

Kowalewski 系 に対する Cauchy 問題について

阪大 教養 山本 稔

1. 序 m 次元 Euclid 空間 R^m の元を $x = (x_1, \dots, x_m)$ とし, m 次元複素空間 C^m の元を $z = x + iy = (x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m)$, ($i = \sqrt{-1}$) と表わす. 又正数 T, Y に対し次のように定義する:

$$D(T) = \{(t, x); 0 \leq t \leq T, x \in R^m\}$$

$$\mathcal{D}_Y(T) = \{(t, z); 0 \leq t \leq T, z = x + iy \in C^m, |y_j| < Y, j = 1, 2, \dots, m\}.$$

$f(t, z) \in C_{(t, z)}^R[\mathcal{D}_Y(T)]$ は関数 $f(t, z)$ が領域 $\mathcal{D}_Y(T)$ で (t, z) に関して k 回連続的微分可能であることを, $f(t, z) \in A_{(z)}[\mathcal{D}_Y(T)]$ は関数 $f(t, z)$ が各 $t \in [0, T]$ に対し, z の関数として複素解析的正則なることを表わす. 又上の Notation で $z \in \mathcal{Z}$ に, $\mathcal{D}_Y(T) \subset D(T)$ におきかえ, z のときは z のとき $real\ x$ とおいて, 夫々 (t, x) について k 回連続微分可能 ($D(T)$ で), x の関数として実解析的正則なることを表わすことにする.

正数 a, b に対し関数族 $\mathcal{F}(a, b)$ を次のように定義しよう:

$$\mathcal{F}(a, b) = \{f(t, x) \in C_{(t, x)}^1[D(T)] \mid \exists M > 0; |f(t, x)| \leq M e^{a|z|} \text{ on } D(T)\}.$$

本論では, 次の Kowalewski 系の偏微分方程式:

$$(1.1) \quad \frac{\partial u_\mu}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^k \left\{ \sum_{j=1}^m A_{\mu\nu j}(t, x) \frac{\partial u_\nu}{\partial x_j} + B_{\mu\nu}(t, x) u_\nu \right\} + f_\mu(t, x)$$

の初期条件:

$$(1.2) \quad u_\mu(0, x) = \varphi_\mu(x) \quad \mu = 1, 2, \dots, k.$$

をみれば、大域的解の存在を、係数に対する可成条件の下で (定理 1), 解の属する class を $\mathcal{F}(a, b)$ に限ったときの一意性と、係数に対する可成条件のもとに (定理 2) 示すのが目的である。

解の存在については M. Nagumo [3] の方法による。尚、このように大域的解の、解の growth order を制限しての一意性問題はすでに S. Mizohata [2], I. M. Gelfand - G. E. Shilov [1] においてあつかわれたが、更に最近 T. Yamanaka [6] においても I. M. Gelfand - G. E. Shilov の方法を用いて論ぜられた。

ここでは M. Yamamoto [4] の証明を修正した形で示す。

2. 仮定と定理

仮定

$$(I) \quad A_{\mu\nu j}(t, z), B_{\mu\nu}(t, z), f_{\mu}(t, z) \in C_{(t, z)}[\mathcal{D}_Y(T)].$$

$$(II) \quad A_{\mu\nu j}(t, z), B_{\mu\nu}(t, z) \in A_{(z)}[\mathcal{D}_Y(T)] \quad \text{且}$$

$$\mathcal{D}_Y(T) \text{ で } |A_{\mu\nu j}(t, z)| \leq A, \quad |B_{\mu\nu}(t, z)| \leq B \quad \text{である。}$$

$$(III) \quad f_{\mu}(t, z) \in A_{(z)}[\mathcal{D}_Y(T)] \quad \text{かつ} \quad \varphi_{\mu}(z) \in A_{(z)}[\mathcal{D}_Y(T)].$$

定理 1. (解の存在)

仮定 (I), (II), (III) のもとで、正数 T_1 ($0 < T_1 \leq T$) および正数 Y_1 ($0 < Y_1 < Y$) が存在して、初期条件 (1.2) をみたす、方程式 (1.1) の解 $u(t, z) = (u_1(t, z), \dots, u_k(t, z))$ が $C_{(t, z)}^1[\mathcal{D}_{Y_1}(T_1)] \cap A_{(z)}[\mathcal{D}_{Y_1}(T_1)]$ の中に存在する。

定理 2. (解の一意性)

仮定(I), (II)のもとで, $u_\mu(t, x), v_\mu(t, x)$ ($\mu=1, 2, \dots, k$) は, 図1
初期条件 (1.2) をみたす (1.1) の解とし且 $u_\mu, v_\mu \in \bigcup_b \mathcal{F}(a, b)$
ならば $D(T)$ で $u_\mu(t, x) \equiv v_\mu(t, x)$ ($\mu=1, 2, \dots, k$) である。

3. 証明の準備

補題 1. $G(\delta) = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^m; |z_j| < \delta, j=1, 2, \dots, m\}$ とし

関数 $f(z) = f(z_1, \dots, z_m)$ は $G(\delta)$ で複素解析的で, 更に正数 M ,
 α が存在して, ($\rho = \delta - \max_{1 \leq j \leq m} |z_j|$ とするとき) 不等式:

$$(3.1) \quad |f(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m)| \leq M \cdot \rho^{-\alpha}$$

をみたすならば, $f(z)$ は次の不等式をみたす:

$$(3.2) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m) \right| \leq \frac{(1+\alpha)^{1+\alpha}}{\alpha^\alpha} M \cdot \rho^{-\alpha-1}$$

証明 $G(\delta)$ の任意の点 z^0 と, j ($1 \leq j \leq m$) に対し, z_j -平面内に
 $C_j \ni C_j = \{z_j; |z_j - z_j^0| = \frac{\rho}{1+\alpha}\}$ ($\rho = \delta - \max |z_j^0|$) を描く.

$z_j \in C_j$ ならば $\delta - |z_j| \geq \frac{\alpha}{1+\alpha} \rho$ であるから

$$|f(z)| \leq M \left(\rho - \frac{\alpha}{1+\alpha} \rho \right)^{-\alpha} = \frac{(1+\alpha)^\alpha}{\alpha^\alpha} M \cdot \rho^{-\alpha}.$$

したがって Cauchy の積分表示式によって

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(z^0) \right| \leq \frac{(1+\alpha)^{1+\alpha}}{\alpha^\alpha} M \cdot \rho^{-\alpha-1} \quad \text{を得る。}$$

定理 1, 定理 2 の証明で, 我々は $\varphi_\mu(x) \equiv 0$ と仮定しても一般性
を失わない。従って今後 $\varphi_\mu(x) \equiv 0$ と仮定する。このとき (1.1), (1.2)
は次の微分積分方程式 (3.3) と同等になる:

$$(3.3) \quad u_\mu(t, x) = \Phi_\mu[u(t, x)]$$

ここで $\Phi_\mu(u)$ は次の式で定義される.

$$\Phi_\mu(u) = \sum_{\nu=1}^k \left\{ \sum_{j=1}^m \int_0^t A_{\mu\nu j}(\tau, x) \frac{\partial u_\nu}{\partial z_j}(\tau, x) d\tau + \int_0^t B_{\mu\nu}(\tau, x) u_\nu(\tau, x) d\tau \right\} \\ + \int_0^t f_\mu(\tau, x) d\tau.$$

このとき 次の局所存在定理が成立する. (M. Nagumo [3] 参照).

補題 2 仮定 (I), (II), (III) のもとに, 任意の $x^0 \in R^m$ に対して

$\Delta(x^0)$ の任意の開領域で $C^1(t, z) \cap A(z)$ に属する (3.3) の解が存在

する. ここで $\Delta(x^0) = \{(t, z); 0 \leq t \leq T_1, |z_j - x_j^0| < R_1 - L_1 t\}$,

$$0 < R_1 < \min \left\{ 1, \gamma, \left(\frac{1+\alpha}{\alpha} \right)^{1+\alpha} (1-\alpha) \cdot \frac{mA}{B} \right\},$$

$$L_1 = \frac{mkA}{\kappa} \left(\frac{1+\alpha}{\alpha} \right)^{1+\alpha}, \quad T_1 = \min \{ T, R_1/L_1 \} \quad \text{である.}$$

ただし α, κ は $0 < \alpha < 1, 0 < \kappa < 1$ をみたす, 任意に与えられた数である.

証明 まず $g_\mu(t, z) \in C^1(t, z) \cap A(z) [\partial_Y(T)]$ ならば $\Phi_\mu(g(t, z)) \in C^1(t, z) \cap A(z) [\partial_Y(T)]$ であることに注意する.

次に解の存在を逐次近似法で証明するため, 関数列 $\{u_\mu^{(n)}(t, z)\}$ を次のように定義しよう:

$$(3.4) \quad \begin{cases} u_\mu^{(0)}(t, z) \equiv 0 \\ u_\mu^{(n+1)}(t, z) = \Phi_\mu[u^{(n)}(t, z)] \end{cases}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$u_\mu^{(0)}(t, z) \in C^1(t, z) \cap A(z) [\partial_Y(T)]$ であるから $u_\mu^{(n+1)}(t, z) \in C^1(t, z) \cap A(z) [\partial_Y(T)]$ が $n=0, 1, 2, \dots$ に対してなりたつ.

ここで簡単のため $\Psi_\mu[u] = \Phi_\mu[u] - \int_0^t f_\mu(\tau, z) d\tau$ とおく

と $u_\mu^{(i+1)} - u_\mu^{(i)} = \Psi_\mu[u^{(i)} - u^{(i-1)}]$ と表わせるから

$$u_\mu^{(n+1)}(t, z) = \sum_{i=1}^n \{ u_\mu^{(i+1)}(t, z) - u_\mu^{(i)}(t, z) \} + u_\mu^{(1)}(t, z)$$

$$= \sum_{i=1}^n \Psi_{\mu} [u^{(i)} - u^{(i-1)}] + u_{\mu}^{(1)}(t, z).$$

一方、与えられた正数 α ($0 < \alpha < 1$) に対して、正数 M が存在して

$$|u_{\mu}^{(1)} - u_{\mu}^{(0)}| \leq \int_0^t |f_{\mu}(\tau, z)| d\tau \leq M \cdot p^{-\alpha} \quad \text{on } \Delta(x^0) \quad \text{なり}$$

なり、こゝに $\rho = R_1 - L_1 t - \max_j \{|z_j - x_j^0|\}$ である。

故に $\Delta(x^0)$ で次式が成立する：

$$\int_0^t |u_{\mu}^{(1)} - u_{\mu}^{(0)}| d\tau \leq \frac{M}{(1-\alpha)L_1} \cdot R_1^{1-\alpha}$$

従つて補題 1 より

$$\left| \int_0^t \frac{\partial(u_{\mu}^{(1)} - u_{\mu}^{(0)})}{\partial x_j} d\tau \right| \leq \left(\frac{1+\alpha}{\alpha} \right)^{1+\alpha} \frac{M}{L_1} (p^{-\alpha} - R_1^{-\alpha}).$$

を得。これから次式をえら：

$$|u_{\mu}^{(2)} - u_{\mu}^{(1)}| \leq mkA \left(\frac{1+\alpha}{\alpha} \right)^{1+\alpha} \frac{M}{L_1} (p^{-\alpha} - R_1^{-\alpha}) + \frac{kBM}{(1-\alpha)L_1} \cdot R_1^{1-\alpha}$$

R_1, L_1 に対する補題の仮定より、この式から $\Delta(x^0)$ で評価：

$$|u_{\mu}^{(2)} - u_{\mu}^{(1)}| \leq \chi M \cdot p^{-\alpha} \quad \text{on } \Delta(x^0) \quad \text{なり}$$

この評価より帰納的に、すべての n (自然数) に対し $\Delta(x^0)$ で

$$(3.5) \quad |u_{\mu}^{(n+1)} - u_{\mu}^{(n)}| \leq \chi^n M p^{-\alpha}$$

がなりたち、従つて $u_{\mu}^{(n)}(t, z)$ は収束関数 $u_{\mu}(t, z)$ に $\Delta(x^0)$ の任意の開領域で一様に収束する。又 $u_{\mu}(t, z) (\in C_{(t,z)}^1 \cap A(z))$ は (3.3) を満足する、求める解である。

系 1 $u_{\mu}(t, z)$ ($\mu=1, 2, \dots, k$) を補題 2 で得られた解とすると

$$(3.6) \quad |u_{\mu}(t, z)| \leq \frac{M}{1-\chi} p^{-\alpha} \quad (\text{in } \Delta(x^0)) \quad \mu=1, \dots, k$$

をみたす。こゝに $M = \sup_{\substack{(t,z) \in \Delta(x^0) \\ 1 \leq \mu \leq k}} \{ p^{\alpha} T_1 \cdot |f_{\mu}(t, z)| \}$

証明 補題 2 の証明より明らか。

補題 2 で得られた $\Delta(x^0)$ での (3.3) の解を $u_{\mu}(t, z, x^0)$ で表わす事にする。

4. 定理の証明.

定理1の証明 補題2で局所的に得られ解を、接続することによ

って $D_Y(T)$ の解が得られることを示そう. そのためには $z \in \Delta(x^0) \cap \Delta(x')$ ($x^0, x' \in R^m$) の任意の元としたとき $u_\mu(t, z, x^0) = u_\mu(t, z, x')$ となることを示せばよい.

$$v_\mu(t, z) = u_\mu(t, z, x^0) - u_\mu(t, z, x') \quad \text{とあくと } v_\mu(0, z) = 0$$

$$\text{且 } v_\mu(t, z) = \Psi_\mu[v(t, z)].$$

ここで $\tilde{R}$ として $\Delta' = \{(t, z) ; 0 \leq t \leq T_2, |z_j - \frac{x_j^0 + x_j'}{2}| < \tilde{R} - L, t\}$ としたとき $\Delta' \subset \Delta(x^0) \cap \Delta(x')$ となすようにとり.

$$\tilde{\rho} = (\tilde{R} - L, t - \max_j |z_j - \frac{x_j^0 + x_j'}{2}|), \quad \tilde{M} = \sup_{\substack{\Delta' \\ \mu=1, \dots, k}} \{\tilde{\rho}^{-\alpha} |v_\mu(t, z)|\}$$

とあくと, 補題2の証明と同様にして,

$$|v_\mu(t, z)| = |\Psi_\mu[v(t, z)]| \leq \kappa \tilde{M} \tilde{\rho}^{-\alpha} \quad (\Delta' \text{ 上})$$

を得. これから $\tilde{M} \tilde{\rho}^{-\alpha} \leq \kappa \tilde{M} \tilde{\rho}^{-\alpha} \quad (0 < \kappa < 1)$ が従う.

結局 $v_\mu(t, z) \equiv 0 \quad (\Delta' \text{ 上}) \quad (\mu=1, \dots, k)$ を得る.

注意 系1と定理1より $D_Y(T)$ で, 正数 M, a, b に対して

$$|f_\mu(t, z)| \leq M \exp(-ae^{b|z|}) \quad \mu=1, 2, \dots, k$$

ならば, 任意の $a' (< a)$ に対し 正数 M', T_1 が存在して (3.3) の解

$u_\mu(t, x)$ は $D(T)$ で

$$|u_\mu(t, x)| \leq M' \exp(-a'e^{b|x|}) \quad \text{をみたすことがわかる.}$$

補題3 任意に与えられ正数 ε と, 定められた正数 a, b に対し, 正数 a', b' と $\gamma (> 0)$ が存在して $D_Y(T)$ で

$$\exp(-(a+\varepsilon)e^{b|x|}) \geq \exp(-a' \sum_{v=1}^k \cosh(b'z_v)) \quad \text{がなりたつ.}$$

証明 $|\exp(-a' \cosh(b'z_v))| = \exp\{-a' \operatorname{Re} \cosh(b'z_v)\}$
 $\leq \exp\left(-\frac{a' \cos(b'y_v)}{2} e^{b'|z_v|}\right)$

よって $|y_v| \leq \frac{\theta}{b'}$ (θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に fixed) なら $\cos(b'y_v) \geq \cos \theta$.

したがって

$$|\exp(-a' \sum_{v=1}^k \cosh(b'z_v))| \leq \exp\left\{-\frac{a' \cos \theta}{2} \sum_{v=1}^k e^{b'|z_v|}\right\}$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{a' \cos \theta}{2} e^{\frac{b'}{\sqrt{k}}|x|}\right\}.$$

よって $b' = \sqrt{k}b$, $a' = \frac{2(a+\varepsilon)}{\cos \theta}$ とおき $|y_v| \leq \frac{\theta}{\sqrt{k}b} = \gamma$ ($v=1, 2, \dots, k$)

とすれば $\exp\{-(a+\varepsilon)e^{b|x|}\} \geq \exp\{-a' \sum_{v=1}^k \cosh(b'z_v)\}$ を得る.

定理 2 の証明

$$L_\mu[u] = \frac{\partial u_\mu}{\partial t} - \sum_{v=1}^k \left\{ \sum_{j=1}^m A_{\mu v j}(t, x) \frac{\partial u_v}{\partial x_j} + B_{\mu v}(t, x) u_v \right\}$$

とおき、任意の σ ($\sigma=1, 2, \dots, k$) に対して

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\mu^\sigma[u] = & -\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \sum_{v=1}^k \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} [A_{\mu v j}(t, x) u_v] - B_{\mu v}(t, x) u_v \right\} \\ & - e^{-ix\xi} \exp\left\{-a' \sum_{v=1}^k \cosh(b'z_v)\right\} \cdot \delta_{\mu\sigma} \end{aligned}$$

とおく. こゝに a', b', γ は 任意に与えられ $\varepsilon (>0)$ に対して補題 3

で定まった正数であり, したがって $D_\varepsilon(T)$ で

$$\exp\{-(a+\varepsilon)e^{b|x|}\} \geq \exp\left\{-a' \sum_{v=1}^k \cosh(b'z_v)\right\}$$

をみたすものとし, $\delta_{\mu\sigma}$ は Kronecker の delta とする.

$\tilde{L}_\mu^\sigma[u] = 0$ は定理 1 で考察された方程式と同じ形で, 同じ条件をみ

たす方程式であるから, t を逆向きに考えることによって, 定理 1 より

正数 T_0 ($\leq T_1$) が存在して, 任意の $T \in [0, T_0]$ に対し $\tilde{L}_\mu^\sigma[w] = 0$

の, 初期条件: $w(T, x) = 0$ をみたす解が $D(T)$ において存在する.

系 1 より, この解 $w(t, x)$ は, 適当な定数 M' が存在して不等式:

$$(4.1) \quad |w_\mu(t, x)| \leq M' \exp \left\{ -\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right) e^{b|x|} \right\}$$

を $D(T)$ にあてみたす。

さて、 $u(t, x), v(t, x)$ を (1.2) をみたす (1.1) の解で $u, v \in \mathcal{F}(a, b)$ をみたすものとする。 $L_\mu[u-v] = 0$, $[u_\mu - v_\mu]_{|0, x} = 0$

$$(4.2) \quad |u_\mu(t, x) - v_\mu(t, x)| \leq K \exp(a e^{b|x|}) \quad \mu = 1, 2, \dots, k$$

を $D(T)$ でみたす。ここに T は $[0, T_0]$ の任意の数、 K は定数。

$$\sum_{\mu=1}^k \int_{D(T)} \int \{w_\mu L_\mu[u-v] - (u_\mu - v_\mu) \hat{L}_\mu^0(w)\} dx dt = 0$$

にあるから、任意の $\xi \in R^m$ に対して

$$\int_0^t dt \int_{R^m} e^{-ix\xi} [(u_0 - v_0) \exp \{-a' \sum_{\nu=1}^k \cosh(b'|x_\nu|)\}] dx = 0$$

したがって、任意の $\xi \in R^m$ と任意の $t \in [0, T_0]$ に対し

$$(4.3) \quad \int_{R^m} e^{-ix\xi} [(u_0 - v_0) \exp \{-a' \sum_{\nu=1}^k \cosh(b'|x_\nu|)\}] dx = 0$$

$$\text{— 亦 — } |(u_0 - v_0) \exp \{-a' \sum_{\nu=1}^k \cosh(b'|x_\nu|)\}| \leq \exp \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} e^{b|x|} \right\}$$

であるから、(4.3) は可積分関数 $(u_0 - v_0) \exp \{-a' \sum_{\nu=1}^k \cosh(b'|x_\nu|)\}$ の Fourier 変換が任意の $t \in [0, T_0]$ に対し R^m で恒等的に零になることを意味する。 $\exp \{-a' \sum_{\nu=1}^k \cosh(b'|x_\nu|)\} \neq 0$ in R^m である故

$$u_0(t, x) - v_0(t, x) \equiv 0 \quad \text{in } D(T_0) \text{ となり、}$$

σ は何れでもよかったから $u_\sigma(t, x) \equiv v_\sigma(t, x) \quad (D(T_0) \text{ 上}) \quad \sigma = 1, \dots, k$ となり、

今、もし $T' \in [0, T]$ が存在して、或る μ に対して $u_\mu(T', x) \neq v_\mu(T', x)$ となり、 T' の下限を T_2 とすると $u_\mu(t, x) \equiv v_\mu(t, x)$ が $D(T_2)$ でみたされる。このとき T_2', T_3 を $T_3 - T_2' \leq T_0$, $T_2' < T_2 < T_3$ となるようにとり、上での

ベキと同じ議論を、区間 $[T_2', T_3]$ に関して繰り返せば、任意の $(t, x) \in \{(t, x); T_2' < t \leq T_3, x \in R^m\}$ に対し $u_\mu(t, x) = v_\mu(t, x)$.
これは仮定: T' の存在 に矛盾する. したがって結論:

$u_\mu(t, x) = v_\mu(t, x) \quad \text{on } D(T), \quad \mu=1, 2, \dots, k$
を得る.

参考文献

- [1] I.M. Gelfand - G.E. Schilov. "Vergleichenerte Funktionen"
III (1964) pp. 89 - 94.
- [2] S. Mizohata, "Systemes Kowalewskiens" Annales de
L'institute Fourier. Tome VIII (1957) pp. 283 - 292.
- [3] M. Nagumo, "Über das Anfangswertproblem Partieller
Differentialgleichungen" Japanese Journal of Math.
vol. 18. (1942) pp. 41 - 47.
- [4] M. Yamamoto, "On Cauchy's Problem for a linear
System of Partial Differential Equations of First
Order". Proc. of the Japan Acad. Vol. 42 (1966)
pp 555 - 559.
- [5] M. Yamamoto, "On Cauchy Problem for Kowalewski
Systems." to appear.
- [6] T. Yamanaka, "On the Cauchy Problem for
Kowalevskaja Systems of Partial Differential
Equations."