

### グラフの分割について (III)

慶應大 榎本 彦衛 (Hikoe Enomoto)

ここでは、向きのない有限単純グラフのみを考える。すなわち、グラフ  $G$  とは頂点集合  $V(G)$  と辺集合  $E(G)$  の組で、 $V(G)$  は有限集合、 $E(G)$  は

$$\binom{V(G)}{2} = \left\{ e \mid \begin{array}{l} e \subset V(G) \\ |e| = 2 \end{array} \right\}$$

の部分集合である。また、頂点集合を分割する分割問題のみを考える。

グラフの性質  $\mathcal{P}$  とグラフ  $G$  の位数の分割  $n = \sum_{i=1}^k a_i$  に対し、 $V(G)$  の分割

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^k A_i$$

で、各  $i$  について

- (1)  $|A_i| = a_i$
- (2)  $\langle A_i \rangle$  は性質  $\mathcal{P}$  を満たす

の成り立つものが存在するとき、 $G$  は性質  $DP(n, k, \sum a_i, \mathcal{P})$  を持つという。さら

に、任意の相異なる頂点  $v_1, \dots, v_k$  に対し、 $V(G)$  の分割  $\bigcup_{i=1}^k A_i$  で、

- (1)  $|A_i| = a_i$
- (2)  $\langle A_i \rangle$  は性質  $\mathcal{P}$  を満たす
- (3)  $v_i \in A_i$

の成り立つものが存在するとき、 $G$  は性質  $SDP(n, k, \sum a_i, \mathcal{P})$  を持つということに

し、 $DP$  や  $SDP$  が成り立つための条件を考えることにする。 $\mathcal{P}$  としては、連結であるという性質  $\mathcal{C}$  や孤立点を持たないという性質  $\mathcal{F}$  を考えることにする。

1975年の第5回 British Combinatorics Conference において、Maurer は  $G$  が  $k$ -連結ならば任意の分割  $\sum_{i=1}^k a_i$  に対して、 $DP(n, k, \sum a_i, \mathcal{C})$  が成り立つと予想した。同じ国際会議において、A. Frank は

$G$  が  $k$ -連結ならば任意の分割  $\sum_{i=1}^k a_i$  に対して、 $SDP(n, k, \sum a_i, \mathcal{C})$  が成り立つ

というもっと強い予想を提出した。 $G$  が  $k$ -連結でなければ、 $SDP(n, k, \sum a_i, \mathcal{C})$  の成り立たないような頂点  $v_1, \dots, v_k$  と分割  $\sum a_i$  の存在することは容易に分かるので、この予想は  $k$ -連結性の必要十分条件を与えることになる。この予想は Györi [1] と Lovász [2] により、ほぼ同時期に独立に証明された。

同じ国際会議において、A. Frank は、連結度  $\kappa(G)$  を最小次数  $\delta(G)$  で置き換えた予想

$$\delta(G) \geq k \implies DP(n, k, \sum a_i, \mathcal{F})$$

も提出したが、この予想の解決にはずいぶん時間がかかった。

定理 1 ([3]) 連結グラフ  $G$  の最小次数が  $k$  以上ならば、任意の分割  $\sum_{i=1}^k a_i$  (ただし、 $a_i \neq 1$ ) に対し、 $DP(n, k, \sum a_i, \mathcal{F})$  が成り立つ

ここでは、 $SDP(n, k, \sum a_i, \mathcal{F})$  が成り立つための条件について考えてみたい。(以下、性質  $\mathcal{F}$  について考えるときは、とくに断らなくても、 $a_i \neq 1$  とする。)

[4]において、定理 1 の系として、

$$\delta(G) \geq 3k \implies SDP(n, k, \sum a_i, \mathcal{F})$$

が出てくると書いたが、定理 1 では  $G$  が連結と仮定しているということを忘れてお

り、その時点では証明できていなかった。しかし、結果は正しく、最近になってようやく証明が完成した。

定理 2 ([5]) グラフ  $G$  の最小次数が  $3k$  以上ならば、任意の分割  $\sum_{i=1}^k a_i$  に対し、 $\text{SDP}(n, k, \sum a_i, \mathcal{F})$  が成り立つ

さらに、[4]において、

$$\delta(G) \geq 2k-1 \implies \text{SDP}(n, k, \sum a_i, \mathcal{F})$$

という予想を述べたが、これは誤りで、 $\delta(G) = 3k-3$  で  $\text{SDP}(n, k, \sum a_i, \mathcal{F})$  の成り立たない例があると、江川氏から注意を受けた。すなわち、

$$G = K_{3k-2} \cup K_{3k-2},$$

$$a_1 = \cdots = a_{k-1} = 3, a_k = 3k-1$$

とし、 $v_1, \dots, v_k$  を 1 つの  $K_{3k-2}$  の中にとると、うまく分割できない。(  $G$  が連結と仮定しても、 $\delta(G) = 3k-4$  の例がある。 ) そこで、現在は次のように予想している。

予想 3  $\delta(G) \geq 3k-2$  ならば、任意の分割  $\sum_{i=1}^k a_i$  に対し、 $\text{SDP}(n, k, \sum a_i, \mathcal{F})$  が成り立つ。

この予想を証明するためには、定理 1 を次のように拡張できればよさそうだということがわかっている。

予想4  $G$  が連結グラフならば、任意の分割  $\sum_{i=1}^k a_i$  に対し、 $V(G)$  の分割  $V(G) =$

$\bigcup_{i=1}^k A_i$  で、

$$(1) \quad |A_i| = a_i,$$

$$(2) \quad d_{\langle A_i \rangle}(x) = 0 \text{ ならば } d_G(x) < k$$

を満たすものが存在する。

## 文 献

- [1] L. Lovász, A homology theory for spanning trees of a graph, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **30** (1977) 241–251.
- [2] E. Györi, On division of graphs to connected subgraphs, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **18** (1978) 485–494.
- [3] H. Enomoto, Graph decompositions without isolated vertices, submitted.
- [4] 榎本彦衛, グラフの分割について, 応用数学合同研究集会 (1992).
- [5] Y. Egawa, H. Enomoto and N. Tokushige, Graph decompositions through prescribed vertices without isolates, preprint.