

Yang-Baxter 方程式の紹介

京大数理研 神保 道夫

Jimbo, Michio

§ 0. はじめに

Yang-Baxter 方程式は、もともと統計物理学や場の量子論における可解模型の基本方程式としてこの 20 年間盛んに研究されてきたが、最近になって数学の他の諸分野との関連が生じたことから、多くの人達の興味をひくようになりつつある。本稿は Yang-Baxter 方程式について入門的な解説を試みたものである。

Yang-Baxter 方程式がはっきりした形で文献に現れたのは、1964 年の McGuire の論文 [3] が最初であろうと思われる。彼は $c \sum \delta(x_i - x_j)$ を potential とする 1 次元の量子力学的多体問題を扱い、粒子の質量が全て等しいときに S 行列が 2 体のそれに factorize して厳密に求められることを見いだした。その分解の consistency condition として現れるのが Yang-Baxter 方程式に他ならない。統計力学の方面ではその後関連する研究が多くおこなわれた(e.g.[4])。代表的なものとして 1972 年の Baxter による 8 vertex model の解 [8] が挙げられる。他方これとは独立な流れに、2 次元の場の理論における factorized S matrix の研究がある。Zamolodchikov は sine-Gordon 模型等の S 行列の決定の仕事 [5] を通じて、ここに現れる代数的な機構が Baxter らの研究におけるものと同一であることを指摘した。

1979 年、Faddeev のグループは、これら可解模型の量子論と古典論 (=

ソリトン理論)とを統一的に見る立場として quantum inverse method を提唱し、Yang-Baxter 方程式をその基礎に据えた。(この命名は彼らによる。)1980 年代初頭には Yang-Baxter 方程式の研究がモスクワ・レニングラードを中心に盛んにおこなわれた。この蓄積に立って Drinfeld はその後も考察を進め、quantum group の概念に到達した。Baxter もまた独自の研究を重ね多くの興味深い結果を得ている。更に 1983 年頃からは Jones による III_1 型因子環の index 論およびその link invariant への応用が現れ、Yang-Baxter 方程式との密接な関係が認識されるに至っている。

Yang-Baxter 方程式には、対応する格子模型のタイプに応じ vertex model, face model の 2通りの異なる formulation がある。本稿では前半(§§ 1-4)、後半(§§ 5-6)でそれぞれについて説明し、最後に braid 群との関係に触れる(§ 7)。筆者の勉強不足のため重要な話題であっても十分に解説出来なかったものがあること(特に quantum group の周辺)をお詫びします。

§ 1. Yang-Baxter 方程式

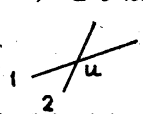
はじめに formulation を述べよう。 V を有限次元 vector space, $R(u)$ を $\text{End}(V \otimes V)$ 値関数 ($u \in \mathbb{C}$) とする。 $R(u)$ に対する関数方程式

$$R_{12}(u) R_{13}(u+v) R_{23}(v) = R_{23}(v) R_{13}(u+v) R_{12}(u) \quad (1.1)$$

を (vertex 型の) Yang-Baxter equation (YBE) と言う。ここに、 $R_{ij}(u) \in \text{End}(V_i \otimes V_j \otimes V_3)$ ($V_1 = V_2 = V_3 = V$) は、 $V_i \otimes V_j$ 上に $R(u)$ で、残りの成分上 identity で作用する行列を意味する： e.g. $R_{23}(u) = 1 \otimes R(u)$. V の基底をとって

$$R(u) = \sum R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(u) E_{\alpha\gamma} \otimes E_{\beta\delta} \quad (1.2)$$

($E_{ab} = (\delta_{ai} \delta_{bj})_{i,j}$ は行列単位)

と表せば、(1.1) は N^4 個 ($N = \dim V$) の未知関数 $R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(u)$ に対する N^6 個の斉次方程式を与える。(1.1) をしばしば Fig.1.1 のように表す。図の直線 j は空間 V_j を、また交点、例えば  は $R_{12}(u)$ を意味する。矢印の順に行列の積をとったものが (1.1) の両辺をそれぞれ表している。

一般に、 $R(u)$ が

$$R(u) = \text{const.} P$$

$$P \in \text{End}(V \otimes V), \quad P x \otimes y = y \otimes x \quad (1.3)$$

を満たしていれば (1.1) は $u=0$ または $v=0$ において恒等式となる ($P_{12} R_{13}(v) P_{12} =$

$R_{23}(v)$ 等を用いる)。本稿では (1.3) を initial condition とよぶことにする。

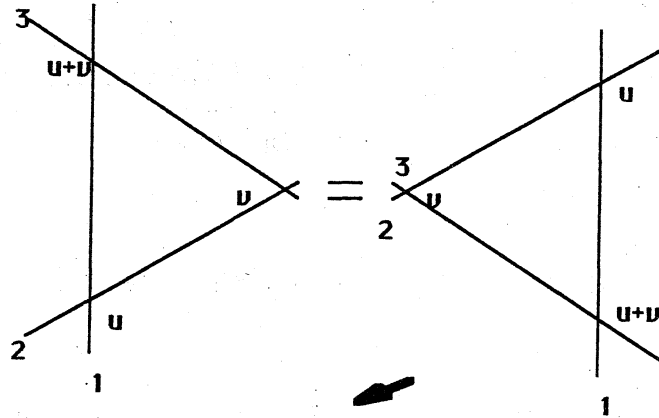


Fig.1.1. YBE. 各頂点が行列 R_i をあらわし、行列の積は矢印の順にとる。

典型的な解の例を3つ挙げよう。いずれも $V = \mathbb{C}^2$ の場合である。

例1.1.(McGuire [3], Yang [4])

$$R(u) = \begin{pmatrix} 1+u & & & \\ & u & 1 & \\ & 1 & u & \\ & & & 1+u \end{pmatrix} = P + u I.$$

例1.2.

$$R(u) = \begin{pmatrix} \sin(\eta+u) & & & \\ & \sin u & \sin \eta & \\ & \sin \eta & \sin u & \\ & & & \sin(\eta+u) \end{pmatrix}$$

例1.3.(Baxter [8])

$$R(u) = \begin{pmatrix} a(u) & & & d(u) \\ & b(u) & c(u) & \\ & c(u) & b(u) & \\ d(u) & & & a(u) \end{pmatrix}$$

$$a(u) = \theta_0(\eta) \theta_0(u) \theta_1(\eta+u)$$

$$b(u) = \theta_0(\eta) \theta_1(u) \theta_0(\eta+u)$$

$$\begin{aligned}c(u) &= \theta_1(\eta) \theta_0(u) \theta_0(\eta+u) \\d(u) &= \theta_1(\eta) \theta_1(u) \theta_1(\eta+u)\end{aligned}$$

ここに、 $\theta_i(u)$ は楕円 theta 関数

$$\begin{aligned}\theta_0(u) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2p^{n-1/2} \cos 2\pi u + p^{2n-1})(1-p^n), \\ \theta_1(u) &= 2p^{1/8} \sin \pi u \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2p^n \cos 2\pi u + p^{2n})(1-p^n).\end{aligned}$$

例1.2.の η 、例1.3.の η, p は任意定数を表す。例1.1～例1.3はいずれも initial condition (1.3) を満たしている。

例1.1が解であることを見ておこう。YBE の両辺は u について2次の多項式であるから、 u の3つの値で確かめればよい。(1.3)により、 $u = 0$ では成立している。又

$$\begin{aligned}u = \infty : \quad & P_{23} + vI = P_{23} + vI \\ u = -v : \quad & (P_{12} - vI)P_{13}(P_{23} + vI) = (P_{23} + vI)P_{13}(P_{12} - vI)\end{aligned}$$

となり、後者は互換の間の関係式 $(12)(13)(23) = (23)(13)(12)$, $(12)(13) = (13)(23)$ に帰着する。(以上において V は $\mathbb{C}^2$ と限らず何でもよい。)

YBE は $u, v, u+v$ での値の間の代数関係式であるという意味で一種の加法定理とみられるから、三角関数や楕円関数が解にあらわれるのは自然である (なお §3 参照)。上の3例はパラメーターの特殊化によりつながっている:

$$\begin{array}{ccccc}(\text{例1.3}) & \rightarrow & (\text{例1.2}) & \rightarrow & (\text{例1.1}) \\ & p \rightarrow 0 & & \eta \rightarrow 0 & \end{array}$$

ここで、YBE (1.1) が解の変換

$$R(u) \rightarrow f(u)R(u) \quad (f(u): \text{scalar}), \quad u \rightarrow \text{const.}u$$

を許すことを用いた。

§2. 可解格子模型 (Vertex Model)

はじめに述べたように、YBE は「量子的」可解模型の研究 (S 行列の factorization condition, 1次元 spin chain の Bethe Ansatz, 2次元格子模型の transfer matrix の可換条件等) に登場した。この節で、格子模型に即して YBE の背景を紹介する。

はじめに、有限集合 S 、及び S の元の 4 組 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ に対して Boltzmann weight と呼ばれる非負実数 $R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ を与えておく。2次元格子の各辺 i に、 S に値をとる確率変数 λ_i がのっているものとしよう。辺 i ごとに λ_i を指定する仕方 $\lambda: i \rightarrow \lambda_i$ を configuration とよぶ。configuration を 1 つ決めると、格子の各頂点に応じて 4 隅の状態 $(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k, \lambda_h)$ から Boltzmann weight $R_{\lambda_i \lambda_j}^{\lambda_k \lambda_h}$ が定まる。

$$\begin{array}{c} \delta \\ \alpha \quad | \quad \gamma \\ \beta \end{array} = R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$$

Fig.2.1. Boltzmann weight

全ての頂点にわたる積

$$Z^{-1} \prod_{\text{vertex}} R_{\lambda_i \lambda_j}^{\lambda_k \lambda_h}$$

を configuration λ の実現確率と定めた模型を vertex model と呼ぶ。ここに Z は全確率を 1 にするための正規化定数で、分配関数とよばれる：

$$Z = \sum_{\lambda} \prod_{\text{vertex}} R_{\lambda_i \lambda_j}^{\lambda_k \lambda_h} \quad (2.1)$$

格子の大きさを $M \times N$ とすると、 $M, N \rightarrow \infty$ の極限で Z は

$$Z \sim \exp(-MN\beta f) \quad (f: \text{有限}, \beta \text{ は温度に逆比例する定数})$$

のように振舞う。物理的にはこの f を求めることが興味ある基本的問題の一つである。

以下格子は両方向に周期境界条件を課す。いま(2.1)の和を、まずヨコ方向についてとり、ついでタテ方向の辺についてとることを考えよう。そのため、 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ 、 $\beta' = (\beta'_1, \dots, \beta'_N) \in S^N$ に対して記号

$$T_{\beta\beta'} = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} R_{\alpha_1 \beta_1}^{\alpha_2 \beta'_1} R_{\alpha_2 \beta_2}^{\alpha_3 \beta'_2} \cdots R_{\alpha_N \beta_N}^{\alpha_1 \beta'_N}$$

を導入する。

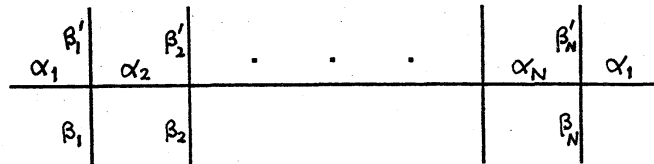


Fig.2.2.ヨコ方向の単位系。 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ について和をとったものが transfer matrix の行列要素を与える。

$V = C^S$, $R = \sum R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} E_{\alpha\gamma} \otimes E_{\beta\delta} \in \text{End}(V \otimes V)$, とおくならば $T_{\beta\beta'}$ は $\text{End}(V_1 \otimes \dots \otimes V_N)$ ($V_1 = \dots = V_N = V$) における次の行列の行列要素とみなせる：

$$T = \text{tr}_{V_0}(R_{\theta 1} R_{\theta 2} \dots R_{\theta N}) \in \text{End}(V_1 \otimes \dots \otimes V_N) \quad (2.2)$$

但し $V_0 = V$. この T を transfer matrix と言う。更にタテ方向の自由度について和をとることにより、分配関数(2.1)は

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(N)}} T_{\beta^{(1)} \beta^{(2)}} T_{\beta^{(2)} \beta^{(3)}} \dots T_{\beta^{(N)} \beta^{(1)}} \\ &= \text{tr}_{V_1 \otimes \dots \otimes V_N}(T^N) \end{aligned}$$

と書ける。この表示から、 $M, N \rightarrow \infty$ として f を求めることは T の最大固有値の $N \rightarrow \infty$ における漸近形を知ることになる。

この問題に対して現在知られている解法のアイデアは、 T を同時可換な 1 パラメーター族 $\{T(u)\}$ に拡張する、というものである（これは 2 次元 Ising 模型の Onsager による解 [7] にまでさかのぼる）：

$$T(u) T(v) = T(v) T(u) \quad u, v \in \mathbb{C} \quad (2.3)$$

そのための Boltzmann weight に対する十分条件が YBE である。ここでは(1.1)から(2.3)が従うことを見よう。

定義(2.2)から、

$$\begin{aligned} T(u)T(v) &= \text{tr}_{V_0}(R_{\theta 1}(u) \dots R_{\theta N}(u)) \text{tr}_{V_0}(R_{\theta 1}(v) \dots R_{\theta N}(v)) \\ &= \text{tr}_{V_0 \otimes V_0}((R_{\theta 1}(u) \dots R_{\theta N}(u))(R_{\theta 1}(v) \dots R_{\theta N}(v))) \\ &= \text{tr}_{V_0 \otimes V_0}((R_{\theta 1}(u)R_{\theta 1}(v))(R_{\theta 2}(u)R_{\theta 2}(v)) \dots (R_{\theta N}(u)R_{\theta N}(v))) \end{aligned} \quad (2.4)$$

と書くことができる (Fig.2.3.)。ここに $R_{0i}(u)$ と $R_{0j}(v)$ ($i \neq j$) の可換性を使った。

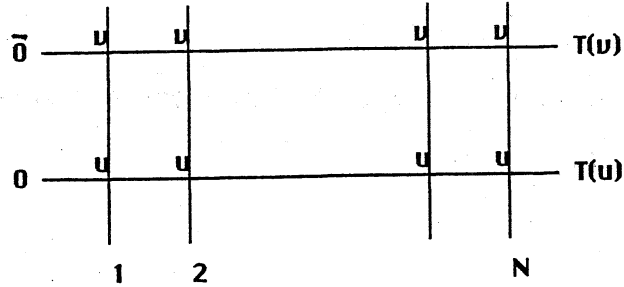


Fig.2.3. Transfer matrix の積。 $V_0, V_{\bar{0}}$ 双方の自由度について更に trace をとる。

他方、YBE は、 $R_{0i}(u)R_{0i}(v)$ が $R_{0i}(v)R_{0i}(u)$ と相似であることを述べている：

$$R(u,v) R_{0i}(u) R_{0i}(v) = R_{0i}(v) R_{0i}(u) R(u,v) \quad (2.5)$$

$$R(u,v) = R_{0\bar{0}}(u-v).$$

これを繰り返し用いれば、(2.4)の tr の中は u と v (及び V_0 と $V_{\bar{0}}$) を交換したものと相似になり、従って tr をとれば(2.3)を得る。

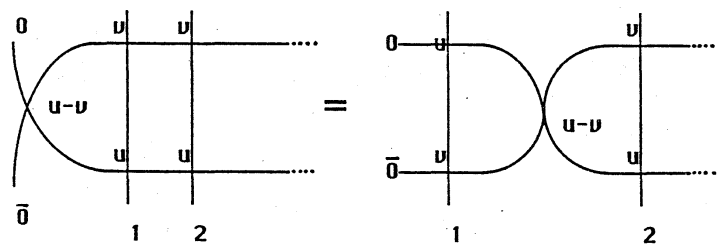


Fig.2.4. Transfer matrix の可換性。

詳しくは [6],[10] に譲るが、YBE と 2、3 のゆるやかな条件のもとに $T(u)$ のスペクトルを関数方程式によって記述する方法が知られている (Bethe Ansatz, およびその代

数化としての quantum inverse method)。

上の導出でわかる通り、(2.5)において $R_{0\bar{0}}(u-v)$ は $R_{0i}(u)$ たちとは役割が異なっており、それが同じ $R(u)$ から来ている必要は何もない。この点を強調するために、次の様な書き替えをしてみる。記述の簡単のため、 $V = \mathbb{C}^2$ とし、 $R_{0i}(u) \in \text{End}(V_0 \otimes V_i)$ を $\mathcal{A}_i = \text{End}(V_i)$ 値行列とみなしてこれを $L_i(u)$ と書こう。

$$L_i(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \quad A(u), \dots, D(u) \in \mathcal{A}_i.$$

この記法で(2.5)は

$$R(u, v) (L_i(u) \otimes I) (I \otimes L_i(v)) = (I \otimes L_i(v)) (L_i(u) \otimes I) R(u, v) \quad (2.6)$$

となる。ここに例えば $(I \otimes L_i(v))(L_i(u) \otimes I)$ は 4×4 行列

$$\begin{pmatrix} A(v)A(u) & B(v)A(u) & A(v)B(u) & B(v)B(u) \\ C(v)A(u) & D(v)A(u) & C(v)B(u) & D(v)B(u) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

を意味する(積の順序に注意)。(2.6)は、抽象的な algebra $\mathcal{A}_i$ の元の間、数値行列 $R(u, v) \in \text{End}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ を介して交換関係を定めているものとみなせる。この algebra の associativity が、 R 自身に対する YBE

$$R_{12}(u_1, u_2) R_{13}(u_1, u_3) R_{23}(u_2, u_3) = R_{23}(u_2, u_3) R_{13}(u_1, u_3) R_{12}(u_1, u_2) \quad (2.7)$$

によって保証される。ここで更に仮定

$$R(u, v) = R(u - v) \quad (2.8)$$

を置いたものが(1.1)である。このように、(1.1)ないし(2.7)と共に、一般には(2.6)のように V_i たちが相異なる場合も同時に考察することが自然である。

◆ 定式化は別として、仮定(2.8)の枠を越える解が見つけれられたのはごく最近である[45]。この仕事は、 u, v が genus の高い curve 上に棲んでいるような例を初めて作ったもので極めて興味深い。なお、 u が本質的に高次元多様体（例えば Abel 多様体）上を動く様な例は知られていない。

§3. Classical Yang-Baxter 方程式

Faddeev-Sklyanin-Takhtajan らは、(2.6)における $L(u)$ が、ソリトン方程式で基礎的な役割を果たす Lax pair

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi = L(x, t, \lambda) \psi, \quad \frac{\partial}{\partial t} \psi = P(x, t, \lambda) \psi \quad (3.1)$$

における L operator の量子論的類似であることを見抜いて、quantum inverse method を定式化した [10],[11]。格子から連続体極限に移行し、交換子 $[,]$ を Poisson 括弧 $\{ , \} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{\hbar} [,]$ におきかえると、(2.6)の交換関係から(3.1)の scattering data の間に簡単な Poisson 括弧の関係が従う。(逆散乱法の立場からは、この Poisson 括弧の関係が完全積分可能性の根拠であった。)ここから YBE の classical limit の概念が導入された。

いま YBE (1.1) の解がパラメーター $\hbar$ を含み、 $\hbar \rightarrow 0$ で

$$R(u, \hbar) = (\text{scalar}) \times (1 + \hbar r(u) + \dots) \quad (3.2)$$

なる展開をもつとき、 $R(u, \hbar)$ は quasi-classical であると言い、 $r(u)$ を $R(u, \hbar)$ の classical limit と呼ぶ。例えば、例1.1~1.3 はすべて quasi-classical である(例1.1では $u \rightarrow u/\hbar$, 例1.2,1.3では $\eta = \hbar$ ととればよい)。(3.2)を(1.1)に代入すると、 $\hbar^2$ の係数から $r(u)$ に対する次の classical Yang-Baxter equation (CYBE) が従う。

$$[r_{12}(u), r_{13}(u+v)] + [r_{12}(u), r_{23}(v)] + [r_{13}(u+v), r_{23}(v)] = 0. \quad (3.3)$$

CYBE の特徴は、交換子 $[,]$ のみで書かれているために抽象的なリー環の言葉で formulate できることにある。いま $\mathcal{G}$ をリー環、 $r(u)$ を $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ 値の関数であるとし、 $\mathcal{G}$ の基底 $\{l_\mu\}$ によって

$$r(u) = \sum r^{\mu\nu}(u) l_\mu \otimes l_\nu, \quad r^{\mu\nu}(u): \mathbb{C}\text{-値関数} \quad (3.4)$$

と書こう。また $r_{12}(u) = \sum r^{\mu\nu}(u) l_\mu \otimes l_\nu \otimes 1 \in U(\mathcal{G}) \otimes U(\mathcal{G}) \otimes U(\mathcal{G})$ ($U(\mathcal{G})$: $\mathcal{G}$ の展開環) 等とおく。このとき例えば

$$\begin{aligned} [r_{12}(u), r_{23}(v)] &= [\sum r^{\mu\nu}(u) l_\mu \otimes l_\nu \otimes 1, \sum r^{\rho\sigma}(v) 1 \otimes l_\rho \otimes l_\sigma] \\ &= \sum r^{\mu\nu}(u) r^{\rho\sigma}(v) l_\mu \otimes [l_\nu, l_\rho] \otimes l_\sigma \end{aligned}$$

等となり、(3.3)の各項は $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ におさまる。

$\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ 値の解があれば、 $\mathcal{G}$ の表現 (π_i, V_i) をとることによって $V_i \otimes V_j$ における行列解 $(\pi_i \otimes \pi_j)(r(u))$ が直ちに得られる。この意味で、 $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ 値解は 'universal solution' である。

$\mathcal{G}$ が有限次元単純リー環であるとき、CYBE は Belavin-Drinfeld [12] によって詳しく調べられている。以下 $\mathcal{G}$ の不変な内積に関する正規直交基 $\{l_\mu\}$ を一つ固定し、

$$t = \sum l_\mu \otimes l_\mu$$

とおく。

命題 [12] $r(u)$ を $0 \in \mathbb{C}$ の近傍で定義された CYBE の $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ 値有理型解とすると、
次は同値：

- (1) (3.4) の記号のもと $\det (r^{\mu\nu}(u)) \neq 0$.
- (2) $r(u)$ は少なくとも一つ pole をもち、かつ $r(u) \in \mathfrak{g}' \otimes \mathfrak{g}'(\sqrt{u})$ となる proper subalgebra $\mathfrak{g}' \subsetneq \mathfrak{g}$ は存在しない。
- (3) $u = 0$ において $r(u)$ は次の形を持つ：

$$r(u) = \frac{ct}{u} + \text{regular} , \quad (c \neq 0)$$

上の (1)~(3) を満たす解を non-degenerate であると言う。

定理 [12] CYBE の non-degenerate な解 $r(u)$ に対し次が成り立つ。

- (i) $r(u)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型に拡張され、すべての pole は simple.
- (ii) $\Gamma = \{ r(u) \text{ の poles } \}$ は $\mathbb{C}$ の加法に関する discrete subgroup.
- (iii) u についての関数形として次の3通りのみが可能である。

rank $\Gamma = 2$ 楕円関数

rank $\Gamma = 1$ 三角関数 (即ち $x = e^{cu}$ の有理関数)

rank $\Gamma = 0$ 有理関数

Belavin-Drinfeld は、更に CYBE の解の間に適当な同値性を定義し、楕円関数解はA型

($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$) の場合のみ存在して同値を除きただ一つであること、三角関数解は各

type のリー環について存在し、同値を除いて Dynkin 図形で記述される有限個のみ許されることを示している（有理関数解の分類は未完成）。

例3.1. $r(u) = \frac{t}{u}$ はもっとも簡単な有理関数解。

例3.2. $\mathcal{Q}$ のルート分解を $\mathcal{Q} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta} \mathcal{Q}_{\alpha})$ とし、 $X_{\alpha} \in \mathcal{Q}_{\alpha}$ を $(X_{\alpha}, X_{-\alpha}) = 1$ となるように選んで

$$r = \sum_{\alpha \in \Delta_+} (X_{\alpha} \otimes X_{-\alpha} - X_{-\alpha} \otimes X_{\alpha}) \quad (\text{和は positive root にわたる})$$

とおく。このとき

$$r(u) = r - t + \frac{2t}{x-1} \quad (x = e^u) \quad (3.5)$$

は CYBE の三角関数解。これはソリトン理論の戸田方程式に対応する。例3.1は例3.2から特殊化 $(\eta/2)r(\eta u)$, $\eta \rightarrow 0$, によって得られる。

◆ Belavin-Drinfeld は、一般に $r_{ij}(u_i, u_j)$ の形から出発しても、(non-degenerate の仮定のもとでは) 本質的には差の関数 $r_{ij}(u_i - u_j)$ の場合に帰着することも示している [13]。

§4. Quantum Group

CYBE の解 $r(u) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ が与えられたとき、それを classical limit にもつ YBE の解 $R(u, \hbar)$ を作る問題を仮に $r(u)$ の「量子化」と言うことにすれば、直ちに問題となるのは量子化された $R(u, \hbar)$ の棲むべき object は何かということである。素朴に思い付くのは $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ であるが、実は $r(u)$ に応じて $U(\mathfrak{g})$ 自身も「量子化」したものを考えることが自然である。

リー群 G 上の smooth functions のなす環 $A = C^\infty(G)$ には、群の operation を引き継いだ構造として algebra map

$$\begin{aligned} \Delta: A &\rightarrow A \otimes A, & f(g) &\mapsto f(g_1 g_2) \\ S: A &\rightarrow A, & f(g) &\mapsto f(g^{-1}) \\ \varepsilon: A &\rightarrow \mathbb{C}, & f(g) &\mapsto f(e) \quad (e \in G \text{ は単位元}) \end{aligned}$$

があり、組 $(A, \Delta, S, \varepsilon)$ は Hopf 代数となる。また、 $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ の展開環 $A^* = U(\mathfrak{g}) = \bar{C}^\infty(G)$ (e に台をもつ distribution) はそれに双対的な Hopf 代数の構造をもつ:

$$\begin{aligned} \Delta: A^* &\rightarrow A^* \otimes A^*, & X &\mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X \\ S: A^* &\rightarrow A^*, & X &\mapsto -X \\ \varepsilon: A^* &\rightarrow \mathbb{C}, & X &\mapsto 0 \quad (X \in \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

$(A, \Delta, S, \varepsilon)$ は algebra として可換であるが、 G が可換群でない限り余可換でない：
 $\sigma \Delta \neq \Delta$. ここに

$$\sigma : A \otimes A \rightarrow A \otimes A, \quad \sigma(x \otimes y) = y \otimes x. \quad (4.1)$$

他方 $(A, \Delta, S, \varepsilon)$ は余可換であるが可換でない。Drinfeld は一般に非可換・非余可換な Hopf algebra を $C^\infty(G)$ の非可換版の意味で quantum group と呼び、(quantum) YBE の背後の代数的構造としてとりだした。CYBE の幾何学的意味づけとその量子化としての quantum group の枠組みについては [16] を参照。ここでは重要な例として、例 3.2 の三角関数解に関係した $U(\mathfrak{g})$ の q -analog $U_q(\mathfrak{g})$ (Drinfeld の用語では quantum affine algebra) の説明をしたい。尚もう一つの重要な例に例 3.1 の有理関数解に関係した Yangian があり、[17] で詳しく論じられている。

記述の簡単のため $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ とし、 $q \in \mathbb{C}$ ($q \neq 0, \pm 1$) に対して $\mathbb{C}$ 上の algebra $U_q(\mathfrak{g})$ を生成元と関係式によって次の様に定義する：

生成元： e, f, k, k^{-1}

関係式： $kk^{-1} = k^{-1}k = 1, \quad kek^{-1} = qe, \quad kfk^{-1} = q^{-1}f,$

$$[e, f] = (k^2 - k^{-2})/(q - q^{-1}).$$

形式的に $q = e^{\hbar}$, $k = q^{\hbar/2}$ において $\hbar \rightarrow 0$ の極限をとると、上の関係式は $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ のそれに移行する。 $U_q(\mathfrak{g})$ は次の operation によって Hopf 代数となる。

$$\Delta: k \mapsto k \otimes k, \quad X \mapsto X \otimes k^{-1} + k \otimes X \quad (X = e, f)$$

$$S: k \mapsto k^{-1}, \quad e \mapsto -qe, \quad f \mapsto -q^{-1}f,$$

$$\varepsilon: k \mapsto 1, \quad X \mapsto 0 \quad (X = e, f).$$

一般に対称化可能な generalized Cartan matrix をもつ Kac-Moody リー環に対して $U_q(\mathfrak{g})$ が同様に定義される。

◆ Woronowicz [20] は生成元 $(\rho_{ij})_{i,j=1,2}$ と次の関係式によって C^* 環 $SU_q(2)$ を導入し、その上の differential calculus を展開した。

$$\begin{aligned}\rho_{11}\rho_{12} &= q\rho_{12}\rho_{11}, & \rho_{11}\rho_{21} &= q\rho_{21}\rho_{11}, \\ \rho_{12}\rho_{21} &= \rho_{21}\rho_{12}, & [\rho_{11}, \rho_{22}] &= (q - q^{-1})\rho_{12}\rho_{21}, \\ \rho_{11}\rho_{22} - q\rho_{12}\rho_{21} &= 1, & \rho_{22}^* &= \rho_{11}, \quad \rho_{12}^* = -q\rho_{21}.\end{aligned}$$

この algebra は、comultiplication $\Delta(\rho_{ij}) = \sum \rho_{ik} \otimes \rho_{kj}$ によって Hopf 代数の構造をもつ。このうえの不変微分作用素の類似 $\nabla_0, \nabla_1, \nabla_2$ は $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ を生成しており [21]、この意味で $SU_q(2)$ と $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ は (大略) dual になっている。

$U_q(\mathfrak{g})$ に対して、 $\mathfrak{g}$ の最高 weight 表現の類似が定義されるが、これについて Lusztig による次の結果がある (q は $\mathbb{C}$ 上超越的とする)。

定理 [22]. dominant integral な最高 weight をもつ $\mathfrak{g}$ の既約表現は、つねに $U_q(\mathfrak{g})$ のそれに deform できる。weight の重複度は q によらず、したがって指標公式は $q = 1$ の時の物と同一である。

さて $U_q(\mathfrak{g})$ と YBE との関係性を述べよう。 $U_q(\mathfrak{g})$ の自己同型 T_x ($x \in \mathbb{C}^*$) を

$$T_x : e \rightarrow xe, \quad f \rightarrow x^{-1}f, \quad k \rightarrow k$$

によって定める。いま $R(x) \in U_0(\mathcal{G}) \otimes U_0(\mathcal{G})$ に対する次の方程式を考えよう：

$$\begin{aligned} R(x)(1 \otimes T_x)(\Delta(a)) &= (1 \otimes T_x)(\Delta'(a)) R(x) \quad \text{for any } a \in U_0(\mathcal{G}) \\ (1 \otimes \Delta)(R(x)) &= R_{13}(x)R_{12}(x) \\ (1 \otimes T_x)(R(y)) &= R(xy) \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここに $\Delta' = \sigma \Delta$ (σ は (4.1))。これらの方程式より

$$R_{23}(x)(1 \otimes 1 \otimes T_x)(R_{13}(y)R_{12}(y)) = (1 \otimes 1 \otimes T_x)(R_{12}(y)R_{13}(y))R_{23}(x)$$

が導かれるが、(4.2) の最後の式と合わせれば、これは multiplicative な変数 $x = e^u$ で書かれた YBE にほかならない。 $\mathcal{G} = \mathfrak{sl}(2)$ の場合 (4.2) を満たす $R(x)$ は存在して次のように与えられる。

$$\begin{aligned} R(x) &= q^{-h \otimes h / 2} \sum_{n=0}^{\infty} ((q^{-1} - q)/x)^n q^{-n(n-1)/2} [n]!^{-1} k^{-n} e^n \otimes f^n k^n, \\ [n]! &= [n][n-1] \dots [1], \quad [m] = (q^m - q^{-m})/(q - q^{-1}). \end{aligned}$$

(厳密には、 $R(x)$ 自身でなく、上の和の中の x の各べきの係数が $U_0(\mathcal{G}) \otimes U_0(\mathcal{G})$ に属する。) 一般の $\mathcal{G}$ に対しては解を書き下すことはできないが、[16] には次の事が述べてある (正確な statement は [16] を参照)。

(1) (4.2) の解は存在し、classical limit を持つ。

(2) 有限次元既約表現 $\pi : U_0(\mathcal{G}) \rightarrow \text{End}(V)$ に対し、 $(\pi \otimes \pi)(R(x))$ は up

to scalar で x の有理関数となる。

$\mathcal{Q}$ としてアフィン・リー環 $\mathcal{Q} = \mathring{\mathcal{Q}} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \rtimes \mathbb{C}c$ ($\mathring{\mathcal{Q}}$: 有限次元単純リー環) をとったとき、 $R(x)$ は例3.2の $r(u)$ (3.5) (その $\mathcal{Q}$ を $\mathring{\mathcal{Q}}$ として) の量子化を与える。

$R(x)$ の具体的な行列解は、

$\mathcal{Q}$: 非例外型、 $\pi : \mathring{\mathcal{Q}}$ の vector 表現

のとき [25],[26] に与えられている。

なお、A型の楕円関数解についても $U_q(\mathcal{Q})$ に相当する algebra は考えられているが [15],[23]、そこに Hopf algebra structure があるかどうかは知られていないようである。

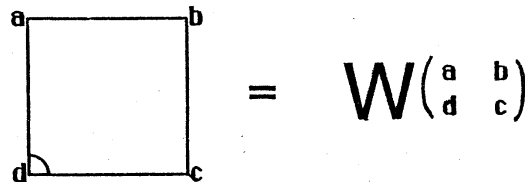
§5. Face model

格子模型の言葉では、今まで考えてきた VBE は vertex model に対応していた (§2)。もう一つのタイプの模型として、face model とそれに応じた VBE について述べよう。

再び2次元格子を考え、各格子点 i 上に、ある集合 S に値をとる確率変数 λ_i を置く。今後 S の元を local state と呼ぶ。単位正方形 (face) の四隅の配置 (a, b, c, d) に対し Boltzmann weight $W\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ を与え、configuration λ の重みを

$$Z^{-1} \prod_{\text{face}} W\begin{pmatrix} \lambda_i & \lambda_j \\ \lambda_h & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad Z = \sum_{\lambda} \prod_{\text{face}} W\begin{pmatrix} \lambda_i & \lambda_j \\ \lambda_h & \lambda_k \end{pmatrix}$$

によって定めたものを face model と呼ぶ (Baxter の用語では interaction-round-a-face (IRF) model [6])。



$$= W\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

Fig.5.1. Boltzmann weight

Face model に対しても transfer matrix を導入し、その可換性の条件として VBE を書くと、それは次の形をとる。

$$\begin{aligned} \sum_g W\begin{pmatrix} f & g \\ e & d \end{pmatrix} | u \rangle W\begin{pmatrix} a & b \\ f & g \end{pmatrix} | u+v \rangle W\begin{pmatrix} b & c \\ g & d \end{pmatrix} | v \rangle \\ = \sum_g W\begin{pmatrix} a & g \\ f & e \end{pmatrix} | v \rangle W\begin{pmatrix} g & c \\ e & d \end{pmatrix} | u+v \rangle W\begin{pmatrix} a & b \\ g & c \end{pmatrix} | u \rangle \quad (a, b, c, d, e, f \in S) \end{aligned}$$

22

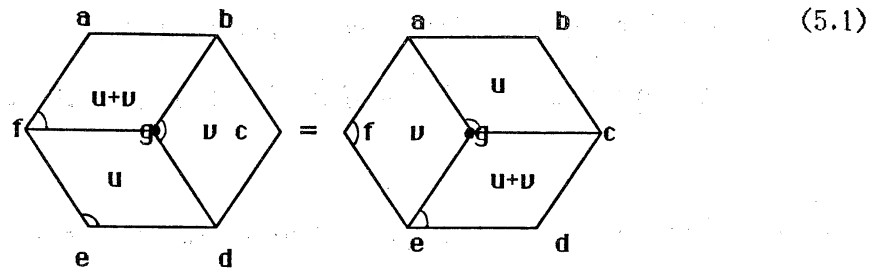


Fig.5.2. face model の YBE(STR). 両辺の3つの face は Boltzmann weight の積を、 $\cdot$ は g についての和をあらわす。

これを図示したものが Fig.5.2 である。各正方形は Boltzmann weight $W\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right)$ を表す (図では形がひしゃげているので左下隅を示すマーク $\llcorner$ をつけた。) Face 型の YBE (5.1) を star-triangle relation (STR) とよぶことがある。

Face model は、自由度を増して state の対 $\alpha = (a, b) \in S \times S$ を一つの state とする vertex model とみなすことができる。いま $R(u) = \sum R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(u) \in \text{End}(V \otimes V)$, $V = \mathbb{C}^{S \times S}$, を

$$R_{(ad)(a'd')}^{(bc)(b'c')}(u) = W\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right) \quad (a=a', b=b', c=c', d=d')$$

$$= 0 \quad (\text{その他})$$

によって定めると、dual lattice 上に vertex model が定義される。このとき STR (5.1) は $R(u)$ について書き直すと YBE (1.1) の形になっている。

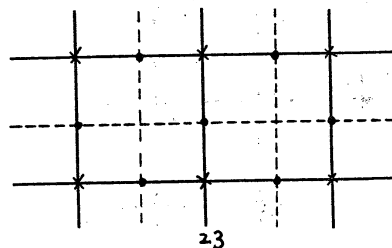


Fig.5.3. Face model と dual lattice 上の vertex model. 前者では確率変数は格子点上 (×印)、後者では格子の辺上 (・印) におかれる。

Face model の代表例として、Andrews-Baxter-Forrester (ABF) [29] の構成した eight vertex solid-on-solid (8VSOS) model を紹介しよう。この模型は、local state の集合として $S = \{1, 2, \dots, L-1\}$ ($L \geq 4$ は自然数) をもつ。特徴的なのは次の制限条件が課されることである：

$$(a, b): \text{ 隣合う格子点上の local state } \Rightarrow b - a = \pm 1 \quad (5.2)$$

即ち、 $(a, b), (b, c), (a, d), (d, c)$ のどれか一つでも (5.2) をみたさないとき Boltzmann weight $W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$ は 0 と定められる。(5.2)により隣合う格子点上の local state は特に parity が違うので、ある格子点上の parity を固定すると、格子全体が even sublattice, odd sublattice の2つに分離する。

例5.1. $L = 4, S = \{1, 2, 3\}$.

even sublattice 上の自由度は $\lambda_i = 2$ に freeze され、odd sublattice 上では $\lambda_i = 1, 3$ の2状態が許される。これを $+1, -1$ と呼び直すと、模型は diagonal lattice 上に描いた Ising 模型になる。

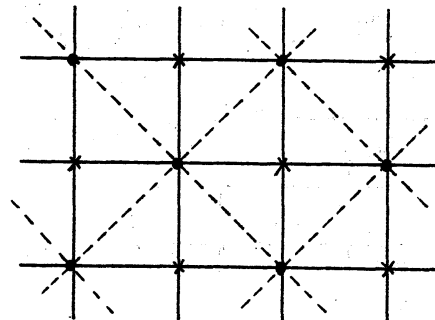


Fig.5.4. $L = 4$ のとき 8VSOS 模型は Ising 模型とみなせる。

例5.2. $L = 5$, $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

$\lambda_i = 1, 2, 3, 4$ の名前を付け替えて $\sigma_i = 1, 0, 0, 1$ と呼ぶことにする (格子の種類が違うので 2 重命名の心配はない)。このとき (5.2) は $\sigma_i + \sigma_j = 0$ or 1 と同値。この模型は、粒子が隣接格子点を同時に占有 ($\sigma_i = \sigma_j = 1$) 出来ないと言う格子気体 hard square gas をあらわす。

8VSOS 模型の Boltzmann weight は、楕円 theta 関数で書かれる。略記法として次の記号を用いる。

$$[u] = 2p^{1/8} \sin(\pi u/L) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2p^n \cos(2\pi u/L) + p^{2n})(1 - p^n). \quad (5.3)$$

このとき 0 でない Boltzmann weight は次の 3 種に分かれる。

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} a \quad a \pm 1 \\ \square \\ a \pm 1 \quad a \pm 2 \end{array} & \frac{[u+1]}{[1]} & \\
 \begin{array}{c} a \quad a \pm 1 \\ \square \\ a \pm 1 \quad a \end{array} & \frac{[a-u]}{[a]} & \\
 \begin{array}{c} a \quad a \mp 1 \\ \square \\ a \pm 1 \quad a \end{array} & \frac{[u]/[a-1][a+1]}{[1] \quad [a]} &
 \end{array} \quad (5.4)$$

実は、公式(5.4)において $a \in \mathbb{Z} + a_0$, a_0 及び L は一般の複素パラメーター、としても STR (5.1) は成り立っている [9]。ABF は、 L : 自然数、 $a_0 = 0$, ととることによって

$0 < a < L$ を満たす有限個の Boltzmann weight の間で STR が閉じることを指摘した。彼らは前者の無限 state の模型を unrestricted model, 後者を restricted model とよんでいる。

◆ 名前のごとく 8VSOS model は eight vertex model (例1.3) と次のような関係にある。Baxter [9] は、例1.3の R に対して、ある vector の family $\phi_{a,a+1}(u) \in \mathbb{C}^2$ を構成し、 R を $\phi \otimes \phi$ に施した時あらわれる係数として(5.4)の(unrestricted) Boltzmann weight を得ている。

$$R(u-v) \phi_{bc}(u) \otimes \phi_{ab}(v) = \sum_d W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} |u-v \rangle \phi_{ad}(u) \otimes \phi_{dc}(v). \quad (5.5)$$

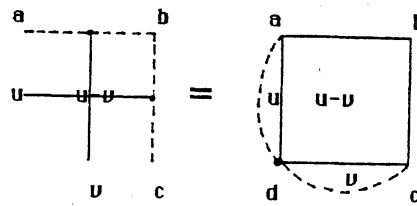


Fig.5.5. Vertex と Face の対応。波線は intertwining vector $\phi_{ab}(u)$ を表す。

$\phi_{ab}(u)$ の適当な一次独立性の仮定のもとで、 $R(u)$ に対する YBE から $W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} |u \rangle$ に対する STR が従うことが示される。

§ 6. $X_n^{(0)}$ 型模型

前節で述べたような Face model は、§ § 3-4 の理論の枠にそのままではおさまらない。それとは独立に、8VSOS 模型の自然な拡張としてリー環論的なヒエラルヒーが存在することが期待されている。設定は $X_n^{(1)}$ 型 ($X_n = A_n, B_n, \dots, G_2$) のアフィン・リー環についてなされるが、ここでは $X_n = A_n = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ の場合に説明しよう。以下 $\Lambda_0, \dots, \Lambda_n$ (resp. $\bar{\Lambda}_1, \dots, \bar{\Lambda}_n$) により $A_n^{(1)}$ (resp. A_n) の基本 weight をあらわす。一次結合 $a = \sum_{i=0}^n m_i \Lambda_i$ が $m_i \in \mathbb{Z}, m_i \geq 0$ を満たす時 a は dominant integral であると言う。整数 $m_0 + \dots + m_n$ を a の level, $\bar{a} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{\Lambda}_i$ を a の classical part と言う。

さて、自然数 l および A_n の有限次元既約表現 π を固定する。ここでは

π の weight multiplicity はすべて 1

であると仮定しよう。例えば π : 完全 (反) 対称テンソル表現。(一般の場合には vertex model と face model とを融合した模型を取り扱うことになる。これについては現在検討中である。) data (l, π) から、次のような face model を考える。

local state の集合: $S = \{ A_n \text{ の level } l \text{ の dominant integral weight 全体} \}$

incidence relation: 隣接格子点上の local state は π -admissible

ここに

順序対 (a, b) が π -admissible $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \pi_{\tau(b)}$ は $\pi_{\tau(a)} \otimes \pi$ の既約成分

$$(i=0,1,\dots) \quad (6.1)$$

ただし τ は $\tau(\Lambda_i) = \Lambda_{i+1}$ ($\Lambda_{n+1} = \Lambda_0$) となる Dynkin diagram automorphism.

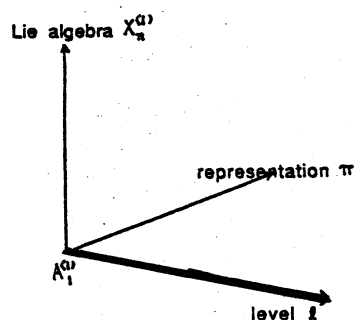


Fig.6.1. $X_n^{(0)}$ 模型。 $X_n = A_1$, π = vector 表現 (太線) が 8VSOS 模型。

Incidence relation (6.1) を理解するために、 $A_1^{(0)}$ の場合を考えてみよう。 $L = l + 2$ とおけば

$$S = \{(L-1-a)\Lambda_0 + (a-1)\Lambda_1 \mid a = 1, 2, \dots, L-1\}$$

であり、その元の classical part は Young 図形 $\overbrace{\square \dots \square}^{a-1}$ と対応する。 A_1 の既約表現は一般に $\pi = \overbrace{\square \dots \square}^N$ (N 次対称テンソル) の形をしている。 Clebsch-Gordan の法則

$$\begin{aligned} \overbrace{\square \dots \square}^{a-1} \otimes \overbrace{\square \dots \square}^N &= \overbrace{\square \dots \square}^{a-1+N} + \overbrace{\square \dots \square}^{a-3+N} + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\min(a-1, N)} \overbrace{\square \dots \square}^{a-1+N-2j} \end{aligned}$$

によって

$$(L-1-a)\Lambda_0 + (a-1)\Lambda_1 \text{ と } (L-1-b)\Lambda_0 + (b-1)\Lambda_1 \text{ が } \pi\text{-admissible}$$

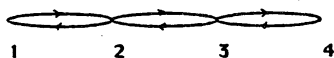
$$\Leftrightarrow b = a-N, a-N+2, \dots, a+N. \quad N < a+b < 2L-N.$$

特に $N = 1$ ならば、この条件は

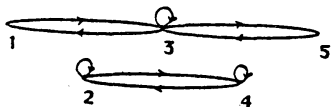
$$0 < a, b < L, \quad b = a \pm 1$$

となって、8VSOS 模型の制限則(5.2)に一致する。 $N = 2$ のとき、 $1 < a < L-1$ ならば $b = a-2, a, a+2$ はどれも admissible であるが、 $(a, b) = (1, 1), (L-1, L-1)$ は admissible でない。 admissible な対を矢印で結んで S を図示すれば次の様である (incidence diagram)。

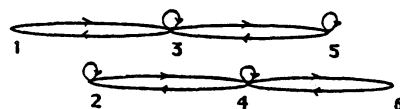
$$N = 1, \ell = 3 (L = 5)$$



$$N = 2, \ell = 4 (L = 6)$$



$$N = 2, \ell = 5 (L = 7)$$

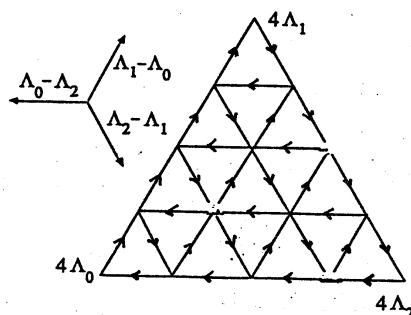


一般に、Young 図形 $Y = [f_1, \dots, f_{n+1}]$ ($f_1 \geq \dots \geq f_{n+1} \geq 0$) の間に同値関係 $[f_1, \dots, f_{n+1}] \sim [f_1+1, \dots, f_{n+1}+1]$ を入れ、その同値類を $[Y]$ と書く。level ℓ を固定すれば、local state a は $f_1 - f_{n+1} \leq \ell$ を満たす同値類 $[Y]$ と 1:1 に対応する：

$$a = (\ell - f_1 + f_{n+1})\Lambda_0 + \sum_{i=1}^n (f_i - f_{i+1})\Lambda_i$$

$\pi = \text{vector}$ 表現の場合には、 (a, b) が π -admissible となるのは a に対応する You

ng 図形のある行にコマを一つ付け加えて b が得られることと同値である。 $X_n = A_2$,
 $\pi = \square$ (vector 表現) の場合の incidence diagram を下にしめす。



$A_n^{(1)}$ model (vector 表現) の場合の Boltzmann weight は次のように与えられる。

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{c} a \quad a + \hat{\mu} \\ \square \\ a + \hat{\mu} \quad a + 2\hat{\mu} \end{array} & \frac{[1+u]}{[1]} \quad (6.2) \\
 \begin{array}{c} a \quad a + \hat{\mu} \\ \square \\ a + \hat{\mu} \quad a + \hat{\mu} + \hat{\nu} \end{array} & \frac{[a_{\mu\nu} - u]}{[a_{\mu\nu}]} \quad (\mu \neq \nu) \\
 \begin{array}{c} a \quad a + \hat{\nu} \\ \square \\ a + \hat{\mu} \quad a + \hat{\mu} + \hat{\nu} \end{array} & \frac{[u] \sqrt{[a_{\mu\nu} - 1][a_{\mu\nu} + 1]}}{[1] [a_{\mu\nu}]} \quad (\mu \neq \nu)
 \end{array}$$

ここに $a + \hat{\mu}$ は a の表す Young 図形の第 μ 行にコマを一つ付け加えた local state をあらわす。また

$$a_{\mu\nu} = f_{\mu} - f_{\nu} + \nu - \mu$$

とおいた。

現在のところ次の場合には STR の解が構成できている。

$X_n = A_n$, π = 完全対称テンソル表現 [30]、

$X_n = A_n, B_n, C_n, D_n$, π = vector表現 [31]。

いずれの場合も、 Boltzmann weight は (5.3) の楕円 theta 関数 $[u]$ でパラメトライズされる。これらの解の構成は、8VSOS 模型と同じく、まず(i) § 5の意味での unrestricted model を作り、ついで(ii)パラメーターの特殊化によって restricted model の存在 (STRが 閉じること) の検証を行う、というステップを踏む。このうち A型の模型は vertex model の楕円関数解と(5.5)の意味で対応がついている。一方 non-degenerate classical limit を持つ vertex model はA型以外は elliptic ではありません(§ 3)、上の elliptic な face model が vertex model とどう関係するかは不明である。

◆8VSOS 模型の local state probability (1点関数) と呼ばれる量が、リー環の対 $(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}, \mathcal{O})$ ($\mathcal{O} = A_1^{(1)}$) に付随する modular form (=分岐係数) によって表されることが分かっている。 $X_n^{(1)}$ 型模型についても同様のことが期待され、部分的に確認されている [32]。これとは別に、対 $(A_1^{(1)}, W \ltimes S)$ (W = affine Weyl group, S = principal Heisenberg subalgebra) に関係した face model (elliptic) も知られている [34],[33]。格子模型の立場からみると、trigonometric limit は模型の臨界点に対応しており、臨界点の近傍での物理量の挙動を調べられる点で、elliptic solution はことに興味がある。

§7. Braid群との関係

この節では YBE, とくに trigonometric solution に関係の深い代数的構造として、braid 群、Hecke 環等について述べる。

$\mathbb{R}^3$ 中の m 本の組紐の isotopy class に自然な合成によって積構造をいれたものが Artin の braid 群 B_m である。抽象群として B_m は次の presentation をもっている。

生成元: $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$

関係式: $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m-2,$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i-j| \geq 2. \quad (7.1)$$

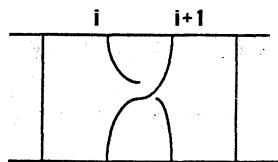


Fig.7.1. braid 群 B_m の生成元 σ_i

いま YBE (1.1) の解 $R(u) \in \text{End}(V \otimes V)$ に対して

$$\check{R}(u) = PR(u),$$

$$\check{R}_i(u) = 1 \otimes \dots \otimes \check{R}(u) \otimes \dots \otimes 1 \in \text{End}(V^{\otimes m}) \quad (7.2)$$

$i, i+1$

とおくならば、直ちに次の関係が従う。

$$\begin{aligned}\check{R}_i(u)\check{R}_{i+1}(u+v)\check{R}_i(v) &= \check{R}_{i+1}(v)\check{R}_i(u+v)\check{R}_{i+1}(u), & 1 \leq i \leq m-2, \\ \check{R}_i(u)\check{R}_j(v) &= \check{R}_j(v)\check{R}_i(u), & |i-j| \geq 2.\end{aligned}\quad (7.3)$$

これより明らかに、YBE の u -independent solution は braid 群の $V^{\otimes m}$ 上の表現をひきおこす。例えば $\check{R}(0)$ はその例であるが、initial conditionのもとではこれは自明 ($\check{R}(0) = I$)。nontrivial な状況として、trigonometric solution の $u = \infty$ での値がある。いま $\check{R}(u)$ が $x = e^u$ の多項式であるとする：

$$\check{R}(u) = T^{(0)}x^N + T^{(1)}x^{N-1} + \dots + T^{(N)}.$$

このとき leading term $T^{(0)}$ (または $T^{(N)}$) から

$$\mathbb{CB}_m \rightarrow \text{End}(V^{\otimes m}), \quad \sigma_i \mapsto T_i^{(0)} \text{ (resp. } T_i^{(N)}) \quad (7.4)$$

によって braid 群の表現が生じる。

例7.1. 例1.2において $x = e^{2iu}$, $q = e^{i\eta}$ とおく。この $R(u)$ を $(D(u) \otimes I)^{-1}R(u) \times (D(u) \otimes I)$, $D(u) = \text{diag}(x^{1/2}, 1)$, と変更したものもまた YBE をみたしている。このとき対応する $\check{R}(u)$ は

$$x^{1/2} \check{R}(u) = xT - T^{-1}, \quad T = \begin{bmatrix} q & & & \\ & q-q^{-1} & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & q \end{bmatrix}$$

上の例のように、特に $\check{R}(u)$ が x の1次式であるとし、initial condition を

仮定しよう。

$$\check{R}_i(u) = x T_i + S_i, \quad T_i + S_i = 1.$$

このとき、簡単な計算によって、YBE は T_i に対する braid relation (7.1) に

$$(T_i + a)(T_i + b) = 0, \quad \exists a, b \in \mathbb{C}, \quad a + b = -1.$$

を加えたものと同値になることがわかる。

パラメーター $q \in \mathbb{C}^*$ に対し、生成元 $h_1, \dots, h_{m-1}$ とその間の関係式

$$h_i h_{i+1} h_i = h_{i+1} h_i h_{i+1} \quad (1 \leq i \leq m-2), \quad h_i h_j = h_j h_i \quad (|i-j| \geq 2),$$

$$(h_i + 1)(h_i - q^2) = 0$$

で定義される $\mathbb{C}$ -algebra $H_m(q^2)$ を岩堀の Hecke algebra という。 $q^2 = 1$ のときは、 h_i を互換 $(i, i+1)$ と同一視することにより $H_m(1) = \mathbb{C}\mathcal{S}_m$ (対称群の群環) となっている。 q^2 が 1 のべき根でなければ環として $H_m(q^2) \cong \mathbb{C}\mathcal{S}_m$ が知られている。べき根の場合には $H_m(q^2)$ は一般に半単純でない。上の注意により、1 次の trigonometric solution がひきおこす braid 群の表現は Hecke 環を factor することがわかる ($q^2 = -b/a$)。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{CB}_m & \xrightarrow{\quad} & \text{End}(V^{\otimes m}) \\
 \sigma_i \searrow & & \nearrow a^{-1} T_i \\
 & H_m(q^2) & \\
 & \nearrow h_i & \\
 & &
 \end{array}$$

例7.2. 例7.1は次のように $n \times n$ 行列に一般化される。

$$\begin{aligned} \check{R}(u) &= x T - T^{-1}, \\ T^{\pm 1} &= q^{\pm 1} \sum_{i \neq j} E_{ii} \otimes E_{jj} + \sum_{i \neq j} E_{ij} \otimes E_{ji} \pm (q - q^{-1}) \sum_{i \neq j} E_{ii} \otimes E_{jj}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

これは $\mathcal{Q} = A_{n-1}^{(1)}$, $\pi = A_{n-1}$ の vector 表現、に対する quasi-classical な R 行列である (§ 4)。この T を通じての $H_m(q^2)$ の表現 $H_m(q^2) \rightarrow \text{End}(V^{\otimes m})$ と $U_q(\mathfrak{sl}(n))$ の multi-diagonal action $\Delta^{(m)}: U_q(\mathfrak{sl}(n)) \rightarrow \text{End}(V^{\otimes m})$ との image をそれぞれ A, B としたとき、 q^2 が一般ならば両者は互いに他の commutant となる [19] (対称群と一般線形群の表現に関する Weyl の定理の類似) :

$$A = \text{End}_B(V^{\otimes m}), \quad B = \text{End}_A(V^{\otimes m}).$$

§ 4 で述べた Lusztig の結果は、A 型の場合この事実からも証明される。B C D 型に対して同様の commutant algebra (Brauer algebra とその q-analog) も論じられている [43].

Face model の場合にも、braid 群との関係はほぼ同様である。それを見るためには STR を次のように書き直すとよい。いま $V = \mathbb{C}^S$ の標準基を $\{v_a\}$ として $a, b \in S$ に対し $V^{(m+1)}$ の部分空間 $V_m(a, b)$ を導入する :

$$V_m(a, b) = \text{span} \{ v_{a_0} \otimes \dots \otimes v_{a_m} \mid a_0 = a, a_m = b, \\ (a_i, a_{i+1}) \text{ は admissible for } i=0, \dots, m-1 \}$$

この上の face operator $U_1(u), \dots, U_{m-1}(u)$ を次で定める。

$$U_i(u) v_{a_0} \otimes \dots \otimes v_{a_m} = \sum_{a'_i} W \begin{pmatrix} a_{i-1} & a_i \\ a'_i & a_{i+1} \end{pmatrix} (u) v_{a_0} \otimes \dots \otimes \overset{i}{v_{a'_i}} \otimes \dots \otimes v_{a_m} . \quad (7.6)$$

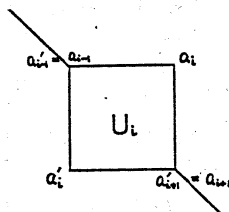


Fig.7.2. Face operator U_i . 格子を対角線方向に見て、第 i 成分に一つの face を付け加える操作を表している。

このとき STR (5.1) は (7.3) と同じ形になる：

$$\begin{aligned} U_i(u) U_{i+1}(u+v) U_i(v) &= U_{i+1}(v) U_i(u+v) U_{i+1}(u), & 1 \leq i \leq m-2, \\ U_i(u) U_j(v) &= U_j(v) U_i(u), & |i-j| \geq 2. \end{aligned} \quad (7.7)$$

例7.3. $A_n^{(1)}$ 型 face 模型 (π = vector 表現) の trigonometric limit $p \rightarrow 0$ を考えよう。表現空間 $V_m(a, b)$ の元は、 a から出発して条件 $f_1 - f_{n+1} \leq l$ のもとに Young 図形 $[f_1, \dots, f_{n+1}]$ のコマを一つずつ増やして b に到達する成長過程を表している。

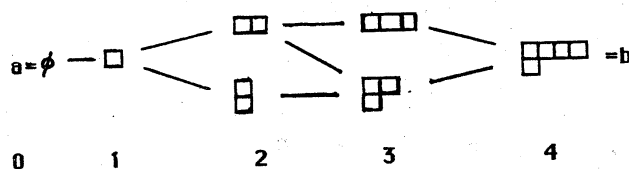


Fig. 7.2. 表現空間 $V_m(a,b)$ ($m = 4$).

Boltzmann weight の極限は公式(6.2)において $[u] = \sin(\pi u/L)$ と読み直したものに
なる。 $q = e^{\pi i/L}$, $x = e^{2\pi i u/L}$ とおけば face operator は 1 次式になっている:

$$x^{1/2}(q-q^{-1}) U_i(u) = x \tilde{T}_i - \tilde{T}_i^{-1}.$$

従って $\tilde{T}_i$ は 1 のべき根 $q^2 = e^{2\pi i/L}$ に対する $H_m(q^2)$ の $V_m(a,b)$ 上の表現を与える。
始点として $a = [0,0,\dots,0]$ をとり、 T_i の具体形を見ると、これは Hoefsmit, Wenzl
が構成した既約表現 [40],[41] と同一のものになっていることがわかる。(q が一般の
場合の彼らの表現は unrestricted model に対応している。)

§ 8. 参考文献

以下の文献は網羅的なものではなく、主な文献がそこからたどれるものにとどめた。

YBE の総合報告には [1],[2] がある。これらは quantum inverse method [10],[11] との関係重視する立場から書かれており、1980 年初頭までに知られていた解のリストが載っている。その後の文献は [16] に詳しい。

格子模型全般の基本文献は Baxter の本 [6] である。

CYBE の概念は Sklyanin に負うようである。non-degenerate solution の分類については、原論文 [12] の他 [14] が読み易い。CYBE の幾何学的意味やそのソリトン理論における役割に関して、上記の他 Cherednik, Drinfeld, Gelfand-Dorfmann, Semenov-Tyan-Shanskii 等々多くの仕事がある。[16] の文献参照。

YBE に付随して $U(q)$ の deformation が自然に生ずることを認識したのは、やはり Sklyanin [15] である。Drinfeld の報告 [16] には、quantum group の概念を巡って多くの事が述べられているが、詳細は未発表。

実際に行列解を求める方法として、vector 表現に対応する解から出発し、表現の「テンソル積の分解」を実行するテクニック fusion procedure が開発されている [27],[28]。(現在知られている vertex model は殆どこの系列とその特殊化である。) braid 群の表現では fusion に相当する村上氏の仕事 [42] がある。

$X_n^{(1)}$ 型格子模型とその local state probability については、紹介記事 [32] がある。なお face model では、この他にもいろいろな解が知られている [34-38]。このうち [37],[38] は、8VSOS 模型の incidence diagram を A_n の Dynkin diagram と見てそれを D, E 型に拡張している。

高次元における YBE には、Zamolodchikov-Baxter による 3次元版 [44] の例が一つだけ知られている。McCoy, Perk らの higher genus solution [45] も今後の発展が期待される。

Yang-Baxter 方程式の review

[1] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, Solutions of the Yang-Baxter equation, J. Sov. Math. 19 (1982) 1596-1620.

[2] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, Quantum spectral transformation method. Recent developments, Lecture Notes in Physics 151, Springer 1982, 61-119.

Bethe Ansatz, S 行列

- [3]J. B. McGuire, Study of exactly soluble one-dimensional N-body problems, J. Math. Phys. 5 (1964) 622-636.
- [4]C. N. Yang, Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1312-1314.
- [5]A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models, Ann. Phys. 120 (1979) 253-291.

可解格子模型全般

- [6]R. J. Baxter, Exactly solved models in statistical mechanics, Academic, London 1982.
- [7]L. Onsager, Crystal Statistics I. A two dimensional model with an order-disorder transition, Phys. Rev. 65 (1944) 117-149.
- [8]R. J. Baxter, Partition function of the eight-vertex lattice model, Ann. of Phys. 70 (1972) 193-228.
- [9]R. J. Baxter, Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain, Ann. of Phys. 76 (1973) 1-24, 25-47, 48-71.

quantum inverse method

- [10]L. A. Takhtadzhian and L. D. Faddeev, The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model, Russ. Math. Surveys 34 (1979) 11-68.
- [11]L. D. Faddeev, Integrable models in (1+1)-dimensional quantum field theory, Les Houches Session XXXIX, 563-608, Elsevier Publishers, Amsterdam, 1982.

Classical Yang-Baxter equation

- [12]A. A. Belavin and V. G. Drinfeld, Solutions of the classical Yang-Baxter

equation for simple Lie algebras, *Funct. Anal. Appl.* 16 (1982) 159-180.

[13] A. A. Belavin and V. G. Drinfeld, Classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras, *Funct. Anal. Appl.* 17 (1982) 220-221.

[14] A. A. Belavin and V. G. Drinfeld, Triangle equations and simple Lie algebras, in *Soviet Scientific Reviews, Section C*, 4 (1984) 93-165.

Quantum group

[15] E. K. Sklyanin, Some algebraic structure connected with the Yang-Baxter equation, *Funct. Anal. Appl.* 16 (1982) 263-270; 17 (1983) 273-284.

[16] V. G. Drinfeld, Quantum groups, ICMP 86 report, to appear.

[17] V. G. Drinfeld, Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation, *Soviet Math. Dokl.* 32 (1985) 254-258.

[18] J. L. Verdier, Groupes quantiques, *Sem. Bourbaki* 1986-87, no.685 (1987).

[19] M. Jimbo, Quantum R matrix related to the generalized Toda system: An algebraic approach, in *Lecture Notes in Physics* 246, Springer 1986, 335-.

[20] S. Woronowicz, Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus, *Publ. RIMS* 23 (1987) 117-181; Compact matrix pseudogroups, *Commun. Math. Phys.* 111 (1987) 613-665.

[21] M. Rosso, Comparaison des groupes $SU(2)$ quantiques de Drinfeld et de Woronowicz, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 304 (1987) 323-326.

[22] G. Lusztig, Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras, preprint 1987.

[23] I. V. Cherednik, On irreducible representations of elliptic quantum R-algebras, *Soviet Math. Dokl.* 34 (1987) 446-450.

Vertex model の楕円関数解・三角関数解

[24] A. A. Belavin, Dynamical symmetry of integrable quantum systems, *Nucl. Phys. B* 180[FS2] (1981) 189-200.

[25] V. V. Bazhanov, Trigonometric solutions of the triangle equation and classical Lie algebras, *Phys. Lett.* 159B (1985) 321-324.

[26] M. Jimbo, Quantum R matrix for the generalized Toda system, *Commun. Math. Phys.* 102 (1986) 537-547.

fusion procedure

- [27]P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin and E. K. Sklyanin, Yang-Baxter equation and representation theory I. Lett. Math. Phys. 5 (1981) 393-403.
 [28]E. Date, M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, Fusion of the eight-vertex SOS model, Lett. Math. Phys. 12 (1986) 209-215.

 $X_n^{(1)}$ 型模型

- [29]G. E. Andrews, R. J. Baxter and P. J. Forrester, Eight-vertex SOS model and generalized Rogers-Ramanujan-type identities, J. Stat. Phys. 35 (1984) 193-266.
 [30]M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, Symmetric tensors of the $A_{n-1}^{(1)}$ family, preprint RIMS 592 (1987).
 [31]M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, Solvable Lattice models related to the vector representation of classical simple Lie algebras, preprint RIMS 600 (1987).

Local State Probability

- [32]三輪 哲二・神保 道夫・尾角 正人、2次元の可解な格子模型とモジュラー関数、岩波「数学」に発表予定。
 [33]M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, Solvable lattice models with broken Z_n symmetry and Hecke's indefinite modular forms, Nucl. Phys. B275[FS17] (1986) 517-545.

Face model のその他の解

- [34]M. Kashiwara and T. Miwa, A class of elliptic solutions to the star-triangle relation, Nucl. Phys. B275[FS17] (1986) 121-134.
 [35]V. V. Bazhanov and Yu. G. Stroganov, Trigonometric and S_n symmetric solutions of triangle equations with variables on the faces, Nucl. Phys. B205[FS5] (1982) 505-526.
 [36]T. Miwa, Multi-state solutions to the star-triangle relation with Abelian symmetries, Nucl. Phys. B270[FS16] (1986) 50-60.

[37]V. Pasquier, Exact solubility of the D_n series, J. Phys. A, 20 (1987) L217-L220.

[38]A. Kuniba and T. Yajima, Local state probabilities for solvable RSOS models: A_n , D_n , $D^{(1)}$ and $A^{(1)}$, preprint Tokyo University 1987.

braid 群、Hecke 環

[39]小林毅、絡み目理論の新しい不変量—作用素環に由来する Jones 多項式とその一般化—、岩波「数学」38巻1号 (1986) 1-14.

[40]P. N. Hoefsmit, Representations of Hecke algebras of finite groups with BN pairs of classical type, Thesis, University of British Columbia, 1974.

[41]H. Wenzl, Representations of Hecke algebras and subfactors, Thesis, University of Pennsylvania, 1985.

[42]I. Murakami, The parallel version of link invariants, preprint Osaka University, 1987.

[43]T. Kohno, Monodromy representation of braid groups and Yang-Baxter equations, to appear in Ann. Inst. Fourier.

その他

[44]R. J. Baxter, On Zamolodchikov's solution of the tetrahedron equations, Commun. Math. Phys. 88 (1983) 185-205.

[45]H. Au-Yang, B. M. McCoy, J. J. H. Perk, S. Tang and M.-L. Yau, Commuting transfer matrices in the chiral Potts models: Solutions to the star-triangle equations with genus > 1 , preprint ITP-SB-87-14, 1987.