

On standard involutions

北大・理 神島芳宣

Introduction

この論文において, $(2n-1)$ 次元 *homotopy spheres* 上の *fixed point free smooth involutions* を調べる. López De Medrano, Orlik 及び北田により, bP_{2n} ($n \geq 3$) の各元は *free involutions* をもつことが知られている. ここで bP_{2n} は *parallelizable mfd's* を bound する $(2n-1)$ -homotopy spheres のつくる群である. bP_{2n} の各元に対し *actions* が存在する時, 次にそれらがどのように分類されるかが問題となる. 我々は次の *involutions* を考えることにより, この問題に approach する.

T を *homotopy sphere* $\Sigma^{2n-1} \in bP_{2n}$ ($n \geq 3$) 上の *free involution* とする. もし Σ が bound する parallelizable mfd M^{2n} が存在し, T が M 上に

isolated fixed points をもつ involution に 拡張 する
時, (T, Σ) を standard involution とよぶ。

主張は次の通りである。

『homotopy $(4k-1)$ -spheres 上の standard involutions の explicit な description を与え,
それらによって, standard involutions が分類される』

分類に対しては, 若干の free involutions に対する
結果及び, $KO^{-1}(P^n)$ -等に対する知識を仮定
するために, 最初の motivation が見失うことがないよう
省略させてもらう (詳細は [2] を参照されたい)。
ここでは, 主張の前半である, standard involutions
の explicit な models を与えることに専念する。

1. Geometric models

"Equivariant plumbing technique" により
standard involutions の例が構成される。Milnor
による plumbing theory は, F. Hirzebruch-M. Mayer

, W.C.-W.Y. Hsiangs 等により, "equivariant plumbing theory" に拡張された. しかしながら, ここで扱う plumbing は最初に S. Weintraub [3] により motivate された それによる. 一般に homotopy sphere Σ に free involution が与えられ, それが Σ が bound する M に拡張したとしても "unique" に拡張するとは限らない. 従って, 構成に対して我々は

"uniform way" で M 上の $\mathbb{Z}_2$ -actions をつくることが必要である. この時, M 上の actions に対する invariants — 例えは, Atiyah-Singer invariants, Spin invariants, Eells-Kuiper μ -invariants, Signatures — は (T, Σ) の分類に関し 2 情報を与えてくれる.

Notation. $D^n(S^{n-1})$ を, $\mathbb{Z}_2$ -action, $t(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$ をもつ $\mathbb{R}^n$ の中の unit disk (sphere) とする. S^n を, S^{n-1} の suspension, i.e., $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ に於ける unit sphere 上の $\mathbb{Z}_2$ -action, $t(x_1, \dots, x_n, y) = (-x_1, \dots, -x_n, y)$ をもつものとする.

Lemma 1.1. 任意の integer $n \geq 3$ に対し, Semi-free $\mathbb{Z}_2$ -actions T をもつ S^n 上の D^n -bundles E (特に, E_+ , E_0 and E_-) が存在して次を満たす.

(1) T は 0-section を preserve する bundle map である.

(2) 0-section 上の the action T は, 上の action をもつ S^n であり, T は 0-section の外では fixed pts をもたない.

(3) E は two isolated fixed pts をもち, それらの各 normal representation は, 上の (diagonal) action をもつ $D^n \times D^n$ である.

(4) $n = 2k$ ならば, E_+ , E_0 及び E_- の Euler class χ は, それぞれ, 2 , 0 and $-2 \pmod{\text{any multiple of 4-times}}$ をとる (特に, 偶数の必要性的のために, E_+ と E_- を区別する).

(5) $n = 2k+1$ ならば, E_+ と E_- は S^{2k+1} 上の tangent disk bundles であり, E_0 は trivial bundle である.

(6) これらの bundles は stably trivial である.

証明. 証明は E_+ に対してする. E_- , E_0 もこれに同様である. $d: S^n \longrightarrow S^n \times S^n$ を diagonal embedding とする. 上の action のもとで invariant である. $H_n(S^n \times S^n) = \langle \alpha \rangle + \langle \beta \rangle$ とおく. 任意の $\ell \in \mathbb{Z}$ に対し, $S^n \times S^n$ の free part の中で $|\ell|$ -embedded spheres S^n 's をとり, 各 embedded sphere は homology 上 β を表わすようにする. この時, embedding $d(S^n)$ と $|\ell|$ -embedded spheres S^n 's との equivariant connected sum をとり, これの equivariant normal bundle,

$$d(S^n) \#_{\mathbb{Z}_2} |\ell| S^n \hookrightarrow S^n \times S^n,$$

をとることにより, action に関して invariant な S^n 上の stably trivial normal bundle E_+ がある (Figure 1). E_+ は Euler class,

$$\begin{aligned} \chi(E_+) &= (\alpha + (2\ell+1)\beta) \cdot (\alpha + (2\ell+1)\beta) \\ &= 2 + 4\ell \quad \text{である.} \end{aligned}$$

明らかに (1), (2), (3) をみたす.

- 次, E_- , E_0 に対しては, $g: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ を $g(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ とおくことにより, equivariant diffeomorphism を定める. この時, $\mathbb{Z}_2$ -action をもつ sphere を,

$$S_1^n = D^n \bigcup_{\mathbb{Z}_2} D^n$$

により定ぎする (もちろん, S^n と同じものである).

この時, equivariant embeddings

$$d' : S_1^n \longrightarrow S_1^n \times S_1^n$$

and

$$\tau : S_1^n \longrightarrow S_1^n \times S^n$$

をそれぞれ

$$d'((x_1, \dots, x_n, y)) = ((x_1, \dots, x_n, y), (-x_1, x_2, \dots, x_n, y))$$

$$\tau(z) = (z, z_1) \quad , \quad (x_1, \dots, x_n, y), z \in S_1^n$$

, z_1 は S^n の一つの fixed point. これらを使うと, 上と同様なことをすることにより, E_-, E_0 がつくられる.

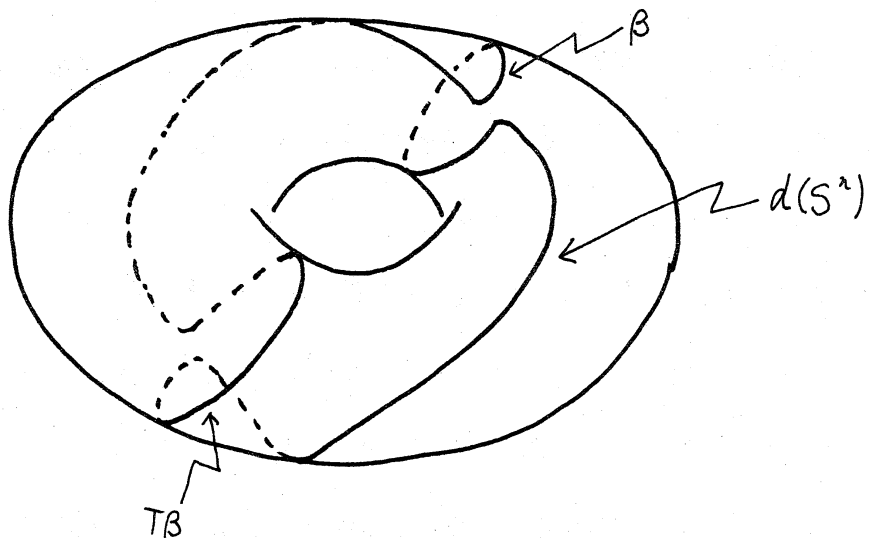


Figure 1 ($\ell=1$).

次にこれらの bundle を使って, plumbing した
 時の manifold に対する "normal cobordism" をつくる
 (*normal cobordism 等の説明は省くため, 以下

lemma 1.2 ~ 1.4 は, とはして, 直接 Prop. 1.5 から
 読むことができるように, Prop. 1.5 において, 西に處 (と書く)

N_1, N_2 を E における 2 つの fixed points
 の equivariant tubular neighborhoods とする. これは
 Lemma 1.1 の (3) における $D^n \times D^n$ の中に含まれるように
 しておく.

$$W^{2n} = (E - \text{int}\{\bigcup_{i=1}^2 N_i\})/\Gamma \text{ とおく}$$

($E = E_+$ ならば $W = W_+$ などと書く).

Lemma 1.2. W は $\partial E/\Gamma \simeq \{\bigcup_{i=1}^2 \partial N_i/\Gamma\}$

との "normal cobordism" を定数する, i.e.,

normal map $H: W \longrightarrow P^{2n-1}$ が存在し, 一つの

bundle map $b: \nu_W \longrightarrow \nu_P$ により covered

される. ここで ν_W, ν_P は W, P^{2n-1} の stable normal

bundles である. さらに, boundary components の

inclusion maps を, みる時, $H|_{(D^n \times D^n - \text{int } N_i)/\Gamma}$

: $D^n \times D^n - \text{int } N_i/\Gamma \longrightarrow P^{2n-1}$ 及び $H_- = H|_{\partial N_i/\Gamma}$

: $\partial N_i/\Gamma \longrightarrow P^{2n-1}$ は次の通りである.

W	$(H D^n \times D^n - \text{int } N_i / T, D^n \times D^n - \text{int } N_i / T)$	$(H \partial N_i / T, \partial N_i / T)$
W_+	$(Pr(1 \times 1), D^n \times D^n - \text{int } N_i / T)_{i=1,2}$	$(1 \times 1, P^{2n-1})_{i=1,2}$
W_0	$(Pr(1 \times 1), D^n \times D^n - \text{int } N_1 / T)$	$(1 \times 1, P^{2n-1})_{i=1}$
	$(Pr(1 \times 1), D^n \times D^n - \text{int } N_2 / T)$	$(C \times 1, P^{2n-1})_{i=2}$
W_-	$(Pr(1 \times C), D^n \times D^n - \text{int } N_1 / T)$	$(1 \times C, P^{2n-1})_{i=1}$
	$(Pr(C \times 1), D^n \times D^n - \text{int } N_2 / T)$	$(C \times 1, P^{2n-1})_{i=2}$

ここで C は, $\text{map } \tilde{C} : D^n \longrightarrow D^n$,

$\tilde{C}(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$ により induce された
orientation reversing diffeomorphism である.

Note. H は degree 1 map ではない.

証明. D^{n+1} を R^{n+1} における unit disk

とし, the Z_2 -action を $t(x_1, \dots, x_n, y) = (-x_1, \dots, -x_n, y)$

により定める. S^n の fixed points は $Z_1 = (\bar{0}, 1), Z_2 = (\bar{0}, -1)$

. $\bar{0} = (0, \dots, 0) \in R^n$. この時, E の construction から

次の equivariant embedding がある.

$$E = \text{int} \left\{ \bigcup_{i=1}^2 N_i \right\} \subset D^{n+1} \times D^{n+1} - (\bar{0} \times D^1) \times (\bar{0} \times D^1) \\ \cong (D^n \times D^n - \bar{0} \times \bar{0}) \times D^2.$$

上において, D^2 -part における action は trivial である.
従って, quotient spaces への embedding

$$(1) \quad W \subset P^{2n-1} \times I \times D^2$$

を induce し, trivial normal bundle をもつ. 従って, normal bundle ν_W は, P^{2n-1} のそれから induce される. 故に W は "normal cobordism" を定数する. 即ち normal map $H: W \longrightarrow P^{2n-1}$ が存在して, bundle map $b: \nu_W \longrightarrow \nu_P$ によって cover される. boundary components の inclusion maps を注意することにより, E_+, E_0, E_- のそれぞれに対して, 上の表を得る.

上の bundles が equivariantly に plumbed される時, できた manifold の normal cobordism は上の lemma における normal cobordism の各 block より得られることを示す.

Lemma 1.3. E^i 's が, それぞれの fixed point のまわりで, 次々と equivariantly plumbed されたとする. この結果, できた $\mathbb{Z}_2$ -action T をもつ manifold を M' とする. M' における fixed points の equivariant neighborhoods を $N(pts)$ とする, 従ってこれらは, lemma 1.2 におけるような $N_i, i=1,2$ の union である. この時, cobordism $V' = (M' - \text{int } N(pts))/T$ は normal cobordism $G' : V' \longrightarrow P^{2n-1}$ between $\partial M'/T$ and $\bigcup_i \{\partial N_i/T, i=1,2\}$ (これは fixed point set を動く), を定ぎし, 一つの bundle map $b' : \mathcal{U}_{V'} \longrightarrow \mathcal{U}_P$ により cover される.

上の lemma のもとで, さらに次のことが成立する

Lemma 1.4. もし, さらに, M' における action の free part において, equivariant plumblings をするならば, として M により, その結果の manifold を定ぎすれば, この時, resulting cobordism

$$V = (M - \text{int } N(pts))/T$$

は, normal cobordism $G : V \longrightarrow P^{2n-1}$

between $\partial M/\Gamma$ and $\bigcup_{\emptyset} \{\partial N_i/\Gamma, i=1,2\}$ を定めます.

G は, boundary components 上 変わらない, i.e.,

$$G|_{\bigcup_{\emptyset} \{\partial N_i/\Gamma, i=1,2\}} = G'|_{\bigcup_{\emptyset} \{\partial N_i/\Gamma, i=1,2\}}.$$

証明 (lemma 1.3).

Lemma 1.1 の

normal representations また lemma 1.2 の ε の上
の normal maps は equivariantly に plumb する方法を
与える. 即ち, $\Rightarrow$ の spaces $D^n \times D^n$ は map

$$h: D^n \times D^n \longrightarrow D^n \times D^n, \quad h(x, y) = (y, x) \text{ により}$$

equivariantly diffeomorphic である. quotient spaces 上

の plumbing を考える時, E^1 と E^2 を $\rightarrow$ の fixed point で
equivariantly に plumb することは, (我々は, このことが

$z_2 \in N_2 \subset E^1$ と $z_1 \in N'_1 \subset E^2$ で行われると仮定す

$$\text{る}) \longrightarrow (E^1 - \text{int}\{N_1 \cup N_2\}/\Gamma) \cup (E^2 - \text{int}\{N'_1 \cup N'_2\}/\Gamma)$$

ととり, $(D^n \times D^n - \text{int } N_2)/\Gamma$ と $(D^n \times D^n - \text{int } N'_1)/\Gamma$ とを,

h より induce される map h' により identify することと同

値である. もし E^1 と E^2 が上のよりに plumb される時

その manifold を M' とおくと, resulting cobordism V'

は $V' = (M' - \text{int}\{N_1 \cup N_2 \cup N'_2\})/\Gamma$ である. ここで

$N'_1 \subset E^2$ は $N_2 \subset E^1$ と identify されている.

この時, lemma 1.2 における表を較べることにより次の diagram は commutative である

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} (D^n \times D^n - \text{int } N_2)/T & \xrightarrow{H} & P^{2n-1} \\ \downarrow h' & & \downarrow h' \\ (D^n \times D^n - \text{int } N_1')/T & \xrightarrow{H'} & P^{2n-1} \end{array}$$

さらに表における H の形と normal cobordism の construction から, (1) は H を cover する stable normal bundles の bundle maps b と compatible である. 故に, V' は $\partial M'/T$ と $\{\partial N_1/T \cup \partial N_2/T \cup \partial N_2'/T\}$ との間 normal cobordism を定ぎする. さらに bundles が fixed point のまわりで plumb される時, 上のことが成り立つから, このように続け, 我々は結果を得る.

証明 (lemma 1.4). M' において, action の free part でさらに equivariantly plumb する. このことは, 二つの spaces $D_1^n \times D_1^n \subset V'$ として, $D_1 \times D_1$ と $D_2 \times D_2$ を map $h: D_1 \times D_1 \rightarrow D_2 \times D_2$, $h(x, y) = (y, x)$ により identify することによって

なされる. Lifting は この cover M' において

2-plumbings を与える. この manifold を M において

定式する. もし, $(G', b') : V' \longrightarrow P^{2n-1}$ を

lemma 1.3 における一つの normal map とするならば,

homotopy extension theorem を使って,

$$G' | D_1 \times D_1 = (G' | D_2 \times D_2) \cdot h \quad \text{となるように}$$

arrange することが出来る. さらにこれは boundary

components $\bigcup_i \{ \partial N_i / \Gamma, i=1,2 \}$ 上 変えることなしに

出来る. V を $D_1 \times D_1$ と $D_2 \times D_2$ とが h により identity

された時の cobordism とすると, $V = (M - \text{int } N(\text{pts})) / \Gamma$

である. 上の compatibility は, 一つの map $G :$

$$V \longrightarrow P^{2n-1} \text{ を与える. この時, } h \text{ を cover する}$$

$$\nu_{V'} | D_1 \times D_1 \text{ と } \nu_{V'} | D_2 \times D_2 \text{ との間で bundle}$$

equivalence を選んで, bundle covering homotopy

$$\text{theorem を使って, } b' | (\nu_{V'} | D_1 \times D_1) \text{ と } b' | (\nu_{V'} | D_2 \times D_2)$$

とが compatible になるように arrange する. その結果,

$$\text{これは一つの bundle map } b : \nu_V \longrightarrow \nu_P \text{ を与える.}$$

故に $G : V \longrightarrow P^{2n-1}$ は normal cobordism である.

action の free part で さらに plumbings を

する時, 各 step ごとに 上の議論を続けることにより

結果を得る.

以上の lemmas を使って $(4k-1)$ -次元の standard involutions の例をつくる。

(注意. Lemma 1.2 の上で述べたように, 次の proposition において, $\square_1$ は, Lemma 1.2~1.4 からの結果である, 従って, この部分に対応する直観的な図なうびに証明 $\square_1$ をつけ加えておく。(本質的なことは, 分類のために, normal cobordisms を用いたことである).)

Proposition 1.5. Σ_1 を bP_{4k} ($k \geq 2$) の generator とする. この時, 任意の $\ell \geq 1$ に対し, standard involutions の次のような例がある. (次頁参照)

証明. m を positive integer. 次の, unimodular, even, symmetric matrices with the rank $8m$ (その index も $8m$) を導入する

$$H_m^+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 2 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 4m+1 \\ 0 & & & & 4m+1 & 2m(8m+3) \end{pmatrix}, \quad H_m^- = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 2 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 4m-1 \\ 0 & & & & 4m-1 & 2(8m^2-5m+1) \end{pmatrix}.$$

Table 1

Type	(A, S^{4K-1})	$(T_{2\ell-1}^-, \sum_{(2\ell-1, 2)}^{4K-1})$	$(T_{2\ell-1}^+, \sum_{(2\ell-1, +)}^{4K-1})$	$(T_{2\ell}^-, \sum_{(2\ell-)}^{4K-1})$	$(T_{2\ell}^+, \sum_{(2\ell, +)}^{4K-1})$
Browder - Livesay invariant	0	$2\ell-1$	$2\ell-1$	2ℓ	2ℓ
Normal cobordism class	(P, id) $P = P^{4K-1}$	$(8(2\ell-1)-1)(P, id)$	$(8(2\ell-1)+1)(P, id)$	$(8(2\ell)+1)(P, id)$	$(8(2\ell)-1)(P, id)$
Spin invariant mod 2^{2K}	± 1	$\pm(8(2\ell-1)-1)$	$\pm(8(2\ell-1)+1)$	$\pm(8(2\ell)+1)$	$\pm(8(2\ell)-1)$
Matrix rank	—	$H_{2\ell-1}^-$ $8(2\ell-1)$	$H_{2\ell-1}^+$ $8(2\ell-1)$	$H_{2\ell}^-$ $8(2\ell)$	$H_{2\ell}^+$ $8(2\ell)$
Differentiable structure	S^{4K-1}	$(2\ell-1)\Sigma_1$	$(2\ell-1)\Sigma_1$	$2\ell\Sigma_1$	$2\ell\Sigma_1$

簡単に上の matrices を

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & 2 & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & 2 & b \\ & & & b & a \end{pmatrix}$$

とかくと, 次の通り.

$$a \equiv \begin{cases} 0 \ (4), & H = H_{2\ell}^+, H_{2\ell-1}^- \\ 2 \ (4), & H = H_{2\ell-1}^+, H_{2\ell}^- \end{cases},$$

$$b \equiv 1 \ (2).$$

Lemma 1.1 から 次の bundles をとる

E^i , $i=1, \dots, 8m-1$, 各 Euler class は 2.

E^{8m} , その Euler class は a .

これらの E^i を fixed point で equivariantly に plumb する.

その結果できる manifold を M' とすると, これは,

plumbing matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & 2 & 1 \\ & & & 1 & a \end{pmatrix}$ を実現する

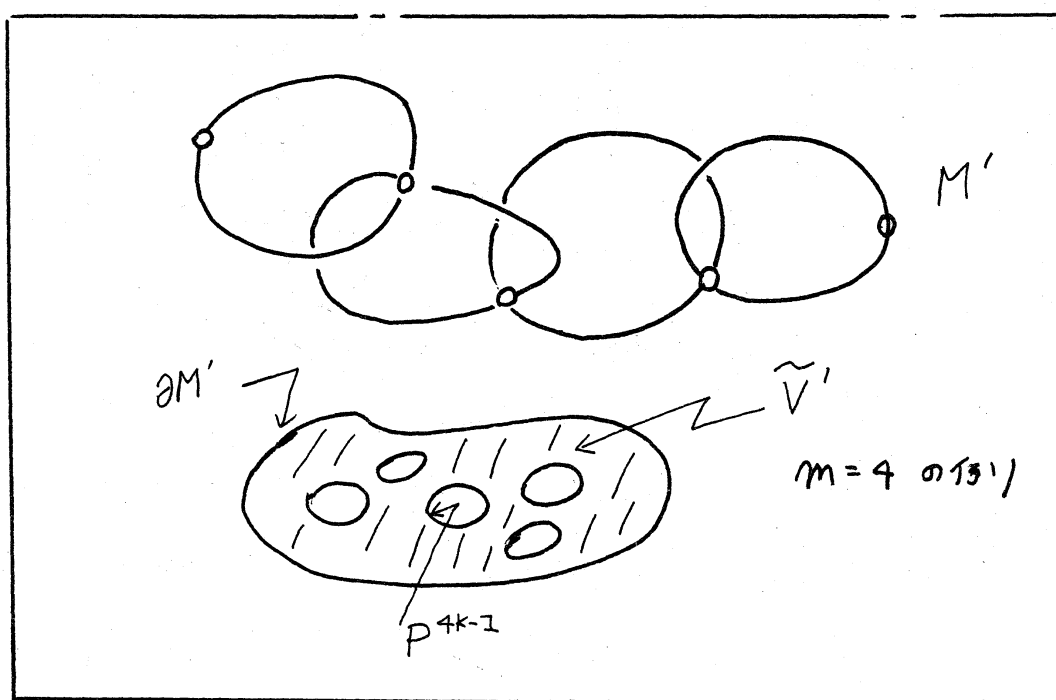
(注意 $H_{2k}(M'; \mathbb{Z})$ 上の intersection pairing が上の matrix であることを意味する.)

この時, cobordism $V' = (M' - \text{int}((8m+1)\text{pts}))/\sim$ は
 lemma 1.2 と 1.3 により, normal cobordism $G' : V' \rightarrow P^{4k-1}$ between $\partial M'/\sim$ and

$$\begin{cases} (8m+1)(P^{4k-1}, \text{id}) & \text{if } a \equiv 2(4) \\ (8m)(P^{4k-1}, \text{id}) \cup (P^{4k-1}, c \times 1) & \text{if } a \equiv 0(4) \end{cases}$$

が存在する

1



1

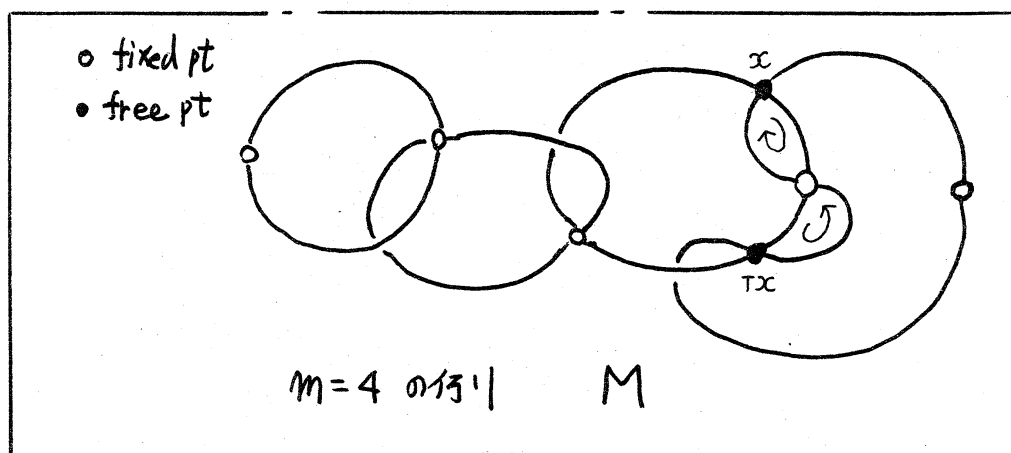
さらに H を実現するために equivariant plumbing をする
 従って, 一つの Z_2 -action をもつ manifold with boundary
 M ができる.

Lemma 1.4 により normal map $G: V = (M - \text{int} N, (8m+1)\text{pts}) / \mathbb{Z}_2 \longrightarrow P^{4k-1}$ between $\partial M / \mathbb{Z}_2$ and

$$\begin{cases} (8m+1)(P^{4k-1}, \text{id}) & \text{if } a \equiv 2(4) \\ (8m)(P^{4k-1}, \text{id}) \cup (P^{4k-1}, c \times 1) & \text{if } a \equiv 0(4) \end{cases}$$

が存在する

(2)



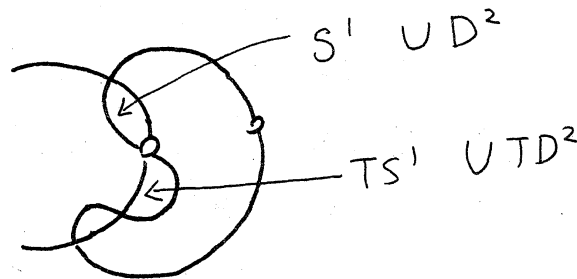
(2)

一方, plumbing theory から 次のことが成り立つ
 M は connected. $\pi_1(\partial M) \cong \pi_1(M)$ is free.
 $H_i(\partial M) = H_i(M) = 0$, $1 < i < 2k-1$, $H_{2k-1}(M) = 0$.

$(G_+, \partial V_+) = (f', \partial M / \mathbb{Z}_2)$ とおく. 明らかに $\pi_1(f') = 0$.
 $\pi_2(f') = \text{Ker} \{ f'_* : \pi_1(\partial M / \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \pi_1(P^{4k-1}) \}$ における
generator 上の normal surgery に対し, obstruction
はないから, trace W 上の normal map $F':$
 $W \longrightarrow P^{4k-1}$ between $\partial M / \mathbb{Z}_2$ and $\partial_+ W$ が

存在し $(F'/\partial_+ W, \partial_+ W) = (f, \mathbb{Q}^{4k-1})$ とおくとき,
 f は 2-connected である. 3)

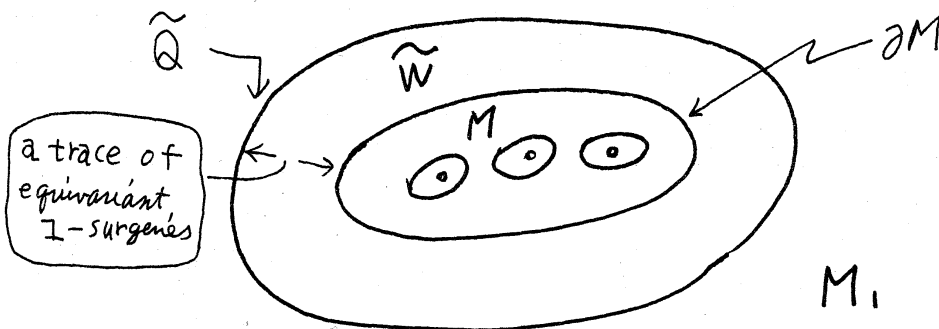
図2)にみられるように $\pi_1(\partial M)$ は free $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$ -module
 である. RPS, 一つの generator $S' \hookrightarrow \partial M$ in $\pi_1(\partial M)$ を surgery
 する時, 同時に, image TS' も surgery することにより, equivariant
 $\mathbb{Z}$ -surgeries とすることが出来る.



この時, plumbing theory の性質より, この surgery により, 1次元
 以外には 影響 を与えない. (例えば [1] をみよ)

3)

$\partial M/\mathbb{Z}_2$ に沿って, $V_1 = V \cup W$ とおく. また ∂M に沿って
 $M_1 = M \cup \tilde{W} (= \tilde{V}_1 \cup N((8m+1)pts))$ とおく.



The universal cover $\tilde{Q}$ は parallelizable manifold M_1 を bound する. $H_{2k}(M_1)$ 上の intersection matrix は上の plumbing matrix H である. H は unimodular であり, plumbing に関する上の事実から, $\pi_i(\tilde{Q})=0$, $i < 4k-1$. 故に Q は $\rightarrow$ の homotopy projective space である. ここで, 上のことから得られた M_1 上の Z_2 -action を $H = H_m^\pm$ に従って, $T_m^\pm$ によって定まる さらに $\tilde{Q} = \sum_{(m,\pm)}^{4k-1}$ とおく. $(4k-1)$ 次元の Browder-Livesay invariant は, Atiyah-Singer invariant に一致するから, 次のことに注目する.

$H_{2k}(M_1)$ 上の induced action は trivial であるから (実際, invariant embedded spheres からなる generators をとる),

$$\text{Sign}(T_m^\pm, M_1) = \text{Index of the intersection matrix on } H_{2k}(M_1)$$

$$= \text{Index}(H_m) = 8m.$$

M_1 は isolated fixed points をとるから, local invariants $L(T_m^\pm, M_1) = 0$ である. 故に, $(T_m^\pm, \sum_{(m,\pm)}^{4k-1})$ の Browder-Livesay invariant は

$$\sigma(T_m^\pm, \sum_{(m,\pm)}^{4k-1}) = \frac{1}{8}(\text{Sign}(T_m^\pm, M_1) - L(T_m^\pm, M_1)) = m.$$

The differentiable structure は,

$$\sum_{(m, \pm)} 4^{k-1} = \frac{1}{8} (\text{Index of } M_1) \sum_1 = m \sum_1.$$

次に, $Q = \sum_{(m, \pm)} \bigwedge_{\pm}^{\pm}$ は

$$\begin{cases} (8m+1)(p^{4k-1}, id) & \text{if } a \equiv 2(4) \\ (8m)(p^{4k-1}, id) \cup (p^{4k-1}, cx1) & \text{if } a \equiv 0(4) \end{cases}$$

は normally cobordant であるが, $cx1$ は orientation reversing diffeomorphism であるから,

$$(8m)(p^{4k-1}, id) \cup (p^{4k-1}, cx1) \text{ は } (8m-1)(p^{4k-1}, id)$$

に normally cobordant である. 最初の remark に

より $H = H_{2e-1}^+, H_{2e}^-$ ならば Q は $(8m+1)(p^{4k-1}, id)$

に また $H = H_{2e}^+, H_{2e-1}^-$ ならば $(8m-1)(p^{4k-1}, id)$

にそれぞれ normally cobordant である

4) に対応するものと, spin invariant の結果を述べ

る.

$$(*) H = \begin{cases} H_{2e-1}^+, H_{2e}^- \Leftrightarrow a \equiv 2(4) \\ H_{2e}^+, H_{2e-1}^- \Leftrightarrow a \equiv 0(4) \end{cases}$$

である. 最初にも述べた, H を realize する各 bundle

の spin invariant を考える. この時, $E^i, i=1, \dots, 8m-1$

までは, tangent disk bundle である (この Euler class 2)

から, $\text{Spin}(T, \partial E^i) = \pm 2$ である. 一方, $a \equiv 2(4)$ ならば, この bundle E^{8m} は, tangent disk bundle からつくられたものである. 従って, $\text{Spin}(T, \partial E^{8m}) = \pm 2$ である. また $a \equiv 0(4)$ ならば, E^{8m} は, trivial disk bundle からつくられたものである. 従って, その spin invariant は 0 であるから, $\text{Spin}(T, \partial E^{8m}) = 0$ である. isolated fixed pt の場合, $\{\pm 2, 0\}$ は それぞれ, 2点 における sign が {同じ, 異なる} に対応しているわけであるから. このことに注意して, plumbing した際の符号 (sign) を, 計算すると, (*) より,

$$\text{Spin}(T_m^\pm, \Sigma_{(\pm, m)}) = \begin{cases} \pm(8m+1) & \text{if } a \equiv 2(4) \\ \pm(8m-1) & \text{if } a \equiv 0(4) \end{cases},$$

$$\text{Spin}(T_{2\ell}^+, \Sigma_{(2\ell, +)}) = \pm(8(2\ell)-1)$$

$$\text{Spin}(T_{2\ell-1}^-, \Sigma_{(2\ell-1, -)}) = \pm(8(2\ell-1)-1) \pmod{2^{2K}}$$

$$\text{Spin}(T_{2\ell-1}^+, \Sigma_{(2\ell-1, +)}) = \pm(8(2\ell-1)+1)$$

$$\text{Spin}(T_{2\ell}^-, \Sigma_{(2\ell, -)}) = \pm(8(2\ell)+1)$$

4)

Remark. $(T_m, \Sigma_m) \subset M_m$ with boundary Σ_m を (1.5) において, つくられたものとする. $H_{2K}(M_m)$ は invariant spheres からなる basis を持つ

さらに $\sigma(T_m, \Sigma_m) = \frac{1}{8} \sigma(M_m)$, $\Sigma_m = \frac{1}{8} \sigma(M_m) \Sigma_1$
 が成り立つ。ここで、 $\sigma(-)$ は index.

References.

- [1] W. Browder, Surgery on simply connected manifolds, Springer-Verlag 1971
- [2] Y. Kamishima, On standard involutions, Preprint, 1979.
- [3] S. Weintraub, Semifree $\mathbb{Z}_p$ -actions on highly-connected manifolds, Math. Z. 145(1975)