

二重共鳴器列を取り付けたトンネル内を伝播する音響孤立波

阪大 基礎工 土井 直 (Tadashi DOI)

阪大 基礎工 杉本 信正 (Nobumasa SUGIMOTO)

1. はじめに

トンネルの長手方向に同じヘルムホルツ共鳴器を等間隔に多数取り付けると、普通の空気中でも音響孤立波がトンネル内を伝播できるようになることが分かっている [1]. 音響孤立波は圧縮波で、伝播速度は音速より遅い、すなわち亜音速であるが、共鳴器列の大きさによって決定されるしきい値より速いことが知られている. また、伝播速度が上限の音速に近づくにつれ、最大音圧が大きくなり極限孤立波が存在する.

ところで、単一の共鳴器列を取り付けたトンネルに、新たに異なった大きさや固有振動数をもつもう一つの共鳴器列を取り付けると、音響孤立波の伝播にどのような影響を及ぼすであろうか. 現実のトンネル微気圧波対策では、二重共鳴器列のうち一つの列を高次分散効果（高階微分形で現れる）を発生させ、衝撃波の形成を抑えるために取り付け、もう一つの列は分散のみならず減衰効果を有効に発生させるために取り付けるのが好ましいと考えられる. 一重列の場合、共鳴器の固有振動数を代表周波数より十分高く設定すると、共鳴器の空洞内の音圧はトンネル内の音圧にほぼ瞬時に追従する. しかし、その僅かな時間遅れがトンネル内を伝播する非線形音波に高次分散効果を引き起こし、音響ソリトンの形成へと導く [2,3]. この場合には衝撃波は絶対発生しない. また固有振動数が高くないときでも、もちろん空洞内空気の慣性によってソリトンとは異なるが孤立波は伝播できる. しかし、その最大音圧は極限孤立波によって制限されるので、それ以上の大きさになるといくら分散効果が存在しても衝撃波が出現するようになる [1,4].

そこで本報告では、減衰効果を全て無視して二重共鳴器列を取り付けたトンネル内の非線形音波の定常解を求め現象を考える.

2. 基礎方程式

まず最初に、二重共鳴器列を取り付けたトンネル内を、平面波で一方向に伝播する非線形音波の振る舞いを記述する方程式を示す. トンネルは十分長く、断面形状は一定であるとし、その面積を A とする. いま、固有振動数 ω_1, ω_2 をもつ二種類のヘルムホルツ共鳴器を、トンネルの長手方向にそれぞれ等間隔 d_1, d_2 で取り付ける. 従って、それぞれの共鳴器はトンネル長手方向に周期的に配置されることになるが、トンネル全体としては空間

的な周期構造は一般に持たない。こうした離散的な構造はしかしながら、取り付け間隔が音波の代表波長に比べて短いと仮定することにより、連続体近似の下に塗りつぶす。各共鳴器列のトンネルに対する大きさは、それぞれパラメータ $\kappa_1 (= V_1/Ad_1)$, $\kappa_2 (= V_2/Ad_2)$ で見積もられ、 κ_1, κ_2 共その値は1に比べて十分小さいものとする。ただし、 V_1, V_2 は、添え字 1, 2 で区別した共鳴器の空洞体積である。

トンネル内の超過圧力（音圧）を f ，それぞれの共鳴器の空洞内の超過圧力を g_1, g_2 とすると、散逸効果を全て無視した非線形音波の伝播を記述する方程式は無次元形で次式で与えられる（この導出は単一系列の場合[4]と同じようにできる）：

$$\frac{\partial f}{\partial X} - f \frac{\partial f}{\partial \theta} = -K_1 \frac{\partial g_1}{\partial \theta} - K_2 \frac{\partial g_2}{\partial \theta}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial \theta^2} + \Omega_1 g_1 = \Omega_1 f, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial \theta^2} + \Omega_2 g_2 = \Omega_2 f. \quad (2.3)$$

ここで、超過圧力は、 $[(\gamma+1)/2\gamma]^{-1}p_0$ （ただし、 p_0 は大気圧、 γ は比熱比）で無次元化されており、その大きさの程度を ε ($\ll 1$) とする。 $K_1 (= \kappa_1/2\varepsilon)$, $K_2 (= \kappa_2/2\varepsilon)$, $\Omega_1 [= (\omega_1/\omega)^2]$, $\Omega_2 [= (\omega_2/\omega)^2]$ は $O(1)$ のパラメータである。ただし、 ω は音波の代表周波数を示す。いま、 x, t をトンネルに沿って測った座標および時間とし、 a_0 を平衡音速とすると、 $X (= \varepsilon\omega x/a_0)$ は遠方場座標、 $\theta [= \omega(t - x/a_0)]$ は遅延時間である。

さて、方程式(2.1)-(2.3)の定常進行波解を求める。 f, g_1, g_2 が $\xi (= \theta - \sigma X)$ (σ : 定数) にのみ依存すると仮定する。パラメータの数を減らすために、 $f \rightarrow \sqrt{K_1 K_2} F$, $g_1 \rightarrow K_2 G_1$, $g_2 \rightarrow K_1 G_2$, $\sigma \rightarrow \sqrt{K_1 K_2} s$, $\xi \rightarrow (\Omega_1 \Omega_2)^{-1/4} \zeta$ とおくと、式(2.1)-(2.3)は次式で与えられる：

$$s \frac{dF}{d\zeta} + F \frac{dF}{d\zeta} = \frac{dG_1}{d\zeta} + \frac{dG_2}{d\zeta}, \quad (2.4)$$

$$\frac{d^2 G_1}{d\zeta^2} + \frac{1}{\sqrt{\Omega}} G_1 = \frac{1}{\sqrt{K\Omega}} F, \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2 G_2}{d\zeta^2} + \sqrt{\Omega} G_2 = \sqrt{K\Omega} F. \quad (2.6)$$

ここで、 K, Ω は

$$K = \frac{K_2}{K_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, \quad \Omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \quad (2.7)$$

であり、それぞれ空洞列の大きさの比および固有振動数の比を与える。以上の置き換えによって、 ζ は実際の座標、時間を用いると

$$\zeta = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \left[t - \frac{x}{a_0(1 - \varepsilon \sqrt{K_1 K_2} s)} + O(\varepsilon \sqrt{K_1 K_2} s)^2 \right] \quad (2.8)$$

となり、伝播速度は $a_0(1 - \varepsilon\sqrt{K_1K_2}s)$ である。したがって、 s は音速からのずれを表す。ちなみに、 $K = 1$ かつ $\Omega = 1$ の場合は、同一の共鳴器列を二つ取り付けた場合に相当し、単一系列の場合の値を添え字 s で示すと、 $F = 2F_s$, $G_1 = G_2 = 2G_s$, $s = 2s_s$ となる。

一方、境界条件としては、波のはるか前方 ($x \rightarrow \infty$) で静止平衡状態であると仮定する。すなわち、

$$\zeta \rightarrow -\infty \text{ で } F, G_1, G_2 \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

である。すると、(2.4) は直ちに積分でき、

$$sF + \frac{1}{2}F^2 = G_1 + G_2 \quad (2.10)$$

となる。

この関係を用いて F を消去すると、方程式(2.5), (2.6) は次のハミルトン形に書き直すこともできる：

$$\frac{dG_1}{d\zeta} = \frac{1}{\sqrt{K\Omega}} G_3 = \frac{\partial H}{\partial G_3}, \quad (2.11)$$

$$\frac{dG_2}{d\zeta} = \sqrt{K\Omega} G_4 = \frac{\partial H}{\partial G_4}, \quad (2.12)$$

$$\frac{dG_3}{d\zeta} = -\sqrt{K} G_1 + F = -\frac{\partial H}{\partial G_1}, \quad (2.13)$$

$$\frac{dG_4}{d\zeta} = -\frac{1}{\sqrt{K}} G_2 + F = -\frac{\partial H}{\partial G_2}. \quad (2.14)$$

ただし、ハミルトニアン H は

$$H \equiv \frac{1}{2}\sqrt{K}G_1^2 + \frac{1}{2\sqrt{K}}G_2^2 + \frac{1}{2\sqrt{K\Omega}}G_3^2 + \frac{1}{2}\sqrt{K\Omega}G_4^2 - \frac{1}{3}F^3 - \frac{1}{2}sF^2 \quad (2.15)$$

である。ハミルトニアンは ζ によらないので、条件(2.9)から $H = 0$ である。

3. 解の存在範囲

方程式(2.11)-(2.14)の特異点を調べる。境界条件(2.9)からも明らかなように、 $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = F = 0$ が特異点である。これ以外にも、 $\sqrt{K}G_1 = G_2/\sqrt{K} = F = -2(s - \sqrt{K} - 1/\sqrt{K})$, $G_3 = G_4 = 0$ なる点も特異点であるが、 $s \neq \sqrt{K} + 1/\sqrt{K}$ では $H = 0$ を満足しないので除外する。

そこで、前者の特異点の回りに方程式を線形化し、変動成分が $e^{\lambda\zeta}$ に比例するとおいて特性方程式を導くと、 λ について次の4次方程式が得られる：

$$\lambda^4 + \left[\sqrt{\Omega} + \frac{1}{\sqrt{\Omega}} - \frac{1}{s} \left(\sqrt{K\Omega} + \frac{1}{\sqrt{K\Omega}} \right) \right] \lambda^2 + 1 - \frac{1}{s} \left(\sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} \right) = 0. \quad (3.1)$$

これを λ^2 に関する 2 次方程式とみなして判別式を調べると $4/s^2$ 以上であるので、常に 2 実根 λ_+^2, λ_-^2 が存在する。もし、(I) $1 - (\sqrt{K} + 1/\sqrt{K})/s < 0$ なら、 $\lambda_-^2 < 0 < \lambda_+^2$ となり、(II) $1 - (\sqrt{K} + 1/\sqrt{K})/s > 0$ なら、 λ_+^2, λ_-^2 共に負になる。これより、特性根は (I) の場合には、正根、負根、共役純虚根、一方 (II) の場合には、二組の共役純虚根になる。従って、境界条件 (2.9) を満足する滑らかな解が存在する条件は、

$$0 < s < \sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} \quad (3.2)$$

であることが分かる。このとき、特異点は中立鞍点である。

さて、トンネル内の最大圧力を見積もる。いま、 F が極値をもつ、すなわち $dF/d\zeta = 0$ なる F の値を F_m とする。式 (2.4) より、直ちに

$$\frac{dG_1}{d\zeta} + \frac{dG_2}{d\zeta} = 0, \text{ すなわち } G_4 = -\frac{1}{K\Omega} G_3 \quad (3.3)$$

である。この関係をハミルトニアンに代入し、また式 (2.10) を用いて G_2 を消去すると

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} \right) \left[G_1 - \frac{1}{\sqrt{K}(\sqrt{K} + 1/\sqrt{K})} \left(\frac{F_m^2}{2} + sF_m \right) \right]^2 + \left(\sqrt{K\Omega} + \frac{1}{\sqrt{K\Omega}} \right) \frac{G_3^2}{K\Omega} \\ & = 2F_m^2 \left[\frac{F_m}{3} + \frac{s}{2} - \frac{1}{2(\sqrt{K} + 1/\sqrt{K})} \left(\frac{1}{2}F_m + s \right)^2 \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

と書ける。左辺は非負の量であるから、右辺もそうでなければならない。これより F_m は範囲

$$F_m^- \leq F_m \leq F_m^+ \quad (F_m^- < 0 < F_m^+) \quad (3.5)$$

にあることが分かる。ここで、

$$F_m^\pm = \left(\sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} \right) \left[-2\tilde{s} + \frac{4}{3} \pm \sqrt{-\frac{4}{3}\tilde{s} + \frac{16}{9}} \right] \quad (3.6)$$

であり (複号同順)、 s を

$$s = \left(\sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} \right) \tilde{s} \quad (0 < \tilde{s} < 1) \quad (3.7)$$

とおいた。これより、以下のことが分かる。単一共鳴器列の場合の s_s の許容範囲は $0 < s_s < 1$ であり、 F_s の最大値は $-2s_s + 4/3 + \sqrt{-4s_s/3 + 16/9}$ である。二重共鳴器列を取り付けたトンネル内の圧力の最大値は、 s を (3.7) で置き換えると、単一系列の最大値の $(\sqrt{K} + 1/\sqrt{K})$ 倍以下であることが分かる。

次に、位相空間におけるエネルギーシエルの存在範囲を調べることににより、 G_1, G_2 の最大値を見積もる。式(2.15)を、

$$\frac{1}{2}\sqrt{K}G_1^2 + \frac{1}{2\sqrt{K}}G_2^2 + \frac{1}{2\sqrt{K}\Omega}G_3^2 - \frac{1}{3}F^3 - \frac{1}{2}sF^2 = -\frac{1}{2}\sqrt{K\Omega}G_4^2 \leq 0 \quad (3.8)$$

と書き直す。ここで、 F は式(2.10)から求まるが、条件(3.2)および $G_1, G_2 \rightarrow 0$ で $F \rightarrow 0$ になることを考慮すると

$$F = -s + \sqrt{s^2 + 2(G_1 + G_2)}, \quad (3.9)$$

と選ぶのが適切である。そして F は実数であることから、次の条件が必要になる：

$$G_1 + G_2 \geq -\frac{s^2}{2}. \quad (3.10)$$

3次元位相空間 (G_1, G_2, G_3) において、不等式(3.8)で見積もられるエネルギーシエルの存在範囲を図1に示す。ここで、パラメータは $K = 1, \Omega = 5, s = 1$ である。存在範囲は、図1の原点 (◇で示す) の右側では閉曲面の内部であり、一方左側では条件(3.10)の制限を受けるが開いている。ちなみに、 G_3 が極値をとるのは

$$G_1 = \frac{2}{\sqrt{K}} \left(\sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} - s \right) > 0, \quad G_2 = 2\sqrt{K} \left(\sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} - s \right) > 0 \quad (3.11)$$

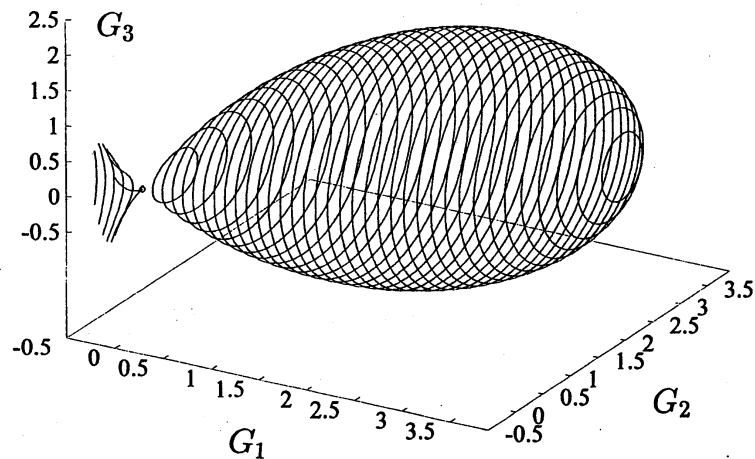


図1：位相空間 (G_1, G_2, G_3) 内のエネルギーシエルの存在範囲 ($K = 1, \Omega = 5, s = 1$)

である。原点は特異点であるので、その近傍では曲面は原点を頂点とし左右両側に開いた二つの楕円錐で近似される。右側の領域と左側の領域の接点は原点の特異点しかないので、片側の領域からもう片側の領域へは解は移ることは出来ないことに注意する。いま有界な解を仮定しているので、右側の閉じた領域内にある解を探すことにする。この範囲から、 G_1, G_2 の最大値を押さえることができる。後で見るように、この見積もりは実際によい近似を与えることが分かる。

4. 数値解

さて、方程式(2.11)-(2.14)には、不変量は $H = 0$ 以外には知られていないので、解を解析的に求めることはできない。そこで、特異点から出発する漸近枝を頼りに数値解をルンゲクッタ法により求める。漸近枝の精度を上げるために、 F, G_1, G_2 を $e^{\lambda\zeta}$ のべきに以下のように展開する：

$$\begin{bmatrix} F \\ G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} e^{\lambda\zeta} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} e^{2\lambda\zeta} + \dots + \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{bmatrix} e^{n\lambda\zeta} + \dots \quad (4.1)$$

ここで、 $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) はすべて α_1 で表すことができる。実際、展開(4.1)を式(2.5)-(2.6)に代入すると

$$\beta_n = \frac{1/\sqrt{K\Omega}}{(n^2\lambda^2 + 1/\sqrt{\Omega})} \alpha_n, \quad \gamma_n = \frac{\sqrt{K\Omega}}{(n^2\lambda^2 + \sqrt{\Omega})} \alpha_n \quad (4.2)$$

が得られる。一方、式(2.10)から

$$s\alpha_n + \frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_{n-1} + \alpha_2\alpha_{n-2} \dots + \alpha_{n-1}\alpha_1) = C_n\alpha_n \quad (4.3)$$

なる関係が導かれる。ここで

$$C_n = \frac{1/\sqrt{K\Omega}}{(n^2\lambda^2 + 1/\sqrt{\Omega})} + \frac{\sqrt{K\Omega}}{(n^2\lambda^2 + \sqrt{\Omega})} \quad (4.4)$$

である。よって、 α_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) は逐次以下のように α_1 によって求めることができる：

$$\alpha_n = \frac{\alpha_1\alpha_{n-1} + \alpha_2\alpha_{n-2} \dots + \alpha_{n-1}\alpha_1}{2(C_n - s)}. \quad (4.5)$$

こうして求めた漸近枝を用いて方程式(2.11)-(2.14)を数値的に解く。方程式が座標の原点の選択に関して不変であるので、 $\zeta \leq 0$ で漸近解(4.1)を仮定し、 $\zeta > 0$ の領域で解を求

める. ちなみに, $\alpha_1 = 0.01$ にとると級数(4.1)を20項までとると有効数字15桁程度は収束する. 一方, ζ の刻み幅は 10^{-2} または 10^{-3} にとり, $H = 0$ がどれだけ満足されているか常にチェックしたところ, 誤差は最大で 10^{-12} 程度である. 以下の数値解では, 伝播速度を決める s の値と二つの共鳴器列の固有振動数比 Ω に焦点をあて, 共鳴器の大きさ K の値は1に固定する. Ω の値は, 一般性を失うことなく1以上に選ぶことができる.

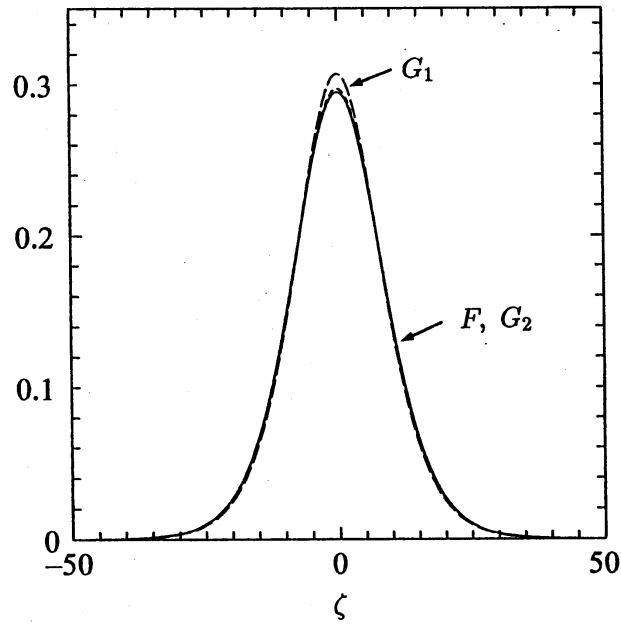


図2 : 孤立波の波形 ($K = 1, \Omega = 5, s = 1.9$)

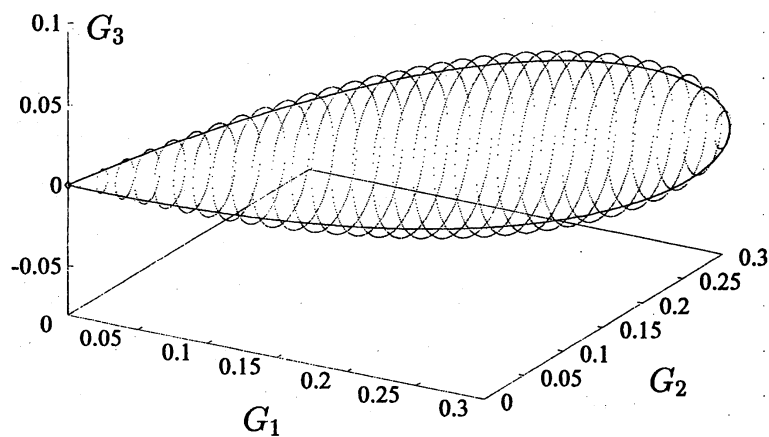


図3 : 位相空間 (G_1, G_2, G_3) 内における解軌道 (実線) とエネルギーシェルの存在範囲 (点線)
($K = 1, \Omega = 5, s = 1.9$)

まず, s の値がその許容範囲 ($0 < s < 2$) の上限に近い場合の解を図 2 に示す. ここで, $s = 1.9$, $\Omega = 5$ であり, F の最大値を ζ の原点に選ぶ. 波形は単一の孤立波である. この解軌道を位相空間 (G_1, G_2, G_3) 内にエネルギーシエルの存在範囲と併せて示すと図 3 のようになる. 軌道は鞍点から出発し, 再び鞍点にもどるホモクリニック軌道である. この解を解析的に求めることはできないが, $s = (\sqrt{K} + 1/\sqrt{K})(1 - \Delta\tilde{s})$ ($0 < \Delta\tilde{s} \ll 1$) とおいて $\Delta\tilde{s}$ をパラメータに漸近的に求めることはできる. いま, $F = (\sqrt{K} + 1/\sqrt{K})\tilde{F}$, $(G_1, G_2) = (\sqrt{K} + 1/\sqrt{K})^2(\tilde{G}_1, \tilde{G}_2)$ とおいて, 次のように sech^2 のべきに展開する:

$$\begin{bmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{G}_1 \\ \tilde{G}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \text{sech}^2 \mu \zeta + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \text{sech}^4 \mu \zeta + \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} \text{sech}^6 \mu \zeta + \dots \quad (4.6)$$

これを方程式 (2.5), (2.6), (2.10) に代入し, 逐次係数を決める. ここで注意すべきことは, 各係数は $\Delta\tilde{s}$ も含むので, $\Delta\tilde{s}$ に関しても展開できることである. 最低次の関係から

$$\left. \begin{aligned} \mu^2 &= \frac{(K+1)\sqrt{\Omega}}{4(K+\Omega)} \Delta\tilde{s} + O(\Delta\tilde{s}^2), & a_1 &= 3\Delta\tilde{s} + O(\Delta\tilde{s}^2), \\ b_1 &= \frac{3}{K+1} \Delta\tilde{s} + O(\Delta\tilde{s}^2), & c_1 &= \frac{3K}{K+1} \Delta\tilde{s} + O(\Delta\tilde{s}^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

を得る. $s = 1.9$ の場合は $\Delta s = 0.05$ であるので, 最低次の関係では, F, G_1, G_2 の最大値は, それぞれ 0.3 である. 関係 (4.7) から, $\Delta\tilde{s}$ が大きくなると, 最大値がそれぞれ大きくなるのが分かる. Ω については, 最低次では μ の値にしか関与しない.

次に, $\Omega = 5$, $s = 1$ の場合の波形を図 4 に示す. 解はもはや孤立波を表さない. 位相空間内では, 図 5 に見られるように, 軌道は存在領域の表面近くを通ることが分かる. これより, 不等式 (3.8) は解のよい見積もりを与えることが分かる. 解軌道はいくら ζ が大きくなっても特異点に戻ることはない. 軌道はカオス的になるようである. そこで, ポアンカレ断面を $G_1 = 2$, $G_3 > 0$ でとり, (G_2, G_3) 平面における断面を図 6 に黒丸で示す. 軌道はトーラスの上にあるかの印象をあたえるが, 一部に軌道が平面内を埋め尽くすような領域が見られる. 解軌道が特異点に戻らないことから, そこでのもう一つの漸近枝, すなわち $\zeta \rightarrow \infty$ で特異点に近づく漸近枝に沿って ζ の負の向きに積分する. この解も $\zeta \rightarrow -\infty$ では特異点には漸近しない. そのポアンカレ断面を図 6 に白丸で示す. 黒丸と白丸はお互い補間しながら領域を埋めていくことが見られる. このような振る舞いは Ω の値を 1.2, 2, 3, 4, 5, 7, 10 と変えても定性的にはあまり変わらないようである. 孤立波の範囲とカオスの範囲を伝播速度 s において特定することは, 数値的には大変難しい.

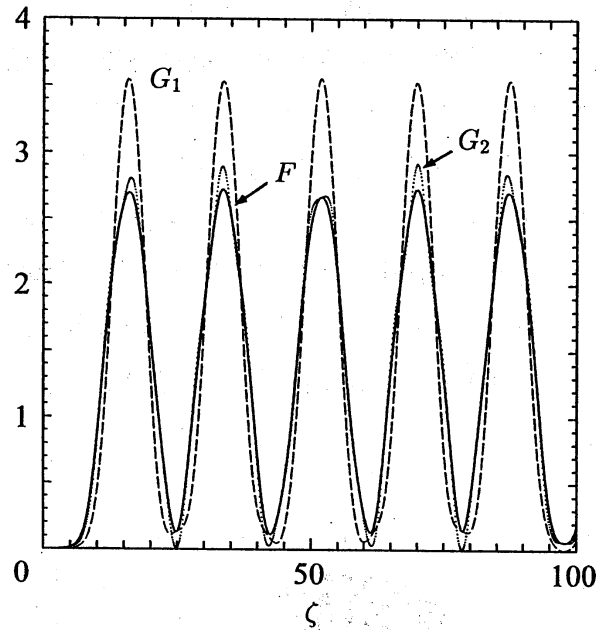


図4 : F, G_1, G_2 の波形 ($K = 1, \Omega = 5, s = 1$)

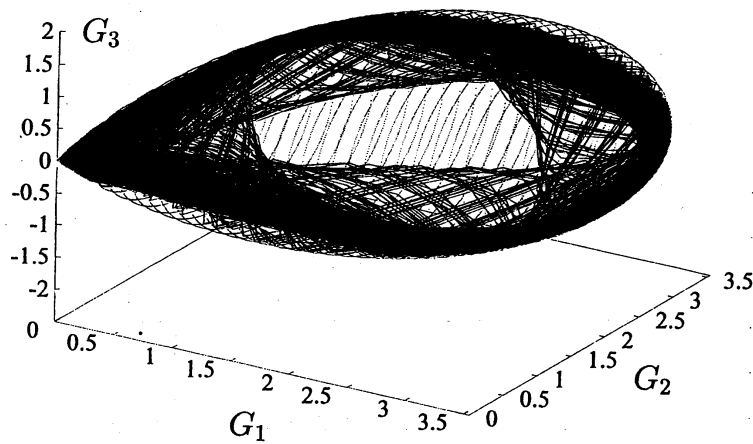


図5 : 位相空間 (G_1, G_2, G_3) 内における解軌道 (実線) とエネルギーシェルの存在範囲 (点線, 図1 参照) ($K = 1, \Omega = 5, s = 1$)

5. 結果

定常進行波解を調べることでより次の事柄が分かった. 有界な解が存在する条件より, 伝播速度は音速 a_0 より遅い (亜音速) が, 共鳴器列によって決まるしきい値 $a_0[1 - (\kappa_1 + \kappa_2)/2]$ より速いことが分かった. これより, 二重列にすることにより伝播速度の許容範囲を広げることができる. また, トンネル内の音圧の最大値は, 単一列を取り付けた場合の最大値の $(\sqrt{K} + 1/\sqrt{K})$ 倍より必ず小さいことが分かった.

ところで共鳴器列による分散効果は本質的に高次分散ではないことに注意する。ただ、固有振動数が高い極限でのみ、共鳴器列は漸近的に高次分散に等価な効果を生じさせる。この結果、伝播速度が下限に近づくにつれ、常に孤立波が存在することになる。これは、孤立波では代表周波数が下がる（ μ が小さくなる）ので、相対的に固有振動数が高くなるからである。しかし、伝播速度が速くなるとトンネル内の音圧と空洞内の音圧が追従しなくなり高次分散効果は消え、むしろ空洞本来の慣性効果による分散効果が大きくなる。単一系列の場合には、それでも孤立波（ソリトンとは異なる）を形成することはできた。しかし、二重列の場合には孤立波は崩れ、二つの空洞の慣性効果の違いが本質的なカオス的な波列が出現するようになる。

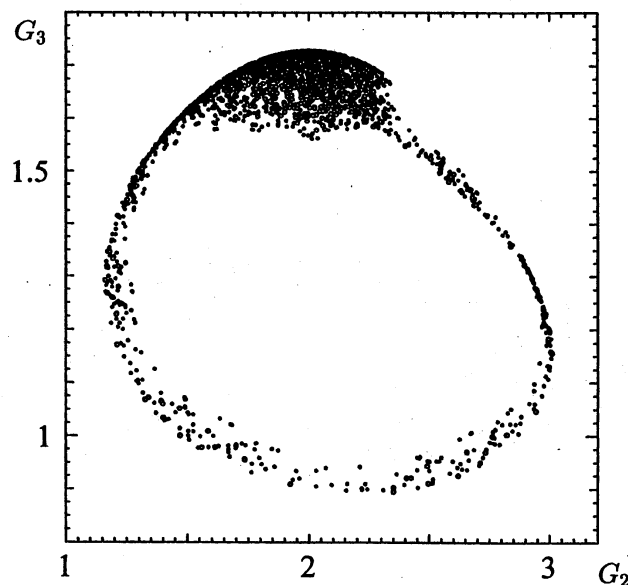


図6：解軌道の $G_1 = 2$ でのポアンカレ断面

参考文献

1. Sugimoto, N. "Acoustic solitary waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators," J. Acoust. Soc. Am. **99**, 1971-1976 (1996).
2. Sugimoto, N. "On generation of acoustic soliton," in *Advances in Nonlinear Acoustics* (ed. Hobaek, H.) (World Scientific, Singapore, 1993), pp.545-560.
3. Sugimoto, N. "The generation of an acoustic soliton and soliton tube," Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. **44**, 56-72 (1995).
4. Sugimoto, N. "Propagation of nonlinear acoustic waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators," J. Fluid Mech. **244**, 55-78 (1992).