

Pure State の Extension について

東北大 理 菊池武雄

§. Introduction.

X を partially ordered vector space とし、 N をその positive cone とする。 $0 \leq x \leq y$ $x \in X, y \in N$ ならば $x \in N$ のとき N を order ideal といい。 C^* -algebra の ideal とその dual における invariant subspace の関係や、 dual における invariant subspace と bidual (これは W^* -algebra になるが) の ideal との関係については、1960 年前後に M. Tomita [7] や E. Effros [6] によって詳しく論じられている。 U を C^* -algebra とし、 L を left ideal とする。 L の U^* における polar を L° とかけ、 L° の U^{**} における polar を $L^{\circ\circ}$ とかけば、 $L^{\circ\circ}$ は W^* -closed left ideal になる。 だから U^{**} の中に projection P が存在して、 $L^{\circ\circ} = U^{**}P$ とかける。 U^{**} におけるこのような projection を open projection といい、open projection の ortho-

complement となっている projection を closed projection という。このように定義すれば、general topology における open set と closed set のアナロジーをある程度辿ることができる [2] [3] [4]。そのような議論一般をここでは仮に、left ideal structure の議論ということにする。

論文 [1] で pure state の extension が問題とされた。そこに次の結果が述べられている。

Theorem A. (J. Aarnes and R. Kadison)

$\mathcal{U}$ を separable C^* -algebra で unit を持たせし、 ρ を $\mathcal{U}$ の pure state とする。このとき $\mathcal{U}$ の maximal abelian C^* -subalgebra A が存在して、 $\rho|_A$ は multiplicative になる。

C. Akemann は left ideal structure の議論を応用して、上の定理を次のように拡張した [3]。

Theorem B. (C. Akemann)

$\mathcal{U}$ を separable な C^* -algebra (必ずしも unit を持たない) とし、 $\{f_1, \dots, f_n\}$ を $\mathcal{U}$ の有限個の互いに orthogonal な pure state とする。このとき、 $\mathcal{U}$ の maximal abelian C^* -subalgebra A が存在して、 $f_k|_A$ ($k=1, 2, \dots, n$) は A の pure state であり、 f_k は $f_k|_A$ の

unique state extension になる。

講演前半では left ideal structure について述べ、後半で Akemann の定理に対して Remark をつけ加える。この Remark がこの講演の目的になる。

§. Theorem と Remark.

以下 Theorem 7 までは、特に断らない限り C^* -algebra $\mathcal{U}$ は unit をもつものとする。

Definition 1. $\mathcal{U}^{**}$ の projection p が open であるとは、 p に w^* -topology で収束するような $\mathcal{U}$ の positive element より成る monotone increasing な directed set $\{a_\alpha\}$ が存在するに等しい。open projection の orthocomplement を closed projection といい。

Proposition 2. projection $p \in \mathcal{U}^{**}$ が closed であるための必要十分条件は、 p が $\mathcal{U}^*$ における w^* -closed order ideal の support になっていることである。

Proposition 3. projection $p \in \mathcal{U}^{**}$ が $\mathcal{U}^{**}$ で minimal ならば、 p は closed projection である。

Proposition 4. projection $p \in \mathcal{U}^{**}$ が minimal closed ならば p は $\mathcal{U}^{**}$ で minimal である。

Proposition 5. $\{P_\alpha\}$ is closed projection
 of set Σ such that $P = \bigwedge_\alpha P_\alpha$ is closed projection
 is true.

Proposition 6. $\{P_\alpha\}$ is closed projection
 of set Σ . For any finite $P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, \dots, P_{\alpha_n}$ it holds
 that $\bigwedge_i P_{\alpha_i} \neq 0$ implies $\bigwedge_\alpha P_\alpha \neq 0$ is true.

2nd closed projection of supremum is not
 1 is closed is not true. supremum is closed
 is true for the condition is. Next is not known [2].

Theorem 7. closed projection P, Q is
 $\|P(Q - P \wedge Q)\| < 1$ is true. $P \vee Q$ is closed
 is true.

With the preparation pure state of extension is
 is. pure state of extension is true is unit
 is not true is. Below C^* -algebra $\mathcal{U}$ is unit
 of existence is not true.

$\mathcal{U}$ is unit is added to C^* -algebra is $\tilde{\mathcal{U}}$ is
 is. $\tilde{\mathcal{U}}^* = \mathcal{U}^* \otimes_{\mathbb{C}} \{\alpha \omega_0\}$, $\tilde{\mathcal{U}}^{**} = \mathcal{U}^{**} \otimes_{\mathbb{C}} \{\alpha e_0\}$
 is true is. ω_0 is $\mathcal{U}$ is vanish
 is $\tilde{\mathcal{U}}$ of state is. e_0 is $\tilde{\mathcal{U}}^{**}$ of minimal
 projection is. e_0 is locally compact set of

無限遠点に相当するものである。

Urysohn の lemma に対応する定理が成り立ち、
[4]。

Theorem 8. $\mathcal{U}$ は unit を持つ C^* -algebra
とし、 $p, q \in \mathcal{U}^{**}$ を $p, q = 0$ なる closed projection
とする。このとき $0 \leq a \leq 1$, $ap = 0$, $aq = q$ なる
ような a を $\mathcal{U}$ の中にとることもできる。

Definition 9. C^* -algebra $\mathcal{U}$ の positive
element a が strictly positive であるとは、 $0 \neq b$
の $\mathcal{U}$ の positive linear functional f に対して常に
 $f(a) > 0$ なることである。

strictly positive element については、次の結
果がある [1]。

Theorem C. (J. Aarnes and R. Kadison)
separable C^* -algebra は strictly positive
element を持つ。

これを使えば Theorem 8 はもう少し精密になる。

Remark 10. $\mathcal{U}$ が separable のとき、

Theorem 8 における a として特に $N(a) = p$,
 $N(1-a) = q$ なるようにとることもできる。ここで $N(a)$
及び $N(1-a)$ は、それぞれ a 及び $1-a$ の nullprojection

である。

Introduction で述べた Theorem B に対して
次の事実と Remark する。

Theorem 11. $\mathcal{U}$ を separable C^* -algebra とし (unit の存在は仮定しない). $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ を $\mathcal{U}$ の互いに orthogonal な pure state とする。 f_α の $\mathcal{U}^{**}$ における support を e_α とおく。このとき $\mathcal{U}$ の abelian C^* -subalgebra A が全ての $\alpha \in I$ に対して $f_\alpha|_A$ が A の pure state であり、 f_α が $f_\alpha|_A$ の unique state extension であるための必要十分条件は、任意の e_α に対して、 e_α は a の spectral projection であり、 $a e_\alpha \neq 0$ なるような a が A の中に存在するに等しい。

上の同値な条件を条件 (A) と呼ぶことにする。次の Corollary は明らかである。

Corollary 12. $\mathcal{U}$ の abelian C^* -subalgebra A が条件 (A) を満たせば、 A を含む maximal abelian C^* -subalgebra も同じ条件を満たす。

Theorem B は次の形に述べられる。

Corollary 13. 有限個の $\{f_\alpha\}$ については常に条件 (A) を満たす maximal abelian C^* -subalgebra が存在する。

§. Proofs.

(1). Remark. 10 の証明

Thm. 8 における a の spectral projection e $E(\delta)$ とする。 $r_1 = E((\frac{2}{3}, 1]) - p$ とおくと、 r_1 は open projection になる。 $\mathcal{U}$ は separable だから $r_1 \mathcal{U} r_1$ も separable である。 だから Thm C より $r_1 \mathcal{U} r_1$ には strictly positive element a_1 が存在する。 $\|a_1\| < \frac{1}{3}$ としよ。 同様にして $r_2 = E([0, \frac{1}{3})) - p$ とおくと、 $r_2 \mathcal{U} r_2$ の strictly positive element a_2 , $\|a_2\| < \frac{1}{3}$ とする。 $b = a - a_1 + a_2$ とおけば、これが求めるものであることは明らかである。

(2). Thm. 11 の証明

(十分性) e_α と任意にとる。 e_α の range には unit vector x_α ととりこれと x_α とおく。 e_α は A の spectral projection になるから、 e_α は A の任意の元と可換である。 故に A の元 t_1, t_2 に対して、 $t_1 x_\alpha = \lambda_1 x_\alpha$, $t_2 x_\alpha = \lambda_2 x_\alpha$ (λ_1, λ_2 は scalar) と表わされる。 $f_\alpha(t_1, t_2) = \langle t_1 t_2 x_\alpha, x_\alpha \rangle = \lambda_2 \langle t_1 x_\alpha, x_\alpha \rangle = \lambda_2 \cdot \lambda_1 = f_\alpha(t_1) \cdot f_\alpha(t_2)$ 他方 $a e_\alpha \neq 0$ であるから $f_\alpha|_A$ は pure state である。

次に U の state g が $f_\alpha|A$ の extension であることを示す。 U の universal enveloping von Neumann algebra であることを unit vector y が存在して
 $g(b) = \langle by, y \rangle \quad b \in U$ とかける。 e_α は closed projection k から $\exists \{a_n\} \subset A, 0 \leq a_n \leq 1, a_n \downarrow e_\alpha$ であることを。
 $\langle a_n y, y \rangle = g(a_n) = f_\alpha(a_n) = 1$ 故に
 $\langle e_\alpha y, y \rangle = 1 \quad \therefore y \in \text{range } e_\alpha \quad e_\alpha$ は minimal projection k から $g = f_\alpha$ によって示される。

(必要性) U が unit を持たない場合について示す。これは十分である。 U に unit を添加した C^* -algebra $\tilde{U} \subset L$ 。同様に A に対して $\tilde{A}$ とする。明らかに $\tilde{A}^{**} \subset \tilde{U}^{**}$ である。 $f_\alpha|_{\tilde{A}^{**}}$ の $\tilde{A}^{**}$ における support $\tilde{e}_\alpha \in \tilde{A}^{**}$ とおく。 e_α は $\tilde{A}$ の同じ closed から $e_\alpha \leq \tilde{e}_\alpha$ である。 $f_\alpha|_{\tilde{A}}$ は pure state であることを e_α は minimal projection であることを。 $\tilde{A}^{**}$ の無限遠点 $\tilde{N}$ とおく。明らかに $\tilde{N} \cdot \tilde{e}_\alpha = 0$ 。故に Thm. 8 及びその Remark を使えば $\exists a \in \tilde{A}, 0 \leq a \leq 1, a \cdot \tilde{N} = 0, a \cdot \tilde{e}_\alpha = \tilde{e}_\alpha$ から e_α は $1-a$ の null projection になっているから $a \neq 0$ となる。 $a \cdot \tilde{N} = 0$ から k から $a \in A$, $a \neq 0$ e_α が null

projection となっている。 e_α は a の spectral projection となっている。 故に $e_\alpha = e_\alpha$ が示されれば証明が終る。 $e_\alpha \neq e_\alpha$ とすれば $\text{range}(e_\alpha - e_\alpha)$ の中から unit vector x_α をとる。 $f_\alpha(a) = \langle ax_\alpha, x_\alpha \rangle$ $a \in \mathcal{U}$ とおく。 f_α は $\mathcal{U}$ の state である。 しかもこれは $f_\alpha|_A$ の extension となっている。 $\alpha = 1$ かつ

$f_\alpha(e_\alpha) = 1$, $f_\alpha(e_\alpha) = 0$ には extension が unique であるという仮定が効く。 $\therefore e_\alpha = e_\alpha$

(3). Cor. 13 の証明

$\{f_1, \dots, f_m\}$ の support は $\{e_1, \dots, e_m\}$ である。
 $\Rightarrow$ の orthogonal closed projection $e_1 \leq \bigvee_{i=2}^m e_i$ に対して Remark 10 を使う。 $e_1 \neq 1$, $\bigvee_{i=2}^m e_i \neq 0$ なるように a_1 をとる。 a_1 の spectral projection は $E_1(a_1)$ である。 $\Rightarrow$ の orthogonal closed proj. $e_1, E_1([0, \frac{1}{2}])$ に対して Remark 10 を使う。 $e_1 \neq 1$, $E_1([0, \frac{1}{2}]) \neq 0$ なるように a_1' をとる。 次に $e_2, E_2([0, \frac{1}{2}]) \vee (\bigvee_{i=3}^m e_i)$ に対して Remark 10 を使い、 $e_2 \neq 1$, $E_2([0, \frac{1}{2}]) \vee (\bigvee_{i=3}^m e_i) \neq 0$ なるように a_2 をとる。 同様に、前と同じことをくり返して、 a_2' をとる。 これを m 回くり返して、 $a_1', a_2', \dots, a_m'$ を

得る。 $a_1, \dots, a_n$ は互いに orthogonal である。
 これらによって generate される abelian C^* -subalgebra
 を A とおくと、これが Thm. 11 の条件 (A) を
 満たしていることは明らかである。 A を含む maximal
 abelian C^* -subalgebra を B とおくと、これは B を含む
 である。

参考文献

1. J. Aarnes and R. Kadison, Pure state and approximate identities, Proc. Amer. Math. Soc. 21('69)
2. C. Akemann, The general Stone-Weierstrass problem, to appear.
3. / , Approximate units and maximal abelian C^* -subalgebras, to appear
4. / , Left ideal structure of C^* -algebras, to appear
5. J. Dixmier, Les C^* -algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris, '64.
6. E. Effros, Order ideals in a C^* -algebra and its dual, Duke Math. J., 30('63)
7. M. Tomita, Spectral theory of operator algebras, I, Math. J. Okayama Univ. 9('59)