

値域を含む定義域をもつ閉作用素

九大理 太田昇一 (Schôichi Ôta)

1. 非有界微分分子 [2] および 非有界作用素環 [1] に関連して、値域が定義域に含まれる (すなわち、定義域を不変にする) ような閉作用素の有界性について [3] において、議論したが、まず始めに その復習から始める。

定理 1. $\mathcal{H}$ を Hilbert space とし、 T を densely defined, closed (linear) operator in $\mathcal{H}$ とします。 T が定義域 $\mathcal{D}(T)$ を不変にする i.e., $T\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ とする。もしも、十分大なる λ に対して ($\lambda \in \mathbb{R}$), $(\lambda I - T)\mathcal{D}(T)$ が closed ならば、 T は bounded (i.e., $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$)。

証明. $\mathcal{D}(T)$ に、

$$(x, y)_T \equiv (x, y) + (Tx, Ty) \quad (x, y \in \mathcal{D}(T))$$

でもって、内積を入れると、Hilbert space になる。それを、 $\{\mathcal{D}(T), (\cdot, \cdot)_T\}$ でかくことにする。 あきらかに T は、この新しい Hilbert space $\{\mathcal{D}(T), (\cdot, \cdot)_T\}$ における closed operator だから、closed graph theorem より、 T はこの space での

bounded operator になる。よって spectral theory より十分大きい λ に対して $(\lambda I - T) \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T)$ 。故に $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ を得る。

特に、 T が dissipative ならば、定理の仮定を満たすから、

系 2 [3].

(1). T が densely defined, closed dissipative operator in $\mathcal{H}$ のとき、もしも $T \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ ならば T は bounded である。

(2). T が densely defined, closed operator in $\mathcal{H}$ とせよ。もしも $T \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$ ならば、 T は bounded である。

2. closed (linear) operator で 定義域を不変にする unbounded なものは、多く存在する。その代表的な例として、idempotent がある。このような unbounded な idempotent は [4] の §4 における dual pair の解析に重要な役を演ずる。ここでは一般の unbounded, closed operator で 定義域を不変にするものの性質を述べる。

命題 3 [3]. T を densely defined, closed operator in $\mathcal{H}$ で、定義域を不変にするとせよ。このとき、

(1). $\mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(T^*)$ は T の core である。

(2). もしも、 T が unbounded ならば、 $W(T) = \mathbb{C}$,
ここに、 $W(T)$ は T の numerical range i.e., $W(T) \equiv$
 $\{(Tx, x) : \|x\|=1, x \in \mathcal{D}(T)\}$ を示す。

3. 上で述べた densely defined, unbounded closed idempotent T は $(T^*)^2 = T^*$ をみたすから、 T^* も又その定義域を不変にしている。定義域を不変にするような closed operator で unbounded な典型的な例 ([3]) の共役作用素 T^* もやはり $T^* \mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T^*)$ を満たしている。そこで、次のような question を考える：

『 T を densely defined, closed linear operator in a Hilbert space $\mathcal{H}$ で $T \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ を満たすとせよ。このとき、 T^* も同じ性質 i.e., $T^* \mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T^*)$ が成り立つか？』

この question に対して我々は counter-example を構成出来るが、以下では、そのことを述べる。

各 $\xi \in \mathcal{H}$ に対して、rank-one operator e_ξ を

$$e_\xi(\eta) \equiv (\eta, \xi)\xi \quad (\eta \in \mathcal{H})$$

で定義すると、明らかに $e_\xi^* = e_\xi$.

定理 4. $\mathcal{H} \in$ Hilbert space とし, T を unbounded densely defined, closed linear operator in $\mathcal{H}$ such that $T\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ とする。このとき, 以下の性質をもつ $\mathcal{H}$ 上の bounded linear operator K が存在する:

$T_K \equiv T + K$ とおいたとき,

$T_K \mathcal{D}(T_K) \subset \mathcal{D}(T_K)$ だが

$T_K^* \mathcal{D}(T_K^*) \not\subset \mathcal{D}(T_K^*)$.

証明. T は unbounded より $\mathcal{D}(T) \neq \mathcal{D}(T^*)$ ($\because$ 系 2 の (2)). ゆえに $\exists \xi \in \mathcal{D}(T)$ but $\xi \notin \mathcal{D}(T^*)$ そこで K として

$$K \equiv \mathcal{C}_\xi$$

とおく。この K が求めるものであることを以下示せば良い。

$\xi \in \mathcal{D}(T)$ より $T_K = T + K$ が $\mathcal{D}(T_K) = \mathcal{D}(T)$ を不変にしていることは明らかである。

又 $T_K^* = T^* + \mathcal{C}_\xi$ より, もしも T_K^* が $\mathcal{D}(T_K^*) = \mathcal{D}(T^*)$ を不変にするならば, $\xi \notin \mathcal{D}(T^*)$ に矛盾する。

References

1. G. Lassner , Topological algebras of operators ,
Rep. Math. Phys. 3 (1972), 279-293.
2. S. Ôta , Closed derivations in C^* -algebras,
Math. Ann. 257 (1981), 239-250.
3. ——— , Unbounded closed linear operators
with domain containing their range, Proc. Edinburg
Math. Soc. 27 (1984), 227-233.
4. ——— , Unbounded representations of a $*$ -algebra
on indefinite metric space. preprint (1985).
5. M. H. Stone , Linear transformations in Hilbert
space and their applications to analysis, Amer. Math.
Soc. Collog. Publ. 15, Providence, R. I. (1932).