 9$ を満たす一般型代数曲面が得られることになるが擬射影平面であるためには更に不正則数が0でなければならない。また、もし擬射影平面であったとしてもマンフォードのものと異なるかどうかの判定も困難そうである。

参考文献

- [1] D. Knutson, Algebraic Spaces, Lecture Notes in Math. **203**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

- [2] R. Friedman, Global smoothings of varieties with normal crossings, *Ann. of Math.* **118** (1983), 75-114.
- [3] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Élément de Géométrie Algébrique*, III, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **11** (1961).
- [4] M.-N. Ishida, An elliptic surface covered by Mumford's fake projective plane, *Tohoku Math. J.* **40** (1988), 367-396.
- [5] M.-N. Ishida and T. Oda, Torus embeddings and Tangent complexes, *Tohoku Math. J.* **33** (1981), 337-381.
- [6] D. Mumford, An algebraic surface with K ample, $(K^2) = 9$, $p_g = q = 0$, in *Contribution to Algebraic Geometry*, Johns Hopkins Univ. Press, 233-244, 1979.
- [7] S. Lichtenbaum and M. Schlessinger, The cotangent complex of a morphism, *Trans. Amer. Math. Soc.* **128** (1967), 41-70.