

Minimal Set の基本群について

慶応大・理工, 石井 一平

§1. 準備

M を 3次元閉多様で, $H^1(M; \mathbb{R})$ は自明であるとする。
さらに, M は *minimal flow* (= すべての軌道が M 上稠密であるような flow) を許容するものとする。以下では, このような性質をもつ M について, その基本群の持つ特性を調べる。ここで, 以下に使われる記号をまとめておく。

I) ξ_t : M 上の *minimal flow*.

II) Σ : ξ_t に接する $\text{codim}-1$ open submanifold

ハ) $T_\Sigma(x) = \inf \{ t > 0 \mid \xi_t(x) \in \Sigma \}$

$$\hat{T}_\Sigma(x) = \xi_{T_\Sigma(x)}(x) \quad ; \quad x \in M$$

ニ) $A_\Sigma = \{ x \in \partial \Sigma \mid \hat{T}_\Sigma(x) \in \partial \Sigma \}$

$$A_\Sigma^* = A_\Sigma \cup \hat{T}_\Sigma(A_\Sigma)$$

ホ) $B_\Sigma = \{ x \in \partial \Sigma \mid \hat{T}_\Sigma(x) \in \Sigma, \hat{T}_\Sigma^2(x) \in \partial \Sigma \}$

$$B_\Sigma^* = B_\Sigma \cup \hat{T}_\Sigma^2(B_\Sigma)$$

(A_Σ, B_Σ は有限集合で, $\hat{T}_\Sigma(\partial\Sigma) \cap \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma) = \hat{T}_\Sigma(B_\Sigma)$ と仮定して一般性を失わない。)

$$\wedge) \quad \nu_0 = \nu_0(\Sigma) = \#A_\Sigma + \#B_\Sigma$$

$$\nu_1 = \nu_1(\Sigma) = \#(A_\Sigma^* \cup B_\Sigma^*)$$

$$\nu_2 = \nu_2(\Sigma) : \Sigma - (\hat{T}_\Sigma(\partial\Sigma) \cup \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma)) \text{ の連結成分の個数}$$

$$\nu_3 = \nu_3(\Sigma) : \Sigma - \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma) \text{ の連結成分の個数}$$

ト) C_ℓ ($\ell=1, \dots, \nu_1$), D_m ($m=1, \dots, \nu_2$), E_n ($n=1, \dots, \nu_3$) はそれぞれ $\partial\Sigma - (A_\Sigma^* \cup B_\Sigma^*)$, $\Sigma - (\hat{T}_\Sigma(\partial\Sigma) \cup \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma))$, $\Sigma - \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma)$ の連結成分を表わす。(これらの番号付は固定されているものとする。)

$$\text{チ) } Y_0(\Sigma) = \partial\Sigma \cup \{ \xi_t(a) \mid a \in A_\Sigma, 0 \leq t \leq T_\Sigma(a) \} \\ \cup \{ \xi_t(b) \mid b \in B_\Sigma, 0 \leq t \leq T_\Sigma(b) + T_\Sigma(\hat{T}_\Sigma^{-1}(b)) \}$$

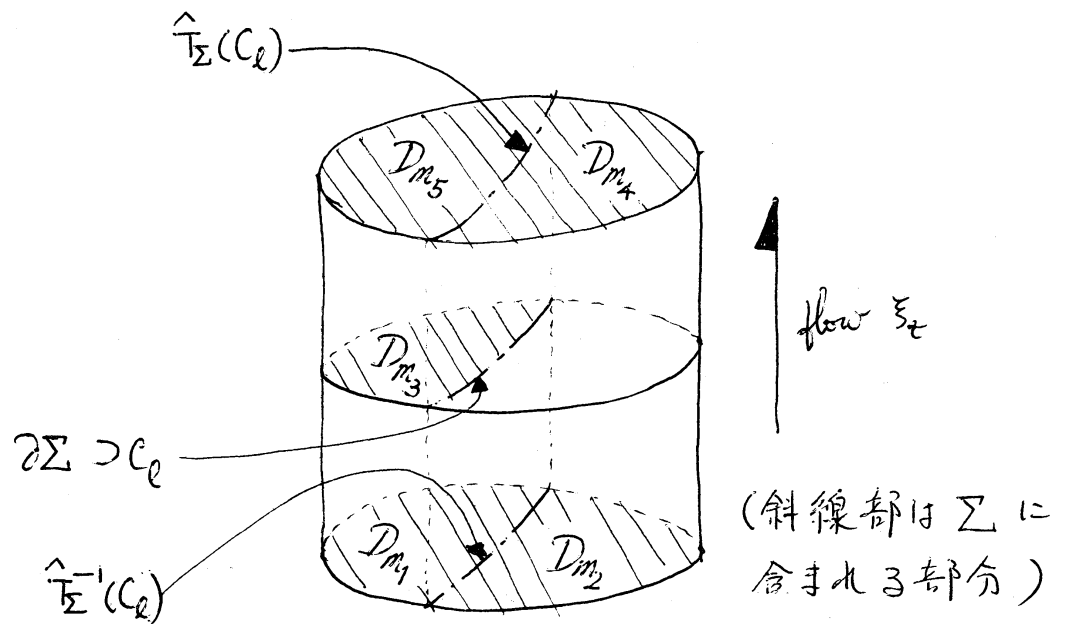
リ) $\{1, \dots, \nu_1\}$ の部分集合 J に対して

$$Y(\Sigma; J) = Y_0(\Sigma) - \left(\bigcup_{\ell \in J} C_\ell \right)$$

と定義する。

§2. $\pi_1(M - Y(\Sigma; J))$ について.

まず各 C_ℓ ($1 \leq \ell \leq \nu_1$) に対して, D_{m_j} ($m_j = m_j(\ell)$, $j=1, 2, 3, 4, 5$) を, 下の [Fig.] のように定める。次に $H = (H_1, H_2, \dots, H_{\nu_2}) \in (SL(2; \mathbb{C}))^{\nu_2}$ に対し,



[Fig.]

$$G_\ell(H) \in SL(2; \mathbb{C}) \text{ を}$$

$$G_\ell(H) = H_{m_4}^{-1} H_{m_5} H_{m_3} H_{m_1} H_{m_2}^{-1}$$

$$(m_j = m_j(\ell))$$

と定義する。さらに $V(\Sigma; J) \subset (SL(2; \mathbb{C}))^{1/2}$ を

$$V(\Sigma; J) = \{H; G_\ell(H) = 1 \text{ for } \ell \in J\}$$

とする。—

$$Q(\Sigma; J) = \text{Hom}(\pi_1(M - Y(\Sigma; J)), SL(2; \mathbb{C}))$$

とすると、 $V(\Sigma; J)$, $Q(\Sigma; J)$ はそれぞれ $\mathbb{C}^{4^{1/2}}$, $\mathbb{C}^{4r}$ (r は $\pi_1(M - Y(\Sigma; J))$ の生成元の個数) の中の代数的集合

と考えられる。ここで Σ は次の仮定をみたすものとする。

$$\text{仮定. I. } H^1(D_m; \mathbb{R}) = H^1(E_n; \mathbb{R}) = \{0\} \\ (1 \leq m \leq \nu_2, 1 \leq n \leq \nu_3)$$

このとき、次が成り立つ。

$$\text{命題. A. } \dim Q(\Sigma; J) + 3(\nu_3 - 1) = \dim V(\Sigma; J)$$

$M = S^3$ とすると、 $\pi_1(M - Y(\Sigma; J))$ が free group となることがある。この場合には、 $\dim Q(\Sigma; J) = 3 \dim H^1(Y(\Sigma; J); \mathbb{R})$ であるから、命題 A により、 $\dim V(\Sigma; J) = 3 \dim H^1(Y(\Sigma; J); \mathbb{R}) + 3(\nu_3 - 1)$ とする。そこで次の仮定を設ける。

仮定. II. $V(\Sigma; J)$ は次の (i), (ii) を満たす成分 V_0 をもつ。

- (i) $\dim V_0 > 3 \dim H^1(Y(\Sigma; J); \mathbb{R}) + 3(\nu_3 - 1)$
- (ii) ある $H = (H_1, \dots, H_{\nu_2}) \in V_0$ に対し、各 H_j は対角行列。

Σ, J が仮定 I および II を満たすとき、次のことが示される。

命題.B. $Y(\Sigma; J)$ を $M-\pi^*(\Sigma; J)$ の中で連続的に変形して得られる任意の 1-次元 cell complex K に対し

$$\dim(\text{Hom}(\pi_1(M-K), SL(2; \mathbb{C}))) > 3 \dim H^1(K; \mathbb{R})$$

が成り立つ。但し、 $\pi^*(\Sigma; J)$ は下に定義される集合で、"連続的変形"とは $[0, 1] \times Y(\Sigma; J) \rightarrow (M-\pi^*(\Sigma; J))$ なる連続写像

f で、 $f(0, x) \equiv x$ を満たすものによって、 $f(1, Y(\Sigma; J)) = K$ と表わされることである。

以下 π^* を定義する。 $J = \{l_1, \dots, l_s\}$ とし、各 $l_j \in J$ に対し $p_j \in C_{l_j}$ をとり、 $P = \{p_j, \hat{T}_\Sigma(p_j), \hat{T}_\Sigma^{-1}(p_j) \mid j=1, \dots, s\}$, $P \cap \partial D_m = \{q_1^m, \dots, q_{k_m}^m\}$ とする。そして、 γ_j^m ($j=1, \dots, k_m-1$) は、 q_j^m と q_{j+1}^m とを D_m 内で結ぶ連続曲線とし、 $\gamma^m = \bigcup_{j=1}^{k_m-1} \gamma_j^m$, $\Gamma = \bigcup_{m=1}^{\nu_2} \gamma^m$ ($P \cap \partial D_m = \emptyset$ のときは、 $\gamma^m = \emptyset$ とする。) と定義する。さらに、 $\pi = \pi(\Sigma, J; \Gamma)$ を

$$\pi = \{ \xi_t(x) \mid x \in \Gamma, -T_\Sigma(\hat{T}_\Sigma^{-1}(x)) \leq t \leq T_\Sigma(x) \}$$

と定め、 $\Xi(\subset \Sigma)$ を

$$\Xi = \{ x \in \Sigma - \pi \mid x \text{ を含む } \Sigma - \pi \text{ の連続成分は、} \partial \Sigma \text{ と交わる, あるいは } \hat{T}_\Sigma(\partial \Sigma) \text{ と } \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial \Sigma) \text{ との両方に交わる.} \}$$

と定める。このとき、 $\pi^* = \pi^*(\Sigma, J; \Gamma)$ は、

$$\pi^* = \pi \cup (\Sigma - \Xi)$$

と定義される集合である。(命題 B 中の π^* はここに定義されたもので、実際には、 Γ のとりえにも依存する。)

[注]. 仮定 I, II を満たす Σ および J の存在は証明できる。

§3. $M = S^3$ の場合.

$M = S^3$ で、 Σ, J は仮定 I, II を満たすとする。このとき、命題 B によれば、 $Y(\Sigma; J) \in M - \pi^*$ の中で K に変形して、 $\pi_1(M - K)$ が free group であるようにはいできない。
 一方、 $M = S^3$ であるから、 M の中では、 $Y(\Sigma; J) \in K'$ に変形して、 $\pi_1(M - K')$ が free となるようにすることができ、すなわち、 π^* がこのような変形を阻害している。

そこで、" S^3 上に minimal flow が存在するか?" (存在しないという予想が一般的である。) という問題を考えるとき、仮定 I, II を満たし、何らかの意味で π^* が最小になるような Σ, J を考え、その満たすべき性質を調べることに有効であると思われる。

π^* の大きさを測る量としては、

$$\lambda(\Sigma; J) = 3 \times (\#J) - \#\{D_m \mid \mathbb{I} \cap \partial D_m \neq \emptyset\}$$

のようなものが考えられる。仮定 I, II を満たし、この $\lambda(\Sigma; J)$ を最小にするような Σ, J については、いくつ

かの特性をもつことが示される。上記の問題を考える~~為~~には、
"これらの特性が、*minimal flow* の存在と両立し得るか?" と
いうことを調べなければならぬ。