

μ -不変な超曲面族のニュートン境界

東工大、理学部 岡 睦雄

§1. $f_t(z) = f(t, z_1, \dots, z_n)$ ($|t| \leq 1$) を $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍で定義された解析関数で、 γ は孤立臨界点をもつものの族とする。
 $\mu(f_t)$ を f_t の原点での Milnor 数, $\mu^*(f_t)$ を超平面切断に対する Milnor 数と列とする. i.e. $\mu^*(f_t) = (\mu^n(f_t), \mu^{n-1}(f_t), \dots, \mu^1(f_t))$
 で, $\mu^i(f_t) = \mu(f_t|_{L^i})$. ただし L^i は一般には $\mathbb{C}^n$ の i 次元部分空間. t によらずに $\mu(f_t)$ が定まる時, μ -不変族, また $\mu^*(f_t)$ が一定の時 μ^* -不変族と呼ぶ.

命題 1. 超曲面 $V_t = \{f_t = 0\}$ が位相的に同型であれば, $\{f_t\}$ は μ -不変族である.

証明. D_ε を半径 ε の disk とする. $D_\varepsilon - V_t$ の cyclic covering とすれば, γ は f_t の Milnor サイバーとホモトピー同値で, その $(n-1)$ -Betti 数が $\mu(f_t)$ なる事より直ちに得られる.

命題 1 の逆に対しては次の定理が知られている.

定理 1. (Lé - Ramanujan [LR]). $n \neq 3$ ならば, μ -不変族は位

相的に同型族となる。

この定理の証明は h -cobordism の理論を巧妙に用いて得られたもので、多少とも問題の本質を回避した所がある。すなわち横断性 (transversality) の議論である。

定義. $\{f_t\}$ が一様安定半径 ε をもつとは、任意の t と任意の $\varepsilon' \leq \varepsilon$ に対し、半径 ε' の超球が V_t と横断的なる時をいう。

命題 2. $\{f_t\}$ が一様安定半径を持てば、位相同型族である。

従って与えられた μ -不変族に対し、次の予想がある。

予想 1. パラメータ t に依存 (C^∞ に) する局所座標 $Z(t)$ が存在し、 $Z(t)$ に関して一様な安定半径が存在する。

但し、一様安定半径は座標に依存したもので、一般には任意の座標では成り立たない。

例 (Brieskorn) $f_t(z)$ を μ -不変で、 μ^* が不変でよいもの考える。例えば、 $z^5 + cz^2y^6 + xy^7 + x^{15}$ をとる。 μ は 36π で一定であるが、 $x = ay + bz$ に制限すれば、 $\mu_t^{(2)} = 26$ ($t \neq 0$) で $\mu_0^{(2)} = 28$ である。座標変換 Σ を、
 $f_t \equiv z^5 + cz^2y^6 + (x+y+z)y^7 + (x+y+z)^{15}$ とする。上の事より解析曲線 $p(s) = (0, y(s), z(s))$ が存在し、次の条件を満たす。
 (i) $t(s) = s^c$ ($\exists c \in \mathbb{N}$), $\lambda(s) \in \mathbb{C}$.
 (ii) $\frac{\partial f_t}{\partial y}(p(s)) = \lambda(s) \overline{y(s)}$, $\frac{\partial f_t}{\partial z}(p(s)) = \lambda(s) \overline{z(s)}$.

(iii) $f_{t(s)}(P(s)) \equiv 0$, (iv) $P(s) \rightarrow 0$ ($s \rightarrow 0$).

(*) $\alpha(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(P(s), t(s))$, $\beta(s) = \frac{\partial f}{\partial y}(P(s), t(s))$,
 $\gamma(s) = \frac{\partial f}{\partial z}(P(s), t(s))$ とおき、仮に $\beta(s)$ が $\gamma(s)$ の
 位数が $\alpha(s)$ より大きくない (例えば、 $\beta(s)$ が) とすれば、

$h_s(x, y, z) = f_{(s)}(x, y - \frac{\alpha(s)}{\beta(s)}x, z)$ なる μ -不変量と
 考えると、曲線 $P(s) = (0, y(s), z(s))$ の上では、 $\frac{\partial h_s}{\partial x}(P(s))$
 $\equiv 0$ であるから、 $\frac{\partial h_s}{\partial y}(P(s)) = \lambda(s) \overline{y(s)}$, $\frac{\partial h_s}{\partial z}(P(s)) = \lambda(s)$
 $\overline{z(s)}$ であり、この族は z の座標系に関して、一様安定半径をも
 たなう。そこで (*) を示そう。 $y(s) = d_1 s^a + \text{higher}$, $z(s) = d_2 s^b + \dots$
 $t(s) = s^c$ とすれば、 $d_1, d_2 \neq 0$ となる事はすぐわかる。 $\alpha(s)$
 $= d_1 s^{a+1} + \text{higher}$ である。 $g(y, z, t) = f_t(0, y, z)$ の Newton 境界
 は非退化二次の様になる。

$\Gamma(g)$ 上 $ay + bz + ct$ が最小値 d
 をとる面を Δ とする。

(ii) より、

$$\frac{\partial g}{\partial y} \cdot \dot{y} + \frac{\partial g}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial g}{\partial t} \dot{t} \equiv 0$$

$$\text{i.e.} \quad \left(\frac{\partial g}{\partial y}(d_1, d_2, 1) \cdot d_1^{a-1} \cdot a + \frac{\partial g}{\partial z}(d_1, d_2, 1) d_2^{b-1} b + \frac{\partial g}{\partial t}(d_1, d_2, 1) \cdot c \right) s^{d-1} + \dots$$

$$\equiv 0.$$

従って非退化な事と上の式より、 $\frac{\partial g}{\partial y}(d_1, d_2, 1)$, $\frac{\partial g}{\partial z}(d_1, d_2, 1)$ の 1
 つかは 0 にならない。すなわち $\min(\alpha d \beta(s), \gamma(s))$
 $\leq \max(d-a, d-b) \cdot (1) \Delta$ が R を含むわけだから、 $\alpha d \beta(s)$

$= d-a$, $\text{ord}_f(1) = d-c$ はすぐわかる. $d \leq \delta a$ ならば
 $d-a \leq \delta a$ で, OK. (b) $R \in \Delta$ のとき. まず $a \leq b$ だと
 ある. ($\because a > b$, $d = \delta a + b + c \leq \delta b$ 不可) したがって
 $d-b \leq d-a \leq \delta a - a = \delta a$ で, (*) は示された.

§2. 与えられた解析関数 $f(z_1, \dots, z_n)$ の Newton 境界 $\Gamma(f)$ とは,
 $f(z) = \sum a_\nu z^\nu$ と (z , a_ν は 0 でない ν の上半空間.
 $\mathbb{N} + (\mathbb{R}^+)^n$ の合併の凸包のコンベックスな境界の事である. その
 面 Δ (一点でもよい) に対し, $f_\Delta(z) = \sum_{\nu \in \Delta} a_\nu z^\nu$ で定義し, すべて
 z の Δ に対し, $\{z \in (\mathbb{C}^*)^n; \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_n} = 0\}$ が空集合の
 時, f は $(z_1, \dots, z_n)$ に関して非退化であるという. 非退化
 な Newton 境界に関しては次が知られている.

定理2. (Kouchnirenko [1]) f が非退化ならば $\mu(f)$ は $\Gamma(f)$
 だけから決まる Newton 数 $\sum_{\nu \in \Gamma(f)} \nu(f)$ と一致する. (退化しているときは
 $\mu(f) \geq \sum_{\nu \in \Gamma(f)} \nu(f)$.)

定理3. (Arnold [2]) $f_t(z_1, \dots, z_n)$ が, 各 t に関して非退化で,
 $\Gamma(f_t)$ が動かなければ, 一様安定半径がある. 実は μ^*
 不変でもある.

前半の主張は [2] をみればわかる. 後半は. $W = \{(z, t);$
 $f(z, t) = 0\}$, $T = \{(0, t)\}$ と (z , $W-T$, T が
 Whitney (b) 条件を満たす事と同値である. W 上に解析曲線
 $z(s) = (z_1(s), \dots, z_n(s))$, $z'(0) = d_1 \delta^{a_1} + \dots$, $t(0) = t_0$ で,

$f(z(s), t(s)) \equiv 0$ とする。簡単のため $v_i, z_i(s) \neq 0$ とし, Δ は $\Gamma(f_0)$ の面で, $\gamma = \mathbb{R}^n$ 線型函数 $\sum a_i x_i$ が最小値 d をとる面 Σ とする。 $T_{(z(s), t(s))} W$ は ベクトル $(\text{grad } f_t, \frac{\partial f_t}{\partial t})$ に直交する n 次元ベクトルで, その極限は,

$$\lim_{s \rightarrow 0} (\text{grad } f_{t(s)}(z(s)), \frac{\partial f_t}{\partial t}(z(s)))$$

則ち, $\tilde{v} = (v, 0)$ の直交補空間. $\Sigma = \mathbb{R}^n$, v は

$$v_i = \begin{cases} \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_i}(\alpha) & i \in I \\ 0 & i \notin I \end{cases}$$

$I = \{i \mid \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_i}(\alpha) \neq 0\}$ であり $i \in I$ なら a_i が $\max$ になるもの。

今 $z(s)$ 上の点列 $\{P_n\}$ と T 上の点列 $\{Q_n\}$ で, $\lim P_n = \lim Q_n = (0, t_0)$ なるものがとれる。 $\lim \overline{P_n Q_n}$

$$\text{を } \omega \text{ とすると, } \omega_i = \begin{cases} d_i & (i \leq n, a_i \text{ minimum}) \\ 0 & (\text{otherwise}, i \leq n) \\ c & (i = n+1) \end{cases}$$

となるが, $\omega = (0, \dots, 0, c)$ となるか, いずれかである。

いずれの場合も $(\omega, \tilde{v}) = 0$ で, $\omega \in \lim T_{P_n} W_0$

である。 ω と $\tilde{v}$ が 0 でない i を共有するとは,

$$0 = \frac{d}{ds} f_{t(s)}(z(s)) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_i}(\alpha) \cdot \dot{z}_i(s) \right) s^{d-1} + \text{higher order terms}$$

より, $(\omega, \tilde{v}) = 0$ が得られる。(証明)。

ついでに, 次のことを示そう。

定理 4. $\{f_t\}$ が μ^* -不変なら一様安定半径が存在する。

証明. 結論を否定して, Curve Selection lemma を用

か) と, $\exists Z(s) = (x_1 s^{a_1}, \dots, x_n s^{a_n})$. $t(0) = t_0$

$$i) \begin{cases} \frac{\partial f_{t(s)}(Z(s))}{\partial Z_i} = \lambda(s) \bar{Z}_i(s) & \text{となる.} \\ f_{t(s)}(Z(s)) \equiv 0 & (\lambda(s) \neq 0) \end{cases}$$

$$I = \{i \in \mathbb{Z} : Q_i \text{ minimum}\} \text{ とすれば, } \lim_{s \rightarrow 0} \text{grad}_{f_{t(s)}} Z(s) = \bar{v}, \quad \bar{v}_i = \begin{cases} \bar{\alpha}_i & i \in I \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

従って, $\lim_{s \rightarrow 0} T_{(Z(s), t(s))} W = (\bar{v}, c)^\perp$ or $(\bar{0}, c)^\perp$ の形.
しかし, Whitney (b) は Whitney (a) を含み, $(\bar{0}, c)^\perp$ となる事は不可. したがって, $\lim_{s \rightarrow 0} T_{(Z(s), t(s))} W = (\bar{v}, c)^\perp$. 今 $P_s = (Z(s), t(s))$ ($s \rightarrow 0$) に置き, $Q_s = (0, t(s))$ とすれば, $\overrightarrow{P_s Q_s} \xrightarrow{s \rightarrow 0} v$. 従って, $((v, 0), (\bar{v}, c)) = \|v\|^2 > 0$ で, $\lim_{s \rightarrow 0} \overrightarrow{P_s Q_s} \notin \lim_{s \rightarrow 0} T_{P_s} W$. これは Whitney (b) に反する。

§3. Theorem 2, 3 に見た様に, Newton 境界は非退化と相立特異点と位相的に完全に記述する. 非退化でない境界の場合も Newton 数が最大となる座標をと, 適当なよい座標系に因して, Newton 境界をしろべれば, 少なからぬ位相的情報をひきだせる. 次の定理は Newton 境界が μ -不変族で, どの程度動けるかを, 一番やさしい時に記述したものである.

定理 5. $f_t(x, y)$ を μ -不変な曲線族とする. その時, parameter t に analytic な座標変換族 $(x(t), y(t))$ が存在し, (i) $(x(0), y(0)) = (x, y)$

$$(ii) \Gamma(f_t; (x(t), y(t))) = \Gamma(f_0).$$

証明は [O₂] を見ればよい。 $m \geq 3$ のときは、全然わかっていない。

予想. 2. $f_t(z_1, \dots, z_n) : \mu$ -不変族 (or μ^* -不変族) で、 f_0 が非退化とする。そのとき f_t も適当な座標系に関して非退化である。 ($m=2$ のときは正しい。)

参考文献

[K] Kouchnirenko: Polyèdre de Newton et nombres de Milnor, Invent. Math., 32.(1976), 1-31.

[L-R] Lê and Ramanujam, The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type.

[O₁] Oka, On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary, J. Math. Soc. Japan, Vol. 31, No. 3, 1979, 435-450.

[O₂] Oka: On the stability of the Newton boundary, to appear in AMS reports.