

コホモロジー複素射影空間の上の semi-free な S^1 -作用について

津田塾大 吉田 朋 好

§1. Statement of results

X^{2n} を向きづけられた closed C^∞ $2n$ -多様体とする。

定義: X^{2n} が コホモロジー複素射影空間 (以下, $\text{coh. } \mathbb{CP}^n$ とかく) であるとは, X の整数係数の 2 次元コホモロジー群 に含まれる元, $\alpha \in H^2(X; \mathbb{Z})$ があつて, $H^{**}(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha] / (\alpha^{n+1})$ (環同型) となること。

上の α について, Kronecker pairing $\langle \alpha^n, [X] \rangle = 1$ と仮定してよい。 (ここに $[X]$ は X の基本類)。 $p(X)$ を X の total ポントリャーギン類とし, formal に $p(X) = \prod (1 + x_j^2)$ であるとする。このとき, X の $\hat{A}$ -class が,

$$\hat{A}(X) = \prod (x_j/2) (\sinh x_j/2)^{-1} \in H^{**}(X; \mathbb{Q})$$

で定義される ($\mathbb{Q}$ は有理数体)。

X の上の S^1 -作用が, semi-free とは, $\forall x \in X$ について, その isotropy 群 G_x が, $G_x = \{e\}$ or S^1 (e は S^1 の単位元) であることを意味する。

定理 0.1.

$X \in \text{coh. } \mathbb{CP}^n$ とし, $H^{**}(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha] / (\alpha^{n+2})$, $\alpha \in H^2(X; \mathbb{Z})$ とする。 X の上に, 自明でない, smooth semi-free S^1 -作用が存在するならば,

$$\hat{A}(X) = \left(\alpha / e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2} \right)^{n+1}$$

となる。

系 0.1.

$f: X^{2n} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ を向きづけられた $2n$ -次元 C^∞ -closed-多様体 X から $\mathbb{CP}^n$ への homotopy equivalence とする。もし, X が, 自明でない, smooth semi-free S^1 -作用をもつならば, $\hat{A}(X) = f^* \hat{A}(\mathbb{CP}^n)$ となる。

系 0.1 は $n=3$ の場合には, X^6 が $\mathbb{CP}^3$ に微分同相であることを意味する (D. Montgomery, C.T. Yang [])。定理 0.1 は, spin^c -多様体に関する, Atiyah-Singer-Segal の index formula を用いて示される。

§2. 準備

コホモロジー複素射影空間の上の S^1 -作用についての、Bredon, Su, Petrie 等の結果で、後に必要なものを述べる。

X を coh. $\mathbb{C}P^n$, α を コホモロジー生成元とする。

$\phi: S^1 \times X \rightarrow X$ を X の上の smooth な S^1 -作用とする (この § では、semi-free は仮定しない)。 $F = \bigcup F_j$ を ϕ の固定点とする ($\{F_j\}$ は F の 連結成分をあらわす)。各 F_j は、向きづけ可能な smooth 部分多様体となる)。

命題 1.1. (G.E. Bredon [2], J.C. Su [5])

各 F_j は、(ある $h_j \geq 0$ に対して) coh. $\mathbb{C}P^{h_j}$ である。
 として、 $\sum (h_j + 1) = n + 1$ 。 α_j を α の F_j への制限とすれば、 α_j が F_j の コホモロジー生成元となる。

η を X の上の複素 line bundle で $c_1(\eta) = \alpha$ であるものとする ($c_1(\eta)$ は η の first Chern 類)。我々には、 η を α に associate した line bundle とよぶ。
 Su ([5]) により、 $H^2(X; \mathbb{Z}) = 0$ ということから、 ϕ は、 η に lifting $\tilde{\phi}$ をもつ。これは、次のことを意味する。
 $E(\eta)$ を η の total space とするとき、 $E(\eta)$ の上の

smooth な S^1 -作用 $\tilde{\phi}: S^1 \times E(\eta) \rightarrow E(\eta)$ で,

$\forall s \in S^1$ に対し $\tilde{\phi}(s, \cdot)$ が bundle map を与え

かつ、次の図式

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times E(\eta) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & E(\eta) \\ \downarrow 1 \times g & \circlearrowleft & \downarrow g \\ S^1 \times X & \longrightarrow & X \end{array}$$

が、可換となるようなものが存在する (g は projection).

$p_j \in F_j$ とすれば、 $\tilde{\phi}$ は ファイバー $g^{-1}(p_j)$ に 1次元の複素表現 (S^1 の) を誘導する。 $t: S^1 = U(1)$ を標準的な S^1 の表現とみなせば、 $g^{-1}(p_j)$ 下の表現は、 t^{a_j} (a_j は整数) とかかれる。これを、我々は、 $\tilde{\phi}|_{p_j} = t^{a_j}$ とあらわす。このようにして、 ϕ の lifting (η 下の) $\tilde{\phi}$ があれば、整数の組 $\{a_j\}$ がきまる。

$\mathbb{Z}_k \subset S^1$ を位数 k の部分群とする。 $F(\mathbb{Z}_k) \subset X$ を $F(\mathbb{Z}_k) = \{x \in X \mid G_x \supset \mathbb{Z}_k\}$ と定義する。明らかに、

$$F(\mathbb{Z}_k) \supset F.$$

命題 1.2 (T. Retzke [4])

$\{a_j\}$ は次の性質をもつ。

1). $i \neq j$ とする。 $a_i - a_j \neq 0$ で、かつ、これは ϕ と η のみに depend し、 $\tilde{\phi}$ のとり方によらない。

2). p^r を素数の中とする. F の 2 つの (異なる) 連結成分 F_i, F_j に対し. $a_i - a_j \equiv 0 \pmod{p^r} \Leftrightarrow F_i$ と F_j は, $F(\mathbb{Z}_{p^r})$ の同じ連結成分に含まれる。

§3. 固定点の性質

この § 以下, semi-free な S^1 -作用のみを扱う。

$\phi: S^1 \times X \rightarrow X$ を, coh. $\mathbb{C}P^n$ X 上の, smooth, semi-free な S^1 -作用とする. F を ϕ の固定点とする。

。

命題 2.1.

F は丁度 2 つの連結成分からなる。

証明

命題 1.1 から, F は 2 つ以上の連結成分をもつ. ~~###~~
 F が 3 つ以上の連結成分をもったとし, F_1, F_2, F_3 を相異なる連結成分とする. $\mathbb{C}$ における ϕ の lifting $\bar{\phi}$ を適当にとる. §2 のへたように, 3 つの数の組 $\{a_1, a_2, a_3\}$ を得る. 命題 1.2 から, $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$). 故に, ある, $1 \leq i < j \leq 3$ に対し, $a_i - a_j$ はある素数 $p \geq 2$ でわられる. 命題 1.2, 2) から, F_i と F_j は, 同じ $F(\mathbb{Z}_p)$ の連結成分に含まれ, $F(\mathbb{Z}_p) \neq F$ 下 ϕ が semi-free であることに矛盾する. q.e.d.

さて、 F_0 と F_1 も、 F の 2 つの連結成分とする。命題 1.1 により、 F_0 と F_1 は 各々 $\text{coh. } \mathbb{CP}^p$, $\text{coh. } \mathbb{CP}^q$, $p+q=n-1$ となる。 α_j も α の F_j への制限とすれば、 α_j が F_j の コホモロジー生成元となる ($j=0,1$)。 $\widehat{\phi}$ も γ での ϕ の *lifting* とする。 $\widehat{\phi}|_{P_j} = t^{a_j}$ ($j=0,1$) とする。命題 1.2 と *semi-free* (ϕ が) であることから、 $|a_1 - a_0| = 1$ となる。そこで我々は、次のことを仮定する。

仮定 (*) $a_1 - a_0 = +1$

$\widehat{X}$ を γ の *sphere bundle* (適当な *metric* のもとに) とする。 $g: \widehat{X} \rightarrow X$ を *projection* とすれば、 g は X の上の *principal* S^2 -*bundle* となる。 X の部分集合 $A \subset X$ に対して、 $g^{-1}(A)$ を $\widehat{A}$ であらわすことにする。

補題 2.2

$$H^*(\widehat{X}; \mathbb{Z}) \cong H^*(S^{2p+1}; \mathbb{Z}), \quad H^*(\widehat{F}_0; \mathbb{Z}) \cong H^*(S^{2p+1}; \mathbb{Z})$$

$$H^*(\widehat{F}_1; \mathbb{Z}) \cong H^*(S^{2q+1}; \mathbb{Z})$$

証明

Gysin 完全系列 による。

g.e.d

補題 2.3

$\widehat{F}_0$ と $\widehat{F}_1$ の $\widehat{X}$ における *linking* 数は ± 1 。

証明

同変コホモロジー論とその localization によって、証明される。
g.e.d.

さて、 N_j を X における F_j の normal bundle とする。 N_0 の fibre の次元は $2(g+1)$, N_1 の fibre の次元は $2(p+1)$ である。 S^2 は N_j に bundle 自己同型写像によって作用する。この作用は、0-section を除いて、free である。 N_0 と N_1 に複素 vector bundle としての構造を、各々の fibre 下の S^2 の表現が、 $\underbrace{t+\dots+t}_{g+1}$,
 $\underbrace{t+\dots+t}_{p+1}$ となるように入れる。この複素構造によって、

N_0 と N_1 を複素 vector bundle とみなす。

命題 2.4

$c(N_j)$ を N_j の total Chern class とする。このとき、

$$c(N_0) = (1 - \alpha_0)^{g+1}, \quad c(N_1) = (1 + \alpha_1)^{p+1}$$

となる。ここに α_j は α の F_j への制限。

§4. Index formula.

$K_S^*(X)$ を X の equivariant K -theory とする。

X が coh. $\mathbb{C}P^n$ であれば、 n が odd のとき、 X は spin-多様体、 n が even のときは、 X は spin^c-多様体としての構造をもつ。このことにより、 TX を X の接 vector bundle とすれば、 $K_S^*(TX)$ に orientation class $\delta_{S^1} \in K_S^*(TX)$ が存在して (T. Petrie [4])、Thom 同型 $K_S^*(X) \rightarrow K_S^*(TX)$ が $u \mapsto u \cdot \delta_{S^1}$ ($u \in K_S^*(X)$) で定義される。 TX が almost complex な構造をもつことから、Index homomorphism $\text{Id}: K_S^*(TX) \rightarrow R(S^1)$ ($R(S^1)$ は S^1 の複素表現環) が定義される ([1])。我々は、 X の上の semi-free S^1 -作用の場合に、 $\text{Id}(u \cdot \delta_{S^1})$ を、固定点 F の情報を用いて、次にあらわす。

$\phi: S^1 \times X \rightarrow X$ を coh. $\mathbb{C}P^n$ 、 X の上の smooth semi-free S^1 -作用とする。 ϕ と同様に $F = F_0 \cup F_1$ とする。

(i) n が odd のとき。

η を α に associate した line bundle とし、 η の ϕ の lifting $\tilde{\phi}$ で $\tilde{\phi}|_{p_0} = \text{id}$, $\tilde{\phi}|_{p_1} = t$ ($p_0 \in F_0$) となるものを取り、この S^1 -作用によって、 η を S^1 -bundle とみなす。

命題 3.1.

$\text{Id}(\eta^k \delta_{S^1}) \in R(S^1) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ は、次の式で与えられ

る (ここに γ^k は γ の k 回 tensor 積).

$$\text{Id}(\gamma^k \delta_{S'}) =$$

$$\left\langle e^{k\alpha_0} \hat{A}(F_0) (t^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\alpha_0}{2}} - t^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha_0}{2}})^{-(g+1)} t^{\frac{w}{2}}, [F_0] \right\rangle$$

+

$$\left\langle e^{k\alpha_1} \hat{A}(F_1) (t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha_1}{2}} - t^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\alpha_1}{2}})^{-(p+1)} t^{k+\frac{w}{2}}, [F_1] \right\rangle$$

ここに $\hat{A}(F_j)$ は F_j の A -class, $[F_j]$ は F_j の基本類, $\langle, \rangle$ は evaluation をあらわす。又、 w は $p, q \not\equiv 0 \pmod{2}$ ならば $w \equiv 0 \pmod{2}$, $p, q \equiv 0 \pmod{2}$ ならば $w \not\equiv 0 \pmod{2}$ となるような整数である。(w は X の spin 構造 P (X の上の spin-bundle で $P \times_{\text{spin}} \mathbb{R}^{2n} \cong TX$ となるもの) への S^2 -作用の lifting にともなってあらわれる数である)。

又、とくに $1 \in S^2$ (単位元) に対しては、

$$\text{Id}(\gamma^k \delta_{S'})(1) = \langle \text{ch } \gamma^k \hat{A}(X), [X] \rangle \quad \text{となることを注意する。}$$

n が even の場合も同様な式が得られる。

§5. 定理 0.1 の証明

最初に, $\mathbb{CP}^n$ の上の linear semi-free S^1 -作用, Φ を
 $\Phi(t, [z_0, \dots, z_n]) = [z_0, \dots, z_p, tz_{p+1}, \dots, tz_n]$
 $(t \in S^1, [z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{CP}^n)$ で定義する。 Φ の固定
 点は $F_0 = \mathbb{CP}^p \cup F_1 = \mathbb{CP}^q$ ($q = n-1-p$) となる。 N_j を
 F_j の normal bundle とし, N_j に §3 に述べた様に
 複素 vector bundle としての構造を入れる。このとき, H
 を canonical Hopf bundle とすれば, $N_0 = \underbrace{\overline{H} + \dots + \overline{H}}_{q+1}$,
 $N_1 = \underbrace{H + \dots + H}_{p+1}$ となる ($\overline{H}$ は H の conjugate bundle)。

indeterminant X に対し, $A(X) = (X/2)(\sinh X/2)^{-1}$
 とおく。定理 0.1 を証明するに, $\hat{A}(X) = A(X)^{n+1}$ と
 なることがいえる。

補題 4.1.

$$\hat{A}(X) = A(X)^{n+1} \iff \hat{A}(F_0) = A(\alpha_0)^{p+1}, \hat{A}(F_1) = A(\alpha_1)^{q+1}.$$

証明

($\Rightarrow$) $\hat{A}(X) = A(X)^{n+1}$ を仮定する。命題 2.4) によつて,
 $A(N_0) = A(\alpha_0)^{q+1}$, $\hat{A}(N_1) = A(\alpha_1)^{p+1}$ である。 $i_j: F_j \hookrightarrow X$
 を包含写像とすれば, $i_j^* \hat{A}(X) = \hat{A}(F_j) \hat{A}(N_j)$ から,
 $\hat{A}(F_0) = A(\alpha_0)^{p+1}$, $\hat{A}(F_1) = A(\alpha_1)^{q+1}$ を得る。

($\Leftarrow$) $\hat{A}(F_0) = A(\alpha_0)^{p+1}$, $\hat{A}(F_1) = A(\alpha_1)^{q+1}$ を仮定する。

$c = c_2(H) \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ とし, $f: X \rightarrow \mathbb{C}P^n$ を $f^*(c) = \alpha$ となるような連続写像とする。 $f^*H = \eta$ とする。

単位元 $1 \in S^2$ に対し, $\text{Id}(\eta^k \delta_{j^1})(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \text{Id}(\eta^k \delta_{j^1})(t)$ であり, 右辺は, §4 に与えられた公式により計算される。 F_0 が $\text{coh. } \mathbb{C}P^p$, F_1 が $\text{coh. } \mathbb{C}P^q$ で α_j が F_j のコホモロジー-生成元であることから, 命題 3.1 に与えられた公式の右辺は, $\mathbb{C}P^n$ の上の linear action Φ と $\text{Id}(H^k \delta_{j^1})$ に対応する公式と形式的に一致するといわれる。従って,

$$\text{Id}(\eta^k \delta_{j^1})(1) = \text{Id}(H^k \delta_{j^1})(1) \quad (\text{for each } k) \text{ を得る。}$$

$$\text{又, } \text{Id}(\eta^k \delta_{j^1})(1) = \langle \text{ch } \eta^k \hat{A}(X), [X] \rangle \quad \text{より,}$$

$$\begin{aligned} \text{Id}(H^k \delta_{j^1})(1) &= \langle \text{ch } H^k \hat{A}(\mathbb{C}P^n), [\mathbb{C}P^n] \rangle \\ &= f^* \langle \text{ch } H^k \hat{A}(\mathbb{C}P^n), [\mathbb{C}P^n] \rangle \\ &= \langle \text{ch } \eta^k A(\alpha)^{n+1}, [X] \rangle. \end{aligned}$$

$$\text{故に, } \langle \text{ch } \eta^k \hat{A}(X), [X] \rangle = \langle \text{ch } \eta^k A(\alpha)^{n+1}, [X] \rangle$$

(for each k) を得る。

$\{\text{ch } \eta^k, k=0, 1, \dots, n\}$ は $H^*(X; \mathbb{Q})$ の additive base であるから, $\hat{A}(X) = A(\alpha)^{n+1}$ となる。 f.e.d.

上の補題により, 定理 0.1 を証明するには $\hat{A}(F_0) = A(\alpha_0)^{p+1}$, $\hat{A}(F_1) = A(\alpha_1)^{q+1}$ を証明すればよい。 $S(\alpha) = \hat{A}(X) A(\alpha)^{-(n+1)}$

とおく。 $S(\alpha)$ は有理係数の α^2 の中級数である。 $S(\alpha)$ の leading term が 1 であることはすぐわかるから、

$$S(\alpha) = 1 + b_1 \alpha^2 + b_2 \alpha^4 + \dots \quad (b_i \in \mathbb{Q}) \quad \text{とおく。} \quad S(\alpha) = 1$$

かゝる α はよい。 $\hat{A}(X) = S(\alpha) A(\alpha)^{n+1}$ であり、

$$\hat{A}(F_j) = i_j^* \hat{A}(X) \hat{A}(N_j)^{-1} \quad \text{であることから、} \quad \hat{A}(F_0) =$$

$$S(\alpha_0) A(\alpha_0)^{p+1}, \quad \hat{A}(F_1) = S(\alpha_1) A(\alpha_1)^{q+1} \quad \text{となる。} \quad \text{ここから}$$

$$S(\alpha_j) = 1 + b_1 \alpha_j^2 + b_2 \alpha_j^4 + \dots \quad \text{である。}$$

補題 4.2.

$$S(\alpha) = 1 \iff S(\alpha_0) = S(\alpha_1) = 1.$$

これは 補題 4.1 の $\Leftarrow$ の部分である。 $S(\alpha_0) = S(\alpha_1) = 1$ を証明するには、 §4 に与えた $\text{Id}(\pi^* \delta_{\mathcal{S}^{-1}})$ の公式が finite Laurent 級数であることから、 $b_1 = b_2 = \dots = 0$ を出すのであるが、詳細は略する。

References

- [1] M.F. Atiyah and I.M. Singer : The index of elliptic operators I, Ann. of Math., 87, (1968), 484-530.
- [2]. G.E. Bredon : The cohomology ring structure of a fixed point set, Ann. of Math., 80 (1964) 524-537

- [3] D. Montgomery and C.T. Yang : Free differentiable actions on homotopy seven spheres II. Proc Conference on Transformation Groups , 125-134, Springer , New York , 1968.
- [4] T. Petric : Smooth S^1 actions on homotopy complex projective spaces and related topics, Bull. of Amer. Math. Soc. 78 (1972), 105-153
- [5] J.C. Su : Transformation groups on cohomology projective spaces , Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 305 - 318.