

不定方程式 $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ について

東女大・文理 山本幸一

1. 以下特にことわらない限り文字は自然数を表わす.

分数 $\frac{a}{n}$ は高々 a 個の相異なる単位分数の和である. このことは Fibonacci, Sylvester 以来よく知られた結果である. また, そこに現われる最大の分母を $n(n-1)$ で抑えることが出来ることも Farey 数列の理論等から知られている. ([1] 参照)

われわれは各単位分数の相異なるという制限を落として, ただ $\frac{a}{n}$ をいくつかの単位分数の和に分解する問題を考える.

既約分数 $\frac{2}{n}$ は 2 個の単位分数の和である. $\frac{3}{n}$ は 2 個の単位分数の和であることもあり, また 3 個の単位分数の和にしかならないこともある.

補題 1. 既約分数 $\frac{a}{b}$ が 2 個の単位分数の和になるために必要かつ十分な条件は, $a \mid r+s$, $rs \mid b$ を満たす r, s の存在することである.

[証明] $\frac{a}{b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ で $(x, y) = d$, $x = dx_0$, $y = dy_0$ とすれば,

$$\frac{a}{b} = \frac{x_0 + y_0}{d x_0 y_0} \quad \text{ここで } d \text{ が既約分数だから } a | x_0 + y_0. \quad \text{また } \frac{da}{b} = \frac{x_0 + y_0}{x_0 y_0}$$

の右辺が既約分数だから $x_0 y_0 | b$.

補題 2. 既約分数 $\frac{a}{b}$ を単位分数 2 個の和に表わす方法 (順序を区別する) の数は, $r \equiv -b \pmod{a}$, $r | b^2$ なる r の個数 $\tau_a(b^2)$ に等しい.

[証明] $\frac{a}{b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ならば $axy = b(x+y)$, $(ax-b)(ay-b) = b^2$ で,
 $ax-b=r$ は $r > 0$, $r \equiv -b \pmod{a}$ をみたす r^2 の約数であり, 逆に
 そのような r から $x = \frac{b+r}{a}$ とおいて解を得る.

たとえば $n = p_1 p_2 \cdots p_r$ で各 p_i が素数 $\equiv 1 \pmod{3}$ ならば, $\frac{3}{n}$ は 2 個の単位分数の和にはならない.

次に $a=4$ の場合 $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ は, $n > 1$ について常に解けることを P. Erdős と E. G. Straus は推測したのであるが, この問題は現在まだ解決されてはいない. 実験的には $n < 10^8$ までは成立することが確かめられている.

$a=5, 6$ についても同様に $\frac{a}{n}$ が $n > 1$ の時 3 個の単位分数の和になるものと推測される. $\frac{8}{n}$ はたとえば $n=11$ について 3 個の単位分数の和ではない.

a が与えられたとき $\frac{a}{n}$ は有限個の例外値を除き, 任意の n について 3 個の単位分数の和になると A. Schinzel は予想している.

また a を動かせば 3 個の単位分数の和にならない $\frac{a}{n}$ は ~~定~~

限に多く存在する. ([3])

2. 不定方程式

$$(*) \quad \frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

で, n が偶数ならば $a=2$ の場合に帰着して解はいつもあるから, 始めから n は奇数 >1 とあると仮定する.

$x > \frac{n}{4}$ は明白であるが, $x \leq y \leq z$ であるとするれば $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$ より $x \leq \frac{3n}{4}$. ゆえに $x = \frac{n+s}{4}$ とおけば $0 < s < 2n$ で, x を固定したとき

$$\frac{4}{n} - \frac{1}{x} = \frac{s}{n \cdot \frac{n+s}{4}}$$

を2つの単位分数の和に書く方法の数が $\tau_s(n^2 x^2)$ だから, 不定方程式 $(*)$ の解の総数は

$$\sum_{\substack{0 < s < 2n \\ s \equiv -n \pmod{4}}} \tau_s\left(n^2 \left(\frac{n+s}{4}\right)^2\right) < \infty.$$

3. また一般性を失うことなく $n=p$ は素数と考えてもよい. その際, 次の2つの型に分類される:

$$(I) \quad \frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{py} + \frac{1}{pz}, \quad xyz \not\equiv 0 \pmod{p},$$

$$(II) \quad \frac{4}{p} = \frac{1}{px} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad xyz \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Mordell [2] が著者の前論文 [4] を紹介するに当って, 合同条件 (I) の $xyz \not\equiv 0$ に, 疑義をさしはさんでいるようだが, それはそのままよい. 念のため詳しく説明してみると, ともか

(*) $x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod{p}$ は不可能, また $xyz \not\equiv 0 \pmod{p}$ も不可能であるから, x, y, z のうち 1 個又は 2 個が p で割られる. 前の場合 $\frac{4}{p} = \frac{1}{px} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, $yz \not\equiv 0 \pmod{p}$ ならば $\frac{4}{p} - \frac{1}{px} = \frac{4x-1}{px} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ の分母が p で割れないので $p \mid 4x-1$. ゆえに $x \not\equiv 0 \pmod{p}$. また後の場合 $\frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{py} + \frac{1}{pz}$, $x \not\equiv 0 \pmod{p}$ ならば, $d = (y, z)$, $y = dy_0$, $z = dz_0$ とおいて $\frac{4}{p} - \frac{1}{x} = \frac{4x-p}{px} = \frac{1}{pd} \left(\frac{1}{y_0} + \frac{1}{z_0} \right)$, $\frac{4x-p}{x} = \frac{y_0+z_0}{dy_0z_0}$, $\frac{d(4x-p)}{x} = \frac{y_0+z_0}{y_0z_0}$ で右辺が既約分数だから $x = y_0z_0s$, $d(4x-p) = (y_0+z_0)s$ となる. 特に $s \not\equiv 0 \pmod{p}$. ゆえに $s \mid p$ と $s \mid (4x-p)d$ より $s \mid pd$, $s \mid d$ を得る. 今 $d = d_0s$ とおけば $y_0+z_0 = d_0(4x-p)$. さて $y \equiv 0 \pmod{p}$ が成立つと仮定すれば, $y_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$ より $d = d_0s \equiv 0 \pmod{p}$, $d_0 \equiv 0 \pmod{p}$ となる. ゆえに $d_0 \geq p$ で, $u(4x-u) \geq 4x-1$ ($0 < u < 4x$) より

$$x = y_0z_0s \geq y_0z_0 \geq y_0+z_0-1 = d_0(4x-p)-1 \geq p(4x-p)-1 \geq 4x-1-1=4x-2,$$

$3x \leq 2$ なる矛盾を生ずる. よって $y \not\equiv 0 \pmod{p}$. また $z \not\equiv 0 \pmod{p}$.

4. 定理 1. (I) に解があるための必要かつ十分条件は

$$p \equiv -g \pmod{4rs}, \quad r+s \equiv 0 \pmod{g}$$

を満たす g, r, s の存在することである.

[証明] $\frac{4}{p} - \frac{1}{x} = \frac{4x-p}{px} = \frac{1}{p} \frac{4x-p}{x}$ で, $\frac{4x-p}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ならば $g = 4x-p$, $x = \frac{p+g}{4}$ について $\frac{g}{\frac{p+g}{4}}$ が 2 つの単位分数の和で, 補題 1 から $g \mid r+s$, $rs \mid \frac{p+g}{4}$ なる r, s の存在に帰着する.

定理 2. (II) に解があるための必要かつ十分条件は

$$pq \equiv -1 \pmod{4rs}, \quad r+s \equiv 0 \pmod{g}$$

を満足す q, r, s の存在することである.

[証明] $\frac{4}{p} - \frac{1}{px} = \frac{4x-1}{px} = \frac{q}{x} = \frac{q}{\frac{pq+1}{4}}$, $q = \frac{4x-1}{p}$ に補題 1 を適用して
 $q|r+s$, $rs \mid \frac{pq+1}{4}$ なる r, s の存在に帰着する.

定理 1 及び定理 2 で $q=r=s=1$ を考えれば

$$p \equiv -1 \pmod{4}$$

なる時は (I) にも (II) にも解がある. 故にこれより後は,
 $p \equiv 1 \pmod{4}$ なる p だけを考察することにする.

定理 3. (II) に解があるための必要かつ十分条件は,

$$q \equiv -1 \pmod{4}, \quad rs \mid \frac{q+1}{4}, \quad r+sp \equiv 0 \pmod{q}$$

を満足する q, r, s の存在することである. また

$$q \equiv -1 \pmod{4}, \quad rs \mid \frac{q+1}{4}, \quad 4r^2s + p \equiv 0 \pmod{q}$$

を満足する q, r, s の存在することもある.

[証明] $\frac{4}{p} - \frac{1}{px} = \frac{4x-1}{px} = \frac{q}{p \frac{q+1}{4}}$, $q = 4x-1$ に補題 1 を適用すると
 $rs \mid \frac{q+1}{4}$, $r+sp \equiv 0 \pmod{q}$ なる r, s の存在に帰着する.

$$r$$
 の代りに $t \mid \frac{q+1}{4}$ なる $\frac{q+1}{4t}$ を取れば, $\frac{q+1}{4t} + sp \equiv 0 \pmod{q}$,

$$s \frac{q+1}{4t} \mid \frac{q+1}{4} \quad \text{は} \quad s \mid t, \quad 1+4tsp \equiv 0 \pmod{q} \quad \text{と同値な条件であるが,}$$

$$t=sr \quad \text{とあって,} \quad rs \mid \frac{q+1}{4}, \quad 1+4r^2s + p \equiv 0 \pmod{q} \quad \text{と同値になる.}$$

定理 4. (I) に解があるための必要かつ十分条件は

$$q \equiv -1 \pmod{4}, \quad rs \mid \frac{p+q}{4}, \quad r+sp \equiv 0 \pmod{q}$$

を満足する q, r, s の存在することである. また

$$q \equiv -1 \pmod{4}, \quad rs \mid \frac{p+q}{4}, \quad 4r^2s + p \equiv 0 \pmod{q}$$

を満足する q, r, s の存在することである.

[証明] $\frac{4}{p} - \frac{1}{2} = \frac{4x-p}{px} = \frac{q}{p \frac{p+q}{4}}$ に補題 1 を適用すれば $rs \mid \frac{p+q}{4}$,

$r+sp \equiv 0 \pmod{q}$ なる r, s の存在に帰着する.

r の代りに $t \mid \frac{p+q}{4}$ なる $\frac{q+1}{4t}$ を取れば, $\frac{q+1}{4t} + sp \equiv 0 \pmod{q}$,

$s \frac{q+1}{4t} \mid \frac{q+1}{4}$ は $s \mid t$, $p+4ts \equiv 0 \pmod{q}$ と同値であるが, $t=rs$

とおいて $rs \mid \frac{p+q}{4}$, $p+4rs^2 \equiv 0 \pmod{q}$ と書ける.

5. $n \equiv 1 \pmod{4}$ なる自然数の全体を $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1$ と表わし, また

$n \equiv 1 \pmod{4L}$ を満たす自然数の全体を $\mathcal{N}_L$ と書く.

さらに $\mathcal{N}_L$ の中で合同条件 $n \equiv k \pmod{m}$ を満足するものの

全体を '被覆' と総称し, 記号 $\left\{ \frac{k}{m} \right\}$ で表わすことにする.

定理 1, 定理 2 等は $n \in \mathcal{N}_L$ の中に制限する. ようして, 定

理 1 等は

$$E_2(r, s) = \left\{ \frac{-q}{4rs} \right\}, \text{ ただし } q \mid r+s, q \equiv -1 \pmod{4},$$

定理 2 等は

$$E'_2(r, s) = \left\{ \frac{-1/q}{4rs} \right\}, \text{ ただし } q \mid r+s, q \equiv -1 \pmod{4},$$

定理 3 等は

$$F_2(r, s) = \left\{ \frac{-r/s}{q} \right\}, \text{ ただし } rs \mid \frac{q+1}{4}, q \equiv -1 \pmod{4},$$

$$G'_2(r, s) = \left\{ \frac{-1/4r^3}{q} \right\}, \text{ ただし } rs \mid \frac{q+1}{4}, q \equiv -1 \pmod{4}$$

とおく. 素数 $p \in \mathcal{N}_L$ がこれら被覆の一つに属するならば (*)

は解をもつことを定理 1 D 至るは示している.

定理 4 等は $p \equiv 1 \pmod{4L}$ なる素数, すなわち $p \in \mathcal{N}_L$ を考察

する。そして

$$F_2(r, s) = \left\{ \frac{-r/s}{q} \right\}, \quad \text{ただし } rs \mid \frac{q+1}{4}, \quad q \equiv -1 \pmod{4L},$$

$$G_2(r, s) = \left\{ \frac{-4r^2s}{q} \right\}, \quad \text{ただし } rs \mid \frac{q+1}{4}, \quad q \equiv -1 \pmod{4L}$$

とおく。 $p \in \mathcal{M}_L$ はこれらの被覆のどれかに属する時 (*) の解を生ずる。

特に $F_3(1, 1) = \left\{ \frac{-1}{3} \right\}$ は $n \equiv -1 \pmod{3}$ なる n を被覆し、また $E_3(1, 2) = \left\{ \frac{-3}{8} \right\}$ は $n \equiv 5 \pmod{8}$ なる n を覆って、これらの $p=n$ に対しては (*) に解を生ずるから、われわれは (*) の可解性に代しては

$$p \equiv 1 \pmod{24}$$

なる素数 p だけを考慮すればよい。すなわち $\mathcal{M}_6$ の中の p だけを取扱えばよいことになる。

6. $q=7$ については $F_7(1, 1) = \left\{ \frac{-1}{7} \right\}$, $F_7(2, 1) = \left\{ \frac{-2}{7} \right\}$, $F_7(1, 2) = \left\{ \frac{-4}{7} \right\}$.
従って 7 の平方非剰余なる n については (*) が解けるので、
ゆめから $n=p$ は 7 の平方剰余と考えてよい。同様に $q=15$ については $F_{15}(1, 1) = \left\{ \frac{-1}{15} \right\}$, $F_{15}(2, 1) = \left\{ \frac{-2}{15} \right\}$, $F_{15}(4, 1) = \left\{ \frac{-4}{15} \right\}$, $F_{15}(1, 2) = \left\{ \frac{-8}{15} \right\}$ であるが、 $\mathcal{M}_6$ の中では $\left\{ \frac{-1}{15} \right\} = \left\{ \frac{-4}{15} \right\} = \emptyset$ (空集合) で、 $\left\{ \frac{-2}{15} \right\} = \left\{ \frac{-2}{5} \right\}$, $\left\{ \frac{-8}{15} \right\} = \left\{ \frac{-3}{5} \right\}$ だから、 p はまた 5 の平方剰余であると考えてよい。つまり $n=p$ は $\text{mod } 840$ の平方剰余と考えてもよい:

$$n \equiv 1, 121, 361, 169, 289, 529 \pmod{840}.$$

$\mathcal{M}_6$ に対する被覆 $E_2(r, s)$, $E'_2(r, s)$, $F_2(r, s)$, $G_2(r, s)$, $G'_2(r, s)$ のうち、分母を q とした時 $\left\{ \frac{-s}{q} \right\}$ の形に直して 3 乃至 97 の素数

値 q に対する s を表にまとめると次のようになる。

q	s
3	1
5	2, 3
7	1, 2, 4
11	1, 3, 4
13	2, 5, 7, 8
17	3, 5, 6, 7
19	1, 4, 5, 7, 11
23	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 13, 16
29	2, 3, 8, 10, 11, 15
31	1, 2, 4, 7, 8, 9, 16
37	2, 5, 8, 14, 15, 19
41	3, 6, 7, 11, 14, 15
43	1, 4, 11, 15, 23
47	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 16, 17, 24, 25, 27, 32, 36
53	2, 3, 5, 8, 18, 20, 23, 27, 30, 32
59	1, 3, 4, 5, 7, 12, 15, 17, 20, 36, 41
61	2, 7, 8, 23, 31, 35
67	1, 4, 9, 15, 17, 23, 35
71	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 37, 40, 48
73	5, 7, 11, 15, 20, 21, 39, 44
79	1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 21, 23, 32, 40, 42, 55, 64
83	1, 3, 4, 7, 12, 21, 28, 30, 36
89	3, 6, 7, 15, 23, 30, 31, 51
97	5, 7, 13, 14, 15, 39

また $E_q(r, s), E'_q(r, s)$ から生ずる $\left\{\frac{-s}{q}\right\}, \left\{\frac{-1/s}{q}\right\}$ は次のようになる。

s	q
3	$q \equiv -1 \pmod{3}$
7	$q \equiv -1, -2, -4 \pmod{7}$
11	$q \equiv -1, -3, -4 \pmod{11}$
15	$q \equiv -1, -2, -8 \pmod{15}$
19	$q \equiv -1 \pmod{19}$
23	$q \equiv -1, -2, -3, -4, -6, -8, -12, -13, -16 \pmod{23}$
27	$q \equiv -1 \pmod{27}$
31	$q \equiv -1, -2, -16 \pmod{31}$
35	$q \equiv -1, -3, -12 \pmod{35}$
39	$q \equiv -1, -2, -20 \pmod{39}$
43	$q \equiv -1 \pmod{43}$
47	$q \equiv -1, -2, -3, -6, -8, -16, -24, -25, -32 \pmod{47}$
51	$q \equiv -1 \pmod{51}$
55	$q \equiv -1, -2, -28 \pmod{55}$
59	$q \equiv -1, -3, -20 \pmod{59}$
63	$q \equiv -1, -2, -32 \pmod{63}$
67	$q \equiv -1 \pmod{67}$
71	$q \equiv -1, -2, -3, -6, -12, -24, -36, -37, -48 \pmod{71}$
75	$q \equiv -1 \pmod{75}$
79	$q \equiv -1, -2, -40 \pmod{79}$
83	$q \equiv -1, -3, -28 \pmod{83}$
87	$q \equiv -1, -2, -44 \pmod{87}$
91	$q \equiv -1 \pmod{91}$
95	$q \equiv -1, -2, -3, -6, -16, -32, -48, -49, -64 \pmod{95}$
99	$q \equiv -1 \pmod{99}$

さらに $F_q(r, s)$, $G_q(r, s)$, $G'_q(r, s)$ から生ずる被覆は一般に次表で与えられる。

	s	q
L=1	1	$q \equiv -1 \pmod{4}$
	4, 1/4	$q \equiv -1 \pmod{4}$
L=2	2, 1/2	$q \equiv -1 \pmod{8}, q \equiv 5 \pmod{8}$
	8, 1/8	$q \equiv -1 \pmod{8}, q \equiv 5 \pmod{8}$
	16, 1/16	$q \equiv -1 \pmod{8}$
L=3	3, 1/3	$q \equiv -1 \pmod{12}$
	12, 1/12	$q \equiv -1 \pmod{12}$
	36, 1/36	$q \equiv -1 \pmod{12}$
L=6	6, 1/6	$q \equiv -1 \pmod{24}$
	3/2, 2/3	$q \equiv -1 \pmod{24}$
	24, 1/24	$q \equiv -1 \pmod{24}$
	48, 1/48	$q \equiv -1 \pmod{24}$
	72, 1/72	$q \equiv -1 \pmod{24}$
	144, 1/144	$q \equiv -1 \pmod{24}$

7. われわれの被覆 E, E', F, G, G' は $\mathcal{R}_6$ つまり $n \equiv 1 \pmod{24}$ なる凡ての自然数 > 1 を覆うのとはなる。

定理 5. 被覆 $E_q(r, s), E'_q(r, s), F_q(r, s), G_q(r, s), G'_q(r, s)$ は、完全平方数を含むことはできない。

その証明は Legendre の記号, あるいはその拡張である Jacobi 記号, Kronecker 記号 を使って検証によって得られるのである。

るが詳細はここでは省略する ([4] 参照) .

8. 不定方程式 (*) が解けない素数 $p \equiv 1 \pmod{24}$ があるならば, 被覆 F, G, G' から

$p+1, p+4, 4p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{4}$ なる素因数をもたない.

$p+2, 2p+1, p+8, 8p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{8}$ なる素因数も, また $q \equiv 5 \pmod{8}$ なる素因数ももたない.

$p+16, 16p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{8}$ なる素因数をもたない.

$p+3, 3p+1, p+12, 12p+1, p+36, 36p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{12}$ なる素因数をもたない.

$p+6, 6p+1, 2p+3, 3p+2, p+24, 24p+1, p+48, 48p+1, p+72, 72p+1, p+144, 144p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{24}$ なる素因数を持たない.

さらに, 被覆 E, E' から

$p+3, 3p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{3}$ なる素因子を持たない.

$p+7, 7p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{7}, q \equiv -2 \pmod{7}, q \equiv -4 \pmod{7}$ なる素因数をもたない.

$p+11, 11p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{11}, q \equiv -3 \pmod{11}, q \equiv -4 \pmod{11}$ なる素因数をもたない.

..... その始めの方の値が前 § の p. 9 に与えた表に示されている.

電子計算機による計算では, あらかじめ q を 11 から 97 までの素数として q による π の剰余が p. 8 の表に示された値に

なるものを除く。 $n \leq 10^8$, $n \equiv 1 \pmod{24}$ なる約 42 万個のうちほぼ 40 分の 1 が残る。それらに被覆 F, G, G' による判定を、引続いて E, E' による判定を行なう。結果は完全平方数だけが最後に残留し、残留したものは凡て完全平方数であった。従って不定方程式 (*) は $1 < n \leq 10^8$ なる n について解を持つことが確かめられたことになる。なお素数性は考慮していないので、結果はまた $n \leq 10^8$ なる非完全平方数 n はある被覆 E, E', F, G, G' に含まれることを示している。故にこの事実が凡ての非完全平方数について成立つものと予想される。

9. 最後に不定方程式 $\frac{5}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ について一言述べる。この問題に対しても同様、被覆 E, F, G が作られるが、なおその外に、 $H_2(p, s)$ なる新しい被覆が現われる：

$$r + sp^2 \equiv 0 \pmod{q}, \quad \text{ただし } 15 \mid \left(\frac{q+1}{5}, 252 \right).$$

このような事情のため、始めから

$$p \equiv 1 \pmod{278460}, \quad 278460 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$$

なる p だけを取り扱えばよい。 $\text{mod } 12168720 = 19 \cdot 23 \cdot 278460$ では 9 個の剰余類しか残らない。すなわち ' n が小さい' 所では $\frac{5}{n}$ の方が $\frac{4}{n}$ よりも始末がいいようである。しかし、 $\frac{4}{n}$ では完全平方数が凡て残留するのに、 $\frac{5}{n}$ の場合凡ての被覆 E, F, G, H をくぐり抜ける数がどんな数であるのか、興味ある問題であるが、現在のところ筆者にはまだ特定できない。

$\frac{4}{n}$ の場合が難しく, しかも 2 次体の整数論に密着していることは事実で, この問題を $\frac{4}{n}$ に限定して提出した Erdős の洞察力には驚歎せざるを得ない.

文献

- [1] M. N. Bleicher and Paul Erdős; Denominators of Egyptian fractions, *Journ. of Number Theory*, vol. 8 (1976), pp. 157-168.
- [2] L. J. Mordell; *Diophantine Equations*, Academic Press, 1969.
- [3] K. Yamamoto; On a conjecture of Erdős, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, vol. 18 (1964), pp. 166-167.
- [4] K. Yamamoto; On the Diophantine equation $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, vol. 19 (1965), pp. 37-47.