

Singular integral and cancellation property

東海大学・開発工学部 小森康雄 (Yasuo Komori)
School of High Technology for Human Welfare
Tokai University

序 本稿では §1 で一般化された特異積分作用素の L^2 有界性 (L^p 有界性) に関する証明の歴史を解説し, §2 ではその結果の Hardy 空間への応用について証明なしで結果のみ述べる.

1 特異積分作用素の L^2 有界性

1.1 一般化された特異積分作用素

定義 1 (古典的特異積分作用素)

作用素 T が積分核 K を持つ古典的な特異積分作用素であるとは

$$Tf(x) = \text{p.v.} \int_{R^n} K(x-y)f(y)dy, \quad f \in S'(R^n)$$

と表せて, K が以下の条件を満たすことをいう.

$$|K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}, \quad (\text{i})$$

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}, \quad (\text{ii})$$

$$\int_{\varepsilon < |x| < N} K(x)dx = 0, \quad 0 < \forall \varepsilon < \forall N < \infty. \quad (\text{iii})$$

例 (Hilbert 変換)

$$Hf(x) = \text{p.v.} \int_{R^1} \frac{1}{x-y} f(y)dy.$$

命題 1 (Calderón and Zygmund [5])

古典的な特異積分作用素は $L^p(R^n)$ 上の有界作用素である ($1 < p < \infty$).

証明 (i) ~ (iii) によって $\hat{K} \in L^\infty$ がわかり ($|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}/y dy| \leq C$ の一般化である), それにより T の L^2 有界性が導かれる. $\dots (*)$

そして L^2 有界性がわかると L^p 有界性が導かれるというのが Calderón-Zygmund の理論である. □

次に convolution 型でない特異積分作用素を考える.

定義 2 作用素 T が積分核 K を持つ一般化された特異積分作用素であるとは

$$Tf(x) = \text{p.v.} \int_{R^n} K(x, y) f(y) dy, \quad f \in S(R^n)$$

と表せて, 以下の条件を満たすことをいう.

$$|K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^n}, \quad (\text{i}')$$

$$|\nabla_x K(x, y)| + |\nabla_y K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^{n+1}}, \quad (\text{ii}')$$

注意 古典的な場合と違い, 積分 $Tf(x) = \text{p.v.} \int_{R^n} K(x, y) f(y) dy$ が収束するとは一般にはいえないが, 本稿で考える以下の具体例においては問題ない. 正確な定義に関しては [19], 7, 8 章を見よ.

擬微分作用素を含む非常に多くの作用素が一般化された特異積分作用素になる. ここで例としてあげるのは以下の 2 つの重要な作用素である ([3], [4]).

定義 3 (Calderón's commutator)

$$T_A f(x) = \text{p.v.} \int_{R^1} \frac{A(x) - A(y)}{(x - y)^2} f(y) dy, \quad \text{ただし } A' \in L^\infty(R^1). \quad (1)$$

定義 4 (Lipschitz 曲線上の Cauchy 積分)

$$C_A f(x) = \text{p.v.} \int_{R^1} \frac{f(y)}{x - y + i(A(x) - A(y))} dy \quad \text{ただし } A' \in L^\infty(R^1). \quad (2)$$

さらに次の定義をする.

定義 5 一般化された特異積分作用素 T が Calderón-Zygmund 作用素であるとは以下の条件を満たすことをいう.

$$T \text{ は } L^2(R^n) \text{ 上の有界作用素である.} \quad (\text{iii}')$$

Calderón-Zygmund 作用素に関する以下の命題はすぐわかる.

命題 1' Calderón-Zygmund 作用素は $L^p(R^n)$ 上の有界作用素である ($1 < p < \infty$).

T の L^2 有界性 (iii') を仮定しているので, Calderón-Zygmund の理論より L^p 有界性が導かれる. $\square$

ここで以下のことが問題となる.

問題 一般化された特異積分作用素が L^2 有界になるための条件をみつけよ.

この問題は Calderón-Zygmund の理論以後の特異積分の分野における 20 世紀後半の最も重要な問題の 1 つであった. 以下で詳しく解説する.

1.2 $T1$ 定理

一般化された特異積分作用素の L^2 有界性を証明するときの難しい点は, 古典的な場合に使えたフーリエ変換の方法 (命題 1 の証明 (*) を見よ) が使えないことである.

以下では話を簡単にするためにさらに次の条件を仮定する.

$$K(y, x) = -K(x, y) \quad (\text{anti-symmetric condition}). \quad (\text{iv})$$

注意 この仮定は本質的ではない. もちろん例にあげた Calderón's commutator と Cauchy 積分はこの条件を満たす. そしてこの条件を満たす場合は積分

$$Tf(x) = \text{p.v.} \int_{R^n} K(x, y)f(y)dy$$

の収束が保証される ([19], p. 8).

Calderón は最初このように問題を設定したとき 「(i'), (ii'), (iv) を満たす一般化された特異積分作用素は L^2 有界である」 と思っていたようであるが ([18], p. 322), 反例が見つかった ([19], p. 8). David and Journé による定理を述べる前に準備をする.

命題 2(Stein [22]) T を Calderón-Zygmund 作用素とすると,

$$\|Tf\|_{BMO} \leq C\|f\|_{L^\infty}, \quad f \in L^2 \cap L^\infty.$$

注意 $T: L^\infty \rightarrow L^\infty$ 有界は成り立たない.

ここで BMO は John and Nirenberg [13] によって導入された以下で定義される関数空間である.

定義 6(BMO (bounded mean oscillation))

Q で n 次元開球, $|Q|$ でその Lebesgue 測度を表す. $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx$ とする.

$$BMO(R^n) = \left\{ f \in L^1_{loc}(R^n); \|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx < \infty \right\}.$$

注意 $L^\infty \subsetneq BMO$, $\log|x| \in BMO(R^n)$.

David and Journé の 'T1 定理' と呼ばれているのは次の定理である.

定理 1(David and Journé [8]) (i'), (ii'), (iv) を満たす一般化された特異積分作用素 T が L^2 有界となるための必要十分条件は

$$T1 \in BMO(R^n)$$

である.

注意 定数関数 1 に特異積分を作用させることの意味づけ (形式的には $T1 = \int K(x, y) dy$) については [19], p. 49 または [21], p. 268 を見よ. 必要条件であることは命題 2 による.

この定理から Calderón's commutator の L^2 有界性が導かれる.

系 1([8]) $A' \in L^\infty(R^1)$ ならば T_A は $L^2(R^1)$ 上の有界作用素である. すなわち Calderón-Zygmund 作用素である.

証明 部分積分により (あくまでも形式的な計算だが)

$$T_A(1) = \int \frac{A(x) - A(y)}{(x - y)^2} dy = \int \frac{A'(y)}{(x - y)} dy = H(A')(x).$$

命題 2 より Hilbert 変換は $L^\infty \rightarrow BMO$ 有界なので $T_A(1) \in BMO$. $\square$

1.3 Tb 定理

次に Cauchy 積分の L^2 有界性を考える. まず 'T1 定理' がそのままでは有効でないことに注意する.

$$C_A(1) = \int \frac{1}{x-y+i(A(x)-A(y))} dy$$

が BMO 関数になることは, Calderón's commutator のときのように自明ではない(系 1 の証明を参照). ところが複素積分を使うことによって(形式的には)

$$\int \frac{(1+iA'(y))}{x-y+i(A(x)-A(y))} dy = 0$$

となる.

このことをヒントにして生まれたのが ' Tb 定理' である.

注意 積分核 $K(x, y) = (1+iA'(y))/(x-y+i(A(x)-A(y)))$ を考えると 'T1 定理' が使えると思うかもしれないが, この積分核は条件 (ii') を満たさない.

定義 7 有界な複素数値関数 b が accretive であるとは, ある正の定数 c が存在して

$$\Re b(x) \geq c$$

を満たすことをいう.

注意 $b(x) = 1+iA'(x)$ が念頭にある.

定理 2(David, Journé and Semmes[9]) T は条件 (i'), (ii'), (iv) を満たすとする. ある accretive 関数 b が存在して

$$Tb \in BMO(R^n) \text{ ならば } T \text{ は } L^2(R^n) \text{ 上の有界作用素である.}$$

この定理の系として次の結果を得ることができる.

系 2 Cauchy 積分作用素 C_A は $A' \in L^\infty$ のとき $L^2(R^1)$ 上の有界作用素である.

注意 Cauchy 積分作用素の L^2 有界性の証明にはこの他に perturbation を使った方法 [4], [7], [20] があり, Murai [20] は最良の評価を得ている.

1.4 n 次元の例

Calderón's commutator と Cauchy 積分の n 次元版も考えられている.

定義 8(n dimensional Calderón's commutator)

$$T_A f(x) = \text{p.v.} \int_{R^n} \frac{A(x) - A(y)}{|x - y|^{n+1}} f(y) dy, \quad \text{ただし } \nabla A \in L^\infty(R^n). \quad (3)$$

定義 9(the double layer potential operator または Cauchy integral operator for hypersurface と呼ばれている)

$$C_A f(x) = \text{p.v.} \int_{R^n} \frac{A(x) - A(y) - \nabla A(y) \cdot (x - y)}{(|x - y|^2 + (A(x) - A(y))^2)^{(n+1)/2}} f(y) dy$$

ただし $\nabla A \in L^\infty(R^n)$. (4)

これらの作用素の L^p 有界性は roation method という方法により 1 次元の結果に帰着して証明される ([23] 参照).

定理 3

$\nabla A \in L^\infty(R^n)$ のとき T_A と C_A は $L^p(R^n)$ 上の有界作用素である ($1 < p < \infty$).

2 特異積分作用素の H^p 有界性

以下では特異積分作用素の Hardy 空間上での有界性を考える. まず Hardy 空間を定義する.

定義 10(Hardy 空間 H^p) $\varphi \in \mathcal{S}, \int_{R^n} \varphi(x) dx \neq 0$ を一つ固定して $f \in \mathcal{S}'$ に対して最大関数 $M_\varphi f$ を次のように定義する.

$$M_\varphi f(x) = \sup_{t>0} |f * \varphi_t(x)|, \quad \varphi_t(x) = t^{-n} \varphi(x/t).$$

そして

$$H^p(R^n) = \{f \in \mathcal{S}'; \|f\|_{H^p} = \|M_\varphi f\|_{L^p} < \infty\}.$$

注意 H^p は φ の選び方によらない. そして $H^p = L^p$ ($1 < p < \infty$). $H^p \subset \mathcal{S}'$ ($p < 1$) であるが $H^1 \subset L^1$ である.

命題 3(Fefferman and Stein [11])

古典的な特異積分作用素は $H^p(R^n)$ 上の有界作用素である ($n/(n+1) < p \leq 1$).

注意 以下では話を簡単にするために, Hardy 空間を考えるときは常に $n/(n+1) < p \leq 1$ を仮定する. §1.1 定義 1 (ii) において K の滑らかさを十分に仮定すれば p を 0 に近づけることができる.

一般化された特異積分作用素に関しては以下の結果がすぐわかる.

命題 3' Calderón-Zygmund 作用素は $H^p(R^n) \rightarrow L^p(R^n)$ 有界である ($n/(n+1) < p \leq 1$).

注意 $T: H^p \rightarrow H^p$ 有界でないことに注意せよ.

Alvarez and Milman [1], [2] は Calderón-Zygmund 作用素 (すなわち L^2 有界性はわかっている) の H^p 有界性に関して次の結果を得た.

定理 4(Alvarez and Milman [1], [2]) $n/(n+1) < p \leq 1$ とする. (iv) を満たす Calderón-Zygmund 作用素 T が $H^p(R^n)$ 上の有界作用素である必要十分条件は

$$T1 = 0$$

である.

この定理は必要十分条件を与えているので問題ないように思えるが,

$$T1 = \int K(x, y) dy = 0$$

という条件は積分核 K の形にひじょうに強い制限をしており, Calderón's commutator は一般にはこの条件を満たさない. そこで Calderón's commutator に応用できる定理を考え, 以下の結果を得た ([16] 参照).

定義 11(local Hardy 空間, Goldberg [12]) $m_\varphi f(x) = \sup_{0 < t < 1} |f * \varphi_t(x)|$ と定義する. そして

$$h^p(R^n) = \{f \in \mathcal{S}'; \|f\|_{h^p} = \|m_\varphi f\|_{L^p} < \infty\}.$$

注意 $H^p \subset h^p$ であり特に $H^p = h^p = L^p$ ($1 < p < \infty$).

local Hardy 空間は Goldberg によって擬微分作用素の有界性を調べるために導入された空間である. この空間の有用性については Evans and Müller [10] を参照.

定義 12 (リプシッツ空間 $\dot{\Lambda}_\alpha$) $0 < \alpha < 1$ とする.

$$\dot{\Lambda}_\alpha(R^n) = \left\{ f; \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}.$$

定理 4' ([14]) T は (iv) を満たす Calderón-Zygmund 作用素とする.

$T1 \in \dot{\Lambda}_\alpha(R^n)$ ならば $T: H^p(R^n) \rightarrow h^p(R^n)$ 有界である ($n/(n+\alpha) \leq p \leq 1$).

注意 条件 $n/(n+\alpha) \leq p$ は最良である.

リプシッツ空間が現れた理由は以下の事実による.

命題 4 (Campanato [6])

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \approx \sup_Q \frac{1}{|Q|^{1+\alpha/n}} \int_Q |f(x) - f_Q| dx.$$

すなわち $BMO = \dot{\Lambda}_0$ とみなせるわけである. さらにこの定理は Calderón's commutator に応用できる.

系 4' ([14]) $A' \in L^\infty(R^1) \cap \dot{\Lambda}_\alpha(R^1)$ ならば

$$T_A: H^p(R^1) \rightarrow h^p(R^1) \text{ 有界である } (1/(1+\alpha) \leq p \leq 1).$$

証明 $T_A(1) = H(A')(x)$ で, Hilbert 変換は $\dot{\Lambda}_\alpha$ 上の有界作用素だから $T_A(1) \in \dot{\Lambda}_\alpha$. □

Cauchy 積分に関して同様の結果を得るためには Tb 定理の H^p 版が必要になる.

定理 5 ([17]) T は (iv) を満たす Calderón-Zygmund 作用素とする.

ある accretive 関数 b が存在して $b, Tb \in \Lambda_\alpha(R^n)$ ならば $T: H^p(R^n) \rightarrow h^p(R^n)$ 有界である ($n/(n+\alpha) \leq p \leq 1$).

系 5 ([17]) $A' \in L^\infty(R^1) \cap \text{Lip}_\alpha(R^1)$ ならば $C_A: H^p(R^1) \rightarrow h^p(R^1)$ 有界である ($1/(1+\alpha) \leq p \leq 1$).

課題 n 次元の Calderón's commutator, the double layer potential operator の H^p 有界性については現在研究中である.

参考文献

- [1] J. Alvarez, *H^p and weak H^p continuity of Calderón-Zygmund type operators*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **157** (1994), 17–34, Marcel Dekker Inc.
- [2] J. Alvarez and M. Milman, *H^p continuity of Calderón-Zygmund type operators*, J. Math. Anal. Appl. **118** (1986), 63–79.
- [3] A. P. Calderón, *Commutators of singular integral operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **53** (1965), 1092–1099.
- [4] A. P. Calderón, *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74** (1977), 1324–1327.
- [5] A. P. Calderón and A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85–139.
- [6] S. Campanato, *Proprietà di Hölderianità di alcune classi di funzioni*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **17** (1963), 175–188.
- [7] G. David, *Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **17** (1984), 157–189.
- [8] G. David and J.-L. Journé, *A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators*, Ann. Math. **120** (1984), 371–397.
- [9] G. David, J.-L. Journé and S. Semmes, *Opérateurs de Calderón-Zygmund, fonctions, para-accré et interpolation*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 1–56.
- [10] L.C. Evans and S. Müller, *Hardy spaces and the two-dimensional Euler equations with nonnegative vorticity*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 199–219.
- [11] C. Fefferman and E.M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. **129** (1972), 137–193.
- [12] D. Goldberg, *A local version of real Hardy spaces*, Duke Math. J. **46** (1979), 27–42.
- [13] F. John and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 415–426.
- [14] Y. Komori, *Calderón-Zygmund operators on $H^p(\mathbb{R}^n)$* , Sci. Math. Japonicae **53** (2001), 65–73.

- [15] Y. Komori, *Calderón-Zygmund operators on weighted $H^p(\mathbb{R}^n)$* , Hokkaido Math. J. **32** (2003), 673–684.
- [16] Y. Komori, *Singular integral and cancellation property*, 調和解析学と非線形偏微分方程式, 数理解析研究所考究録 1389 (2004), 12–20.
- [17] Y. Komori, *The Cauchy integral operators on Hardy space*, (preprint).
- [18] Y. Meyer, *Wavelets and operators, Analysis at Urbana*, London Math. Soc. Lecture Notes **137** (1989), 256–365.
- [19] Y. Meyer and R. Coifman, *Wavelets: Calderón-Zygmund and multilinear operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **48**, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [20] T. Murai, *A real variable method for the Cauchy transform and analytic capacity*, Lecture Notes in Math. **1307**, Springer-Verlag, 1988.
- [21] 中井英一, Fractional integral の最近の話題, 数学 **56** (2004), 260–280.
- [22] E. M. Stein, *Singular integrals, harmonic functions, and differentiability properties of functions of several variables*, Proc. Symp. Pure Math. (1967), 316–335.
- [23] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, 1986.