

Classical Euclidean Yang-Mills 場に於ける Self-Duality の幾何学的意味について

東大 理 村瀬元彦

§ 1. Gauge 場の出現

All such theories may be expressed as superpositions of certain "simple" theories; we show that each "simple" theory is associated with a simple Lie algebra.

Glashow & Gell-Mann

M : 4次元 Minkowski 空間, $(\begin{smallmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{smallmatrix})$ をその metric tensor とする.

よく用いられる座標 x_0, x_1, x_2, x_3 に対し $dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ を volume element とする orientation を fix する. $\phi: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ なる vector 値函数に対し, 積を $\phi \cdot \phi' = \tau \bar{\phi} \cdot \phi'$ により定めるとき,

$$(1) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2} d\phi \wedge *d\phi + \frac{1}{2} m^2 \phi \wedge * \phi \quad \text{を自由場の Lagrangean}$$

density という. (定符号でない内積を持った空間上の *-operator

については例えば H. Flanders [8] 参照) また $S = \int_M \mathcal{L}$ を作用

という. S の変分が 0 として Euler-Lagrange の運動方程式を導

$$\text{くと } \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = d \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta d\phi} \quad \text{となる. 但し}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} : \phi \text{ を一番目に持ってきて消す} \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta d\phi} : d\phi \text{ を一番前に持ってきて消す} \end{cases}$$

で, $\phi, *\phi, d\phi, *d\phi$ をすべて独立だと思って計算する. (1) の場

$$\text{合は } \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = \frac{1}{2} m^2 * \phi, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta d\phi} = -\frac{1}{2} * d\phi \quad \text{ゆえ}$$

$$(2) \quad d*d\phi + m^2*\phi = 0 \quad \text{を得る. これを Klein-Gordon 方程式と}$$

いう.

今, $\phi: M \rightarrow \mathbb{C}^1$ が電荷を持った粒子の場を表わすものとしよう. 我々は $|\phi|^2$ を電荷を通して存在確率として認識するだけだから, $\phi \mapsto g\phi$ ($g: M \rightarrow U(1)$) なる変換を行なっても我々は知ることか出来ない. 従って $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, d\phi)$ は $\phi \mapsto g\phi$ によって不変なように出来ていなければならない. (1) のかわりにどのようなものにとればよいだろうか?

$\phi \mapsto g\phi$ は何かを変えていっているのではなく, 同じものを違った風にとらえているのだ. と考えよう. それを vector bundle の section の表示の変換としてとらえることが出来る. そこで,

$E: M$ 上の $\mathbb{C}^1$ -bundle, structure group は $U(1)$.

$\phi \in \Gamma(M, E)$, とし, exterior covariant differentiation D を用い,

$$(3) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2} D\phi \wedge * D\phi + \frac{1}{2} m^2 \phi \wedge *\phi \quad \text{とすると, これは}$$

section の表示の仕方にはよらない. ($D\phi$ は tensorial 1-form かつ M 上の 1-form と見做せる. $*D\phi$ は M 上の 3-form として定義される.) さて, (1) の形の Lagrangean を (3) にかえるには connection を導入せねばならない. $P \in M$ 上の $U(1)$ -principal bundle, $A \in P$ 上の connection form とする. D は A を含んでいるから, (3) の $\mathcal{L}$ は,

中だけでなく新しい「場」 A を含んでいる。「場」と見たときの connection form を gauge field と呼ぶ。

A に対する運動方程式を導く為に、 A の Lagrangean density を定めよう。 A は tensorial 1-form ではないから M 上の form とは見てない。従って A だけの項 (質量項) で section の表示によらないものはとれない。そこで、gauge 場の Lagrangean を

$$(4) \quad \mathcal{L}_G = -\frac{1}{2} DA \wedge * DA$$

と定める。 DA は tensorial 2-form であり $\mathcal{L}_G$ は M 上の 4-form として well-defined.

作用 $S_G = \int_M \mathcal{L}_G$ の変分方程式から Euler-Lagrange 方程式と導くと、 $\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta A} = (-1)^{\deg A} D \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta DA}$ となるから、整理して

$$(5) \quad D * DA = 0$$

を得る。 A は可換 Lie 環に値を持つ 1-form であり $DA = dA + \frac{1}{2}[A, A] = dA$ 。よって (5) は $d * dA = 0$ と書かれる。 $d * dA = 0$ は 4 元 vector potential A を用いて書いた Maxwell の電磁場の方程式に他ならない。

$g: M \rightarrow U(1)$ を用いて $\phi \mapsto g \cdot \phi$ と変換することと gauge 変換と呼ぶ。以上で判ったことは; 電荷を持つ場の Lagrangean は gauge invariant でなければならぬ。そのとき、Lagrangean には新しい gauge 場 A が出現する。そして A は Maxwell の方程式を満たす。

Maxwellの方程式を満たす場は光子の場であり、電磁相互作用が光により媒介されることの数学的表現が出来た、と解釈される。

1954年に楊振寧とR.L. Mills [1] は、以上に述べたことの拡張として B -field なる概念を導入した。 B -fieldの必要性や物理的意味については [1] の introduction に述べられているので、ここではその数学的定義を一般化して述べる。

G : ^{compact} Lie group, $\rho: G \rightarrow U(n)$ とその n 次元 unitary 表現,

$P \xrightarrow{\pi} M$ M 上の G -principal bundle (real analytic) とする。

$\widehat{G} = \{ g: M \rightarrow G \mid M \text{ から } G \text{ への real analytic map} \}$ を gauge 群と呼ぶ。

B : P 上の connection form (real analytic)

D : B により定まる exterior covariant differentiation

$\phi \in \Gamma(M, E)$

E : P, ρ に associate した M 上の $\mathbb{C}^n$ -vector bundle.

Gauge invariant な ϕ の Lagrangean は

$$(6) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2} D\phi \wedge * D\phi + \frac{1}{2} m^2 \phi \wedge * \phi \quad \text{あるいは } G\text{-gauge 場}$$

と表わされる。 B を場と見たとき、Yang-Mills 場と呼ぶ。 B

の Lagrangean は (4) のまねをして

$$(7) \quad \mathcal{L}_{\text{Y.M.}} = -\frac{1}{2} \text{trace} (DB \wedge * DB)$$

と定める。 B は n 次反エルミート行列に値を持つ 1-form であ

るから (4) とは違っており (7) には "trace" をつけた。

$S_{Y.M.} = \int_M \mathcal{L}_{Y.M.}$ の変分方程式から Euler-Lagrange 方程式を導くこと、形式的に $\frac{\delta S_{Y.M.}}{\delta B} = -D \cdot \frac{\delta \mathcal{L}_{Y.M.}}{\delta DB}$ となり、

$$(8) \quad D * DB = 0$$

を得る。(8) を Yang-Mills 方程式という。これは 2 階非線型方程式である。

$G = U(1)$ のとき connection form A が電磁相互作用を記述したのと同様に、 $G = SU(2)$ のときの Yang-Mills 場 B が弱い相互作用を記述すること知られている。(例えば E.S. Abers & B.W. Lee [2].) 1974 年頃からは、 $G = SU(3)$ あるいは、より大きな群、とした場合の Yang-Mills 場が強い相互作用を記述するのではないか、と予想されている。

§ 2. Euclidean Yang-Mills 方程式

Minkowski 空間ではなく metric tensor $(\cdot, \cdot)$ を持った $\mathbb{R}^4$ 上で

§ 1 と同じことをして得られる B を Euclidean Yang-Mills 場という。(Euclidean で考えることの物理的意味については例えば吉川圭 [9].)

以下では $\mathbb{R}^4$ 上の Yang-Mills 場のみを考察する。

$\mathbb{R}^4$ の座標を x_0, x_1, x_2, x_3 とし、 $dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ は volume element となる orientation を与える fix する。

改めて記号を定義する. ($G = SU(n)$ の場合のみ扱う.)

$P \longrightarrow \mathbb{R}^4$: $SU(n)$ を fibre に持つ real analytic principal bundle

B : P 上定義された connection form. 値は n 次反エルミート行列にもつものとする. (B は real analytic)

D : B による定まる exterior covariant differentiation

$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{trace}(DB \wedge *DB)$: Yang-Mills Lagrangian.

§1 では注意したか, たか, DB は tensorial 2-form であり,

$\mathcal{L}$ は $\mathbb{R}^4$ 上の 4-form として well-defined である.

$DB = dB + \frac{1}{2}[B, B]$ は P 上の curvature form である. 従って

$F = DB$ とおけば

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{trace } F \wedge *F$$

は各点で正の値をとるから,

$$\|F\|_{\text{def}}^2 = \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{trace } F \wedge *F$$

は curvature form の正定値 norm を定義する. Yang-Mills 方程式 $D*DB = 0$ の解 B は $\|F\|^2$ の極値に対応している.

我々は $\|F\|^2$ が有限になる様な B, F を扱いたい. そこで条件を強くして, ∞ 遠で十分早く 0 になる F を考える. このとき B は ∞ 遠で constant. 問題を幾何学化して扱う為に $\mathbb{R}^4$ に強く F も B も $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\} = S^4$ 上の real analytic form である, と仮定する. P も S^4 上定義された $SU(n)$ -principal bundle と考える.

$$\|F\|^2 = \int_{S^4} -\frac{1}{2} \text{trace } F \wedge *F.$$

($\mathbb{R}^4$ の metric と orientation から定まる metric と orientation を S^4 に与え, それを用いて S^4 上の $*$ -operator を定義されている.)

S^4 上の Yang-Mills 方程式

$$(9) \quad D * DB = 0$$

の解を instanton solution と呼ぶ.

Bianchi の恒等式 $DD B = 0$ により,

$$(10) \quad *DB = \pm DB \quad (\text{or } *F = \pm F)$$

なる B は (9) の解である. (+) の方を self-dual Y.-M. 方程式,

(-) の方を anti-self-dual Y.-M. 方程式という. 群が $SU(2)$

のため, (9) の解であって (10) を満たさないものはまだひとつも知られていない. ([3].)

Real analytic fiber bundle $P \longrightarrow S^4$ の first Pontrjagin number は,

$$(11) \quad P_1 = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{S^4} \text{trace } F \wedge F$$

で与えられる. Bundle P を与えれば P_1 は定まる.

命題 1.

$P_1 \leq 0$ ならば, $*F = -F \iff \|F\|^2$ が最小.

$P_1 \geq 0$ ならば, $*F = F \iff \|F\|^2$ が最小.

証明 (Atiyah [7])

$su(n)$ (n 次反エルミート行列全体) に値を持つ S^4 上の 2-form の空間を Λ^2 と書く. $*$: $\Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$ で, $*^2 = 1$ ゆえ $*$ の固有値は ± 1 . $+1$ に属する固有空間を Λ^+ , -1 に属する固有空間を Λ^- で表わす. $\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ である. この直和分解に従って, $F = F^+ \oplus F^-$ と分解する. $F^\pm \in \Lambda^\pm$.

$a \in \Lambda^+$, $b \in \Lambda^-$ に対し,

$$\begin{aligned} \text{trace } a \wedge b &= \text{trace } a \wedge (-*b) = \text{trace } (-b) \wedge *a \\ &= \text{trace } (-b \wedge a) = -\text{trace } a \wedge b \quad \text{であるから} \end{aligned}$$

$\text{trace } a \wedge b = 0$ が成り立つ.

従って,

$$\begin{aligned} \|F\|^2 &= \int_{S^4} -\frac{1}{2} \text{trace } F \wedge *F = \int_{S^4} -\frac{1}{2} \text{trace } (F^+ + F^-) \wedge (F^+ - F^-) \\ &= \int_{S^4} -\frac{1}{2} \text{trace } F^+ \wedge *F^+ + \int_{S^4} -\frac{1}{2} \text{trace } F^- \wedge *F^- \\ &\quad + \int_{S^4} \frac{1}{2} \text{trace } F^+ \wedge F^- - \int_{S^4} \frac{1}{2} \text{trace } F^- \wedge F^+ \\ &= \|F^+\|^2 + \|F^-\|^2. \quad \text{同様にし} \end{aligned}$$

$$2\pi^2 p_1 = \|F^+\|^2 - \|F^-\|^2.$$

$$p_1 \leq 0 \text{ としよう. } \|F\|^2 + 2\pi^2 p_1 = 2\|F^+\|^2 \geq 0.$$

$$\therefore \|F\|^2 \geq -2\pi^2 p_1 \quad \text{で, } \|F\|^2 = -2\pi^2 p_1 \Leftrightarrow \|F^+\|^2 = 0 \Leftrightarrow F^+ = 0.$$

よって, $*F = -F$ のとき $\|F\|^2$ が最小値をとる. $p_1 \geq 0$ の場合も同様. $\blacksquare$

Note

1°. $P_1 \leq 0$ かつ $*F = F \Rightarrow F = 0, P_1 = 0$.

実際, $\|F^+\|^2 \leq \|F^-\|^2$ で, $F^- = 0$ だから $F^+ = 0$ となる.
同様に $P_1 \geq 0$ かつ $*F = -F$ なる解も 0しかない.

2°. S^4 の orientation をかえると, $*$ の固有空間が入れかわり,
 P_1 の符号がかわる. 従って, $P_1 \geq 0$ のとき $*F = F$ なる解があれば,
それは orientation をかえれば $P_1 \leq 0$ のときの $*F = -F$
なる解に他ならない.

このように, self-dual と anti-self-dual とは本質的に
同じものであるから, 以下では S^4 に (前に述べたような)
orientation を fix し, もっとば anti-self-dual Y.-M. 方程式
のみを扱うことにする.

方程式 (9) $D*DB = 0$ は $\text{norm } \|F\|^2$ の極値に対応して
いたが, 方程式 (10) $*DB = \pm DB$ は $\text{norm } \|F\|^2$ の最小値に対
応している訳である.

G. Girardi et al. [3] によれば, $SU(2)$ -Yang-Mills 場
に対しては, 方程式 (10) 即ち (anti-) self-duality とエ
ネルギー・運動量テンソルが消えることとが同値であ
るという. [3] には $SU(n)$ $n \geq 3$ の場合についても証

明でない。

Yang-Mills 場より 易しい 場合に, type (9) の方程式 と type (10) の方程式 かの くらゐ つかつてゐるか, について §5. で少し 触れる ことにする。

§3. Anti-self-duality と complex structure I.

M.F. Atiyah は [5] で, anti-self-dual Y.-M. 方程式 か, ある 実多様体上の 複素構造の 積分可能性条件 と同値である ことを 指摘した。§3 ではその 正確な statement と証明を 与える。

Hamilton の 四元数体を $\mathbb{H}$ で表わし, $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$ と 見なす。

$\pi: \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \rightarrow S^4$ を 次の ように 定める。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^4 / \mathbb{C}^* & \cong & \mathbb{H}^2 / \mathbb{C}^* \\ \searrow \pi & \circlearrowleft & \downarrow \text{natural projection} \\ & & S^4 \cong \mathbb{H}^2 / \mathbb{H}^* \end{array}$$

Projective space は $\mathbb{C}$ 上の ものしか扱わないので, 以下 $\mathbb{C}$ を 略す。

$$\begin{array}{ccc} P \xleftarrow{\quad} \pi^*(P) & & \pi^*(P)^{\mathbb{C}} \\ \downarrow \text{SU}(n) & \downarrow \text{SU}(n) & \downarrow \text{SL}(n, \mathbb{C}) \\ S^4 \xleftarrow{\pi} \mathbb{P}^3 & \xRightarrow{\text{fibre を 複素化}} & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

$\text{SU}(n)$ -principal bundle $P \rightarrow S^4$ の π による induced bundle を $\pi^*(P)$ とかく。 $\pi^*(P)$ の fibre を 複素化した bundle を $\pi^*(P)^{\mathbb{C}}$

で表わす. P 上の real analytic な connection form B と curvature form $F = DB$ の $\pi^*(P)^{\mathbb{C}}$ への引き上げを $B^{\mathbb{C}}, F^{\mathbb{C}}$ と書く.

$B^{\mathbb{C}}, F^{\mathbb{C}}$ は $\pi^*(P)^{\mathbb{C}}$ 上の real analytic な connection, curvature form である.

$\pi^*(P)^{\mathbb{C}} \ni u$ に於ける接空間 $T_u(\pi^*(P)^{\mathbb{C}})$ は, $B^{\mathbb{C}}$ によって horizontal 成分 H_u と vertical 成分 V_u とに直和分解されている. $H_u = \mathbb{C}^3$, $V_u = \mathbb{C}^{n^2-1}$ 中の $B^{\mathbb{C}}$ は

$T_u(\pi^*(P)^{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^{n^2-1}$ を与えていると言えよう. 即ち $B^{\mathbb{C}}$ は $\pi^*(P)^{\mathbb{C}}$ の almost complex structure を unique に定めている. それを J_B と書く. 次の定理が知られている.

定理 1.

J_B が integrable (i.e. $\pi^*(P)^{\mathbb{C}}$ が複素多様体)

$\iff F^{\mathbb{C}}$ が type (1,1) の form.

これを使えば, [5] で述べられた次の定理が示される.

定理 2. (Atiyah?)

J_B が integrable $\iff *DB = -DB$ (anti-self-dual)
on S^4 .

証明 まづ $\Leftarrow$ を言う .

$S^4 - \{\infty\} = \mathbb{R}^4$ の局所座標を x_0, x_1, x_2, x_3 , $\mathbb{P}^3$ の同次座標を $z_0 : z_1 : z_2 : z_3$ とする . $\pi : \mathbb{P}^3 \rightarrow S^4$ は ,

$$(12) \quad \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2\alpha} (\bar{z}_0 z_2 + z_0 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3) \\ x_1 = \frac{-i}{2\alpha} (\bar{z}_0 z_2 - z_0 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_3) \\ x_2 = \frac{1}{2\alpha} (\bar{z}_0 z_3 + z_0 \bar{z}_3 - z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2) \\ x_3 = \frac{-i}{2\alpha} (\bar{z}_0 z_3 - z_0 \bar{z}_3 - z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) \end{cases} \quad \alpha = |z_0|^2 + |z_1|^2$$

で与えられる .

F^c は自然に $\mathbb{P}^3$ 上の 2-form と見る事ができ , $\pi^*(dx_\mu \wedge dx_\nu)$ の ($su(n)$ -係数) 一次結合で表わされる . 従って ,

$$(*) \quad \pi^*(\Lambda^-) \hookrightarrow \Lambda^{(1,1)}(\mathbb{P}^3) = \{\mathbb{P}^3 \text{ 上の type } (1,1) \text{ form 全体}\}$$

を言えよ . (Λ は S^4 上の anti-self-dual 2-form 全体 .)

その為には , $\pi^* dx_\mu \wedge dx_\nu$ を具体的に計算すればよい .

$\mathbb{P}^3 \cap \{z_0 \neq 0\}$ の局所座標を $(1 : z_1 : z_2 : z_3)$ で与える . このとき ,

$$(13) \quad \begin{cases} \pi^* dx_0 = \frac{1}{2\alpha} (w_0 dz_1 + \bar{w}_0 d\bar{z}_1 + dz_2 + d\bar{z}_2 + \bar{z}_1 dz_3 + z_1 d\bar{z}_3) \\ \pi^* dx_1 = \frac{i}{2\alpha} (w_1 dz_1 - \bar{w}_1 d\bar{z}_1 - dz_2 + d\bar{z}_2 + \bar{z}_1 dz_3 - z_1 d\bar{z}_3) \\ \pi^* dx_2 = \frac{1}{2\alpha} (w_2 dz_1 + \bar{w}_2 d\bar{z}_1 - \bar{z}_1 dz_2 - z_1 d\bar{z}_2 + dz_3 + d\bar{z}_3) \\ \pi^* dx_3 = \frac{i}{2\alpha} (w_3 dz_1 - \bar{w}_3 d\bar{z}_1 - \bar{z}_1 dz_2 + z_1 d\bar{z}_2 - dz_3 + d\bar{z}_3) \end{cases}$$

$$\alpha = 1 + |z_1|^2, \quad w_0 = \bar{z}_3 - 2x_0 \bar{z}_1, \quad w_1 = -\bar{z}_3 + 2iz_1 \bar{z}_1$$

$$w_2 = -\bar{z}_2 - 2x_2 \bar{z}_1, \quad w_3 = \bar{z}_2 + 2iz_3 \bar{z}_1$$

である .

$\mathbb{R}^4$ 上の anti-self-dual 2-form の base は

$$\langle dx_0 \wedge dx_1 - dx_2 \wedge dx_3, dx_0 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3, dx_0 \wedge dx_3 - dx_1 \wedge dx_2 \rangle$$

であるから, $\pi^* dx_\mu \wedge dx_\nu = \pi^* dx_\mu \wedge \pi^* dx_\nu$ を計算して

(14) :

$$\begin{aligned} \pi^*(dx_0 \wedge dx_1 - dx_2 \wedge dx_3) &= \frac{-i}{2\alpha^3} \left\{ 2(\bar{z}_1 z_2 z_3 + z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3) + (1 - |z_1|^2)(|z_2|^2 - |z_3|^2) \right\} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \\ &\quad + \frac{-i}{2\alpha^2} \left\{ (\bar{z}_1 z_2 - \bar{z}_3) dz_1 \wedge d\bar{z}_2 + (z_1 \bar{z}_2 - z_3) dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \right\} \\ &\quad + \frac{i}{2\alpha^2} \left\{ (\bar{z}_1 z_3 + \bar{z}_2) dz_1 \wedge d\bar{z}_3 + (z_1 \bar{z}_3 + z_2) dz_3 \wedge d\bar{z}_1 \right\} \\ &\quad + \frac{i}{2\alpha} (dz_2 \wedge d\bar{z}_2 - dz_3 \wedge d\bar{z}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi^*(dx_0 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3) &= \frac{1}{2\alpha^3} \left\{ (\bar{z}_1 z_2^2 - z_1 \bar{z}_2^2) + (\bar{z}_1 z_3^2 - z_1 \bar{z}_3^2) + (1 - |z_1|^2)(\bar{z}_2 z_3 - z_2 \bar{z}_3) \right\} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha^2} \left\{ (\bar{z}_1 z_3 + \bar{z}_2) dz_1 \wedge d\bar{z}_2 - (z_1 \bar{z}_3 + z_2) dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha^2} \left\{ (-\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_3) dz_1 \wedge d\bar{z}_3 - (-z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_3) dz_3 \wedge d\bar{z}_1 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha} (dz_2 \wedge d\bar{z}_3 - dz_3 \wedge d\bar{z}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi^*(dx_0 \wedge dx_3 - dx_1 \wedge dx_2) &= \frac{-i}{2\alpha^3} \left\{ (z_1 \bar{z}_3^2 + \bar{z}_1 z_3^2) - (z_1 \bar{z}_2^2 + \bar{z}_1 z_2^2) + (1 - |z_1|^2)(z_2 \bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3) \right\} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \\ &\quad + \frac{-i}{2\alpha^2} \left\{ (\bar{z}_1 z_3 + \bar{z}_2) dz_1 \wedge d\bar{z}_2 + (z_1 \bar{z}_3 + z_2) dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \right\} \\ &\quad + \frac{-i}{2\alpha^2} \left\{ (\bar{z}_1 z_2 - \bar{z}_3) dz_1 \wedge d\bar{z}_3 + (\bar{z}_2 z_1 - z_3) dz_3 \wedge d\bar{z}_1 \right\} \\ &\quad + \frac{i}{2\alpha} (dz_2 \wedge d\bar{z}_3 + dz_3 \wedge d\bar{z}_2) \end{aligned}$$

を得る. 確かに π^* の $(1,1)$ 型の 2-form である. よって,

$*F = -F \Rightarrow F^c$ は type $(1,1) \Leftrightarrow J_B$ は integrable と言えた.

次に $\Rightarrow$ を言う .

$f = \sum_{\mu < \nu} f_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$ を S^4 上の 2-form とする .

$\pi^*(f)$ が type (1,1) $\Rightarrow *f = -f$ を言いはよ!! .

$\pi^*(f)$ が type (1,1) なるが, 特に $d\zeta_2 \wedge d\zeta_3$ の係数は 0 である .

$\pi^*(f) = \sum_{\mu < \nu} f_{\mu\nu} \pi(\pi^* dx_\mu \wedge dx_\nu)$ 中の (13) を用いて計算すると

$\alpha \neq 0$ だから

$$2i\zeta_1 (f_{01} \circ \pi + f_{23} \circ \pi) + (1 + |\zeta_1|^2) (f_{02} \circ \pi - f_{13} \circ \pi) \\ + i(-1 + |\zeta_1|^2) (f_{03} \circ \pi + f_{12} \circ \pi) = 0 \quad \text{となる.}$$

任意の $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ について上式が成立

$$\Leftrightarrow f_{01} = -f_{23}, \quad f_{02} = f_{13}, \quad f_{03} = -f_{12}$$

$$\Leftrightarrow f = f_{01} (dx_0 \wedge dx_1 - dx_2 \wedge dx_3) + f_{02} (dx_0 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3) \\ + f_{03} (dx_0 \wedge dx_3 - dx_1 \wedge dx_2)$$

$$\Leftrightarrow *f = -f .$$

∞遠方のところは座標をとりかえて調べればよい . 

これで S^4 上の anti-self-dual Y.-M. 場が $\mathbb{P}^3$ 上の bundle $\pi^*(P)^\mathbb{C}$ の複素構造が unique に決まる ことが判った .

Complex analytic bundle $\pi^*(P)^\mathbb{C}$ からは, $\mathbb{P}^3$ 上の rank n の holomorphic (従って algebraic) vector bundle が決まるから, anti-self-dual Y.-M. 場と algebraic vector bundle との対応がわかった .

今まで知られていた (anti-) self-dual solution かすへて有理関数だったのは、はいめかゝ algebraic なものしかなかったから、ということも明らかになった。

Atiyah-Ward [4] には、 $n=2$ の場合に、対応する vector bundle の性質が詳しく調べられているが、我々は anti-self-duality の幾何学的表現をもう少し詳しく調べることにしよう。

§ 4. Anti-self-duality と complex structure II.

$\mathbb{P}^3$ の相異なる 2 点 $\zeta = (\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3)$, $\eta = (\eta_0 : \eta_1 : \eta_2 : \eta_3)$ を通る 1 次元 linear subspace (projective line) を $\langle \zeta \eta \rangle$ と表わす。

$$\mathbb{P}^5 \ni \delta = (\delta_{01} : \delta_{02} : \delta_{03} : \delta_{12} : \delta_{13} : \delta_{23})$$

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \delta \in \mathbb{P}^5 \mid \delta_{01} \delta_{23} - \delta_{02} \delta_{13} + \delta_{03} \delta_{12} = 0 \right\}.$$

G は $\mathbb{P}^5$ の中の 4 次元代数多様体。このとき、

$$\left\{ \mathbb{P}^3 \text{ の projective line 全体} \right\} \ni \langle \zeta \eta \rangle \longmapsto \text{Plü} \langle \zeta \eta \rangle = \delta \in G$$

を、 $\delta_{ij} = \zeta_i \eta_j - \zeta_j \eta_i$ によって定めると、

$\text{Plü} : \text{Grassmann of } \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\sim} G$ である。 $\text{Plü} \langle \zeta \eta \rangle \in \langle \zeta \eta \rangle$ の Plücker 座標という。

G の定義方程式は、 $\mathbb{P}^5$ の中で次のように座標変換すれば、

$$w_0^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 + w_5^2 \quad \text{と書ける。従って、} \mathbb{R}^5 \text{ の中の}$$

単位球面 S^4 の複素化が G になっている。

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i & & & & \\ & i & & & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & & i & & \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{01} \\ g_{23} \\ g_{02} \\ -g_{13} \\ g_{03} \\ g_{12} \end{pmatrix}.$$

我々は G の局所座標として, 上の w ではなく g のものをとる. G は $g_{01}g_{23} - g_{02}g_{13} + g_{03}g_{12} = 0$ で定義されているから, $G \cap \{g_{01} \neq 0\}$ 上の函数 $\frac{g_{02}}{g_{01}}, \frac{g_{13}}{g_{01}}, \frac{g_{03}}{g_{01}}, \frac{g_{12}}{g_{01}}$ は, 独立変数と思うことが出来る. そこで,

$$(15) \quad \begin{cases} z_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{g_{03}}{g_{01}} - \frac{g_{12}}{g_{01}} \right) \\ z_1 = \frac{i}{2} \left(\frac{g_{03}}{g_{01}} + \frac{g_{12}}{g_{01}} \right) \\ z_2 = \frac{-1}{2} \left(\frac{g_{02}}{g_{01}} + \frac{g_{13}}{g_{01}} \right) \\ z_3 = \frac{-i}{2} \left(\frac{g_{02}}{g_{01}} - \frac{g_{13}}{g_{01}} \right) \end{cases}$$

を $G \cap \{g_{01} \neq 0\}$ の局所座標として採用する.

定義 各 z_0, z_1, z_2, z_3 が実数である G の点と,

$g_{01} = g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0, g_{23} = 1$ なる 1 点とを G の実点と呼ぶ. また, Plücker 座標で実点に対応する $\mathbb{P}^3$ の projective line を real line と呼ぶ.

$G \cap \{\text{実点全体}\} \cong S^4$ である: このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 2.

$$\text{Plü} : \{ \text{real line 全体} \} \longrightarrow \{ \text{実数全体} \} (\hookrightarrow \mathbb{Q})$$

は, § 3.2 で与えた fibering $\pi : \mathbb{P}^3 \longrightarrow S^4$ に対応する.

即ち, $\{ \text{real line 全体} \} = \{ \pi \text{ の fiber 全体} \}$ で, その元 ℓ

に対し $\text{Plü}(\ell) = \pi(\ell) \in S^4 \hookrightarrow \mathbb{Q}$ が成り立つ.

証明

1°. π の fiber が $\mathbb{P}^3$ の projective line になること.

§ 3.2 では $\mathbb{P}^3 \cong \mathbb{H}^2 / \mathbb{C}^*$ とし $\mathbb{P}^3$ を作った. $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$ とおこう. $\mathbb{P}^3 \ni \zeta$ は $(\zeta_0 + \zeta_1 j, \zeta_2 + \zeta_3 j) / \mathbb{C}^*$ と表わされる. そこで, $\mathbb{P}^3$ の自己同型 $\sigma : \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^3$ を

$$\mathbb{P}^3 \ni (\zeta_0 + \zeta_1 j, \zeta_2 + \zeta_3 j) / \mathbb{C}^* \xrightarrow{\sigma} (j\zeta_0 + j\zeta_1 j, j\zeta_2 + j\zeta_3 j) / \mathbb{C}^* \quad \text{に}$$

よって定める. $j^2 = -1 \in \mathbb{C}^*$ かつ $\sigma^2 = 1$. また, $\zeta = (\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3)$

に対し $\sigma(\zeta) = (-\bar{\zeta}_1 : \bar{\zeta}_0 : -\bar{\zeta}_3 : \bar{\zeta}_2)$ と表わされるので.

σ は fixed point を持たないことが判る.

$$\pi(\zeta) = (\zeta_0 + \zeta_1 j)^{-1} (\zeta_2 + \zeta_3 j) \in \mathbb{H}^2 / \mathbb{H}^* \quad \text{であるから,}$$

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(\zeta)) &= \{ (h(\zeta_0 + \zeta_1 j), h(\zeta_2 + \zeta_3 j)) / \mathbb{C}^* \mid h \in \mathbb{H} \} \\ &= \{ ((\lambda + \mu j)(\zeta_0 + \zeta_1 j), (\lambda + \mu j)(\zeta_2 + \zeta_3 j)) / \mathbb{C}^* \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C} \} \\ &= \{ \lambda(\zeta_0 + \zeta_1 j, \zeta_2 + \zeta_3 j) / \mathbb{C}^* + \mu(j\zeta_0 + j\zeta_1 j, j\zeta_2 + j\zeta_3 j) / \mathbb{C}^* \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C} \} \end{aligned}$$

$$= \langle \zeta, \sigma(\zeta) \rangle \quad \text{である.}$$

これより, π の fiber が $z \in \mathbb{R}^3$ により $z \in \langle z \sigma(z) \rangle$ と表わされることを判った.

2°. $\langle z \sigma(z) \rangle$ が real line であることを.

Plücker $\langle z \sigma(z) \rangle$ が (15) に従って z_0, z_1, z_2, z_3 を作ると,

$\delta_{01} \neq 0$ のとき

$$(16) \quad \begin{cases} z_0 = \frac{1}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \operatorname{Re}(z_0 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_3) \\ z_1 = \frac{-1}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \operatorname{Im}(z_0 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_3) \\ z_2 = \frac{-1}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \operatorname{Re}(-z_0 \bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_2) \\ z_3 = \frac{1}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \operatorname{Im}(-z_0 \bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \operatorname{Re} : \text{real part} \\ \operatorname{Im} : \text{imaginary part} \end{array}$$

を得る. これらはすべて実数. また $\delta_{01} = |z_0|^2 + |z_1|^2 = 0$ なら

$$\operatorname{Plücker} \langle z \sigma(z) \rangle = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \quad (\delta_{01} = \delta_{02} = \delta_{03} = \delta_{12} = \delta_{13} = 0)$$

で, やはり $\langle z \sigma(z) \rangle$ は real line である.

3°. すべてこの real line が π の fiber になること.

$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ に対応する場合は明らか.

任意の4実数 z_0, z_1, z_2, z_3 を与えたとき, 方程式

$$(17) \quad \begin{cases} z_0 - iz_1 = \frac{z_0 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_3}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \\ -z_2 + iz_3 = \frac{-z_0 \bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_2}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \end{cases}$$

が, 複素数解 (z_0, z_1, z_2, z_3) を持つことが判ればよい. (一意ではない.) しかしそれは明らか. $\blacksquare$

§.3 では, anti-self-duality が, π で引き上げられた場合には複素構造の積分可能条件であることを証明した. 2°は

$S^4 \xrightarrow[\text{複素化}]{} G$ の図式で anti-self-duality をとらえると、どうなるであろうか？

B
 $\downarrow SL(n, \mathbb{C})$
 G E , complex Lie group $SL(n, \mathbb{C})$ を fiber にとり holomorphic principal bundle over G とする.

B には holomorphic connection form ω と, holomorphic curvature form Ω とが与えられる, とする.
 $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ であり, G 上の 2-form と見たとき Ω は type $(2, 0)$ である.

S^4 は G の holomorphic submanifold ではないか？
 $\pi^*(B|_{S^4})$ は $\mathbb{P}^3$ 上の holomorphic bundle かどうかは判じたい
 $\downarrow$ 11. 併し, 次の定理が成立する.
 $\mathbb{P}^3 \xrightarrow{\pi} S^4 \hookrightarrow G$

定理 3.

Ω の S^4 への制限 $\Omega|_{S^4}$ は, real analytic bundle $B|_{S^4} \rightarrow S^4$ の real analytic curvature であるが, S^4 上の 2-form として $\Omega|_{S^4}$ が anti-self-dual ならば (i.e. $*\Omega|_{S^4} = -\Omega|_{S^4}$ ならば), $\pi^*(B|_{S^4}) \rightarrow \mathbb{P}^3$ は $\mathbb{P}^3$ 上の holomorphic bundle になる.

証明

(16) で定義した z_μ に対し $\operatorname{Re} z_\mu = x_\mu$ ($\mu=0, \dots, 3$) とおく.

(x_0, x_1, x_2, x_3) は $\mathbb{R}^4 \hookrightarrow S^4$ の局所座標で, この順に正の向きとなるような orientation が与えられている.

$\mathbb{R}^4$ 上の 2-form の base に対し, $*$ は次のようになる:

$$(18) \quad \begin{cases} * dx_0 \wedge dx_1 = dx_2 \wedge dx_3 \\ * dx_0 \wedge dx_2 = -dx_1 \wedge dx_3 \\ * dx_0 \wedge dx_3 = dx_1 \wedge dx_2 \\ * dx_1 \wedge dx_2 = dx_0 \wedge dx_3 \\ * dx_1 \wedge dx_3 = -dx_0 \wedge dx_2 \\ * dx_2 \wedge dx_3 = dx_0 \wedge dx_1 \end{cases}$$

実理 3 の証明は, いくつかの step を へて完成する.

1°.

$\mathbb{P}^3 \ni z = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ に対し

$$G_3 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (b_{01} : b_{02} : \dots : b_{23}) \in \mathbb{P}^5 \mid \begin{array}{l} z_i b_{jR} + z_j b_{Ri} + z_R b_{ij} = 0 \\ \text{for } 0 \leq i < j < R \leq 3 \end{array} \right\}$$

とおく. G_3 は $\mathbb{P}^5$ の中の linear な 2次元 subspace である

から, $G_3 \cong \mathbb{P}^2$ である.

G_3 の定義方程式から計算して, $G_3 \hookrightarrow G$ (部分複素多様体) であることを知り, このとき,

Lemma 1.

$$\text{Plü}(\{ \mathbb{P}^3 \text{ の projective line } \gamma \text{ を通るもの全体} \}) \\ = G_3.$$

証明. G_3 の定義方程式は, 上の条件を書き表わしたものであるから, 明らか. $\triangle$

次の命題が, anti-self-duality の幾何学的意味を明らかにする重要な命題である.

命題 3.

$$\text{すなわち } \gamma \in \mathbb{P}^3 \text{ に対し } \Omega|_{G_3} \equiv 0 \\ \Leftrightarrow \Omega|_{S^4} \text{ が anti-self-dual.}$$

証明. $G \cap \{ \rho_{01} \neq 0 \}$ 上で証明する. また, γ も $\gamma_0 \neq 0$ であるような点とする. (計算を易しくするためにこの仮定する. 一般の場合は, 座標をとりかえてやればよい.)

$\rho_{01} = 1, \gamma_0 = 1$ とし, 残りの変数を座標と見なす.

G_3 の定義方程式は

$$(19) \quad \begin{cases} \rho_{12} = \gamma_1 \rho_{02} - \gamma_2 \\ \rho_{13} = \gamma_1 \rho_{03} - \gamma_3 \\ \rho_{23} = \gamma_2 \rho_{03} - \gamma_3 \rho_{02} \end{cases}$$

G 上の $(2,0)$ -form の base は,

$$(20) \quad \begin{cases} dz_0 \wedge dz_1 = \frac{i}{2} d\theta_{03} \wedge d\theta_{12} \\ dz_2 \wedge dz_3 = -\frac{i}{2} d\theta_{02} \wedge d\theta_{13} \\ dz_0 \wedge dz_2 = \frac{1}{4} (d\theta_{02} \wedge d\theta_{03} - d\theta_{02} \wedge d\theta_{12} - d\theta_{03} \wedge d\theta_{13} + d\theta_{12} \wedge d\theta_{13}) \\ dz_1 \wedge dz_3 = -\frac{1}{4} (d\theta_{02} \wedge d\theta_{03} + d\theta_{02} \wedge d\theta_{12} + d\theta_{03} \wedge d\theta_{13} + d\theta_{12} \wedge d\theta_{13}) \\ dz_0 \wedge dz_3 = \frac{i}{4} (d\theta_{02} \wedge d\theta_{03} - d\theta_{02} \wedge d\theta_{12} + d\theta_{03} \wedge d\theta_{13} - d\theta_{12} \wedge d\theta_{13}) \\ dz_1 \wedge dz_2 = \frac{i}{4} (d\theta_{02} \wedge d\theta_{03} + d\theta_{02} \wedge d\theta_{12} - d\theta_{03} \wedge d\theta_{13} - d\theta_{12} \wedge d\theta_{13}) \end{cases}$$

たから, G_3 上の $(2,0)$ -form の制限は, (20) に (19) を代入して計算すれば得られる:

$$(21) \quad \begin{cases} dz_0 \wedge dz_1|_{G_3} = -\frac{i}{2} \Im_1 d\theta_{02} \wedge d\theta_{03} \\ dz_2 \wedge dz_3|_{G_3} = -\frac{i}{2} \Im_1 d\theta_{02} \wedge d\theta_{03} \\ dz_0 \wedge dz_2|_{G_3} = \frac{1}{4} (1 + \Im_1^2) d\theta_{02} \wedge d\theta_{03} \\ dz_1 \wedge dz_3|_{G_3} = -\frac{1}{4} (1 + \Im_1^2) d\theta_{02} \wedge d\theta_{03} \\ dz_0 \wedge dz_3|_{G_3} = \frac{i}{4} (1 - \Im_1^2) d\theta_{02} \wedge d\theta_{03} \\ dz_1 \wedge dz_2|_{G_3} = \frac{i}{4} (1 - \Im_1^2) d\theta_{02} \wedge d\theta_{03} \end{cases}$$

そこで, G 上の $(2,0)$ -form $f = \sum_{\mu, \nu} f_{\mu\nu} dz_\mu \wedge dz_\nu$ (係数はどこにあってもよい) の G_3 への制限を計算すると, (21)

から,

$$f|_{G_3} = \frac{d\theta_{02} \wedge d\theta_{03}}{\left\{ -\frac{i}{2} \Im_1 (f_{01} + f_{23}) + \frac{i}{4} (1 - \Im_1^2) (f_{03} + f_{12}) + \frac{1}{4} (1 + \Im_1^2) (f_{02} - f_{13}) \right\}}$$

$$= \left[\frac{1}{4} \{ (f_{02} - f_{13}) - i(f_{03} + f_{12}) \} \bar{z}_1^2 - \frac{i}{2} (f_{01} + f_{23}) \bar{z}_1 + \frac{1}{4} \{ (f_{02} - f_{13}) + i(f_{03} + f_{12}) \} \right]$$

$$d\bar{z}_{02} \wedge d\bar{z}_{03}$$

とある。従って、

$$f|_{G_3} = 0 \quad \text{for } \forall z \in \mathbb{P}^3$$

$$\Leftrightarrow \text{上式が } \bar{z}_1 \text{ の 2 次式と見て恒等的に } 0$$

$$\Leftrightarrow f_{02} - f_{13} = 0, \quad f_{01} + f_{23} = 0, \quad f_{03} + f_{12} = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f = & f_{01} (dz_0 \wedge dz_1 - dz_2 \wedge dz_3) \\ & + f_{02} (dz_0 \wedge dz_2 + dz_1 \wedge dz_3) \\ & + f_{03} (dz_0 \wedge dz_3 - dz_1 \wedge dz_2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow *f|_{S^4} = -f|_{S^4}$$

$f \in \mathcal{C}^2 \Omega$ にとれば、命題 3 の証明が終る。 $\blacksquare$

Lemma 2.

$B|_{G_3}$ は trivial bundle (for $\forall z \in \mathbb{P}^3$).

$\downarrow$ if $\Omega|_{S^4}$ が anti-self-dual.
 $G_3 \hookrightarrow G$

証明. G_3 上の curvature form $\Omega|_{G_3}$ は恒等的に 0 であり、かつ $G_3 \cong \mathbb{P}^2$ は simply connected である。 $\square$

2°.

$$\omega_3: \mathbb{P}^3 - \{3\} \longrightarrow G_3 \hookrightarrow G \quad \text{な } \exists \text{ map } \varepsilon,$$

$(\mathbb{P}^3 - \{3\}) \ni \eta \xrightarrow{\omega_3} \text{Plü}(\{3\}\eta) \in G_3$ によ, 2 定める.

$\mathbb{P}^3$ を 3 について blowing-up

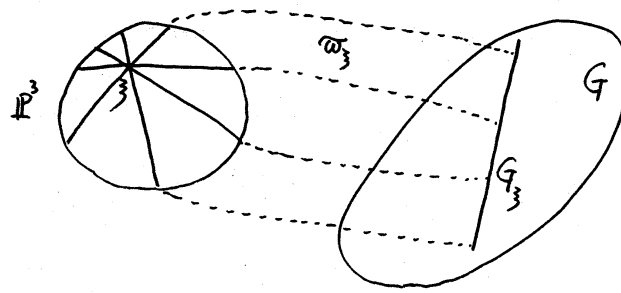
したものを $Q_3\mathbb{P}^3$ と

表わせば, ω_3 は

$$Q_3\mathbb{P}^3 \xrightarrow{\omega_3} G_3 \text{ なる}$$

holomorphic map に拡張できる. このとき,

$\omega_3^*(B|_{G_3}) \longrightarrow Q_3\mathbb{P}^3$ は $Q_3\mathbb{P}^3$ 上の holomorphic bundle.



Lemma 3.

$$\begin{array}{ccc} & \omega_3^*(B|_{G_3}) & \pi^*(B|_{S^4}) \\ & \swarrow & \searrow \\ B|_{G_3} & & B|_{S^4} \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ G_3 & \xleftarrow{\omega_3} Q_3\mathbb{P}^3 & \mathbb{P}^3 \\ & \swarrow & \searrow \\ & G_3 & S^4 \end{array}$$

$$\omega_3^*(B|_{G_3})|_{\mathbb{P}^3 - \{3\}} = \pi^*(B|_{S^4})|_{\mathbb{P}^3 - \{3\}} \quad (\text{canonical に同型})$$

証明. $\mathbb{P}^3 - \{3\} \ni \eta$ に対し, 各々の bundle の fiber の間には, canonical な同型対応があることを見ればよい.

Bundle の fiber を, B, x のように表わす. (B の x での fiber.)

$$\text{Plü}(\{3\}\eta) = a \in G_\eta, \quad \text{Plü}(\eta \cap \sigma(\eta)) = b \in G_\eta \text{ とかく.}$$

$$G_3 \cap G_\eta = \{a\}, \quad S^4 \cap G_\eta = \{b\} \text{ である. } 3 \text{ は } \eta \text{ の}$$

$$\text{定義から, } \begin{cases} \omega_3^*(B|_{G_3})_\eta = B, a \\ \pi^*(B|_{S^4})_\eta = B, b \end{cases} \text{ である.}$$

と 3 で $B|_{G_\eta}$ は trivial bundle であるから, connection $\omega|_{G_\eta}$ によ, 2 canonical な同型 $B_{,a} \cong B_{,b}$ が得られる.

($a, b \in G_\eta$) 従, 2

$$\omega_3^*(B|_{G_3})_{, \eta} \cong \pi^*(B|_{S^4})_{, \eta}.$$

ω も B も ω も π も G 上 定義された

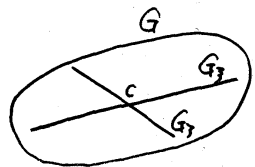
ものだから, 上の fiber の同型は η に holomorphic に depend する. 以上で Lemma 3 が判った. $\triangle$

3°.

$\omega_3^*(B|_{G_3})|_{\mathbb{P}^3 - \{3\}}$ は holomorphic bundle だから, $\pi^*(B|_{S^4})$ も $\mathbb{P}^3 - \{3\}$ 上 では holomorphic であることが判った. あと, これを $\mathbb{P}^3$ にまで拡張出来ることを見ればよい.

Lemma 4 $\forall 3, 3 \in \mathbb{P}^3$ に対し ($3 \neq 3$)

$B|_{G_3 \cup G_3}$ は $G_3 \cup G_3$ 上 trivial.



証明. $\text{Plücker } \langle 33 \rangle = c$ とおく. $G_3 \cap G_3 = \{c\}$.

$B|_{G_3}$ は trivial だから section $\lambda_1 \in \Gamma(G_3, B|_{G_3})$ が存在し, $B|_{G_3}$ も trivial だから section $\lambda_2 \in \Gamma(G_3, B|_{G_3})$ が存在する. $\lambda_1(c)$ も $\lambda_2(c)$ も $SL(n, \mathbb{C})$ の元であることに注意する. 定数

函数 $\Delta_1(c)^{-1} \cdot \Delta_2(c)$ は G 上の holomorphic function 中へ,

$$\begin{cases} \Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_1(c)^{-1} \cdot \Delta_2(c) & \text{on } G_3 \\ \Delta = \Delta_2 & \text{on } G_3 \end{cases}$$

で定義される Δ は $G_3 \cup G_3$ 上の holomorphic section である.

$\therefore B|_{G_3 \cup G_3}$ は trivial. $\triangle$

Note. 以下の判子通り Lemma 4 のはたす役割は大まかい. そ

してこの Lemma が成立したのは $G_3 \cap G_3 = \{1\}$ だったから

である. $G_3 \cap G_3$ が広がりを持つ. ということは, その上の hol.

function $\Delta_1(c)^{-1} \cdot \Delta_2(c)$ が $G_3 \cup G_3$ にまで接続できるかどうか判

らないから.

Lemma 5. $\mathbb{P}^3$ の相異なる 2 点 $3, 3$ に対し,

$$\omega_3^*(B|_{G_3})|_{\mathbb{P}^3 - \{3, 3\}} = \omega_3^*(B|_{G_3})|_{\mathbb{P}^3 - \{3, 3\}}$$

(canonical に同型.)

証明. $\mathbb{P}^3 - \{3, 3\} \ni \eta$ をとる.

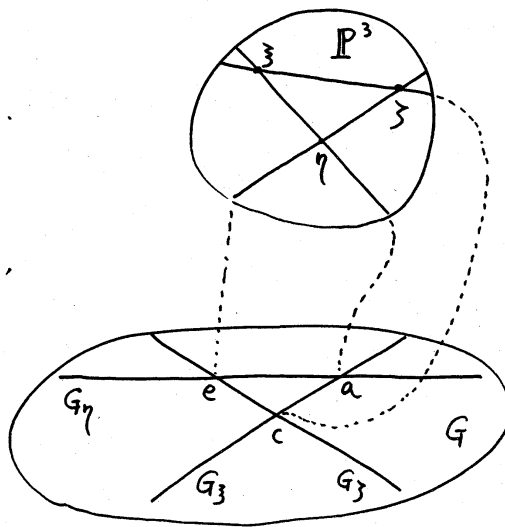
$$\text{Plü}(\{3, \eta\}) = a,$$

$$\text{Plü}(\{3, 3\}) = c, \quad \text{Plü}(\{3, \eta\}) = e,$$

$$\text{とおく. } G_\eta \cap G_3 = \{e\},$$

$$G_3 \cap G_3 = \{c\},$$

$$G_3 \cap G_\eta = \{a\}, \quad \text{である.}$$



$$\begin{cases} \omega_3^*(B|G_3), \eta = B, a \\ \omega_3^*(B|G_3), \eta = B, e \end{cases} \quad z = z^-, a, e \in G_3 \cup G_3 \text{ 中}$$

Lemma 4 から canonical な同型 $B, a \cong B, e$ が存在する。
 とが判る。 $\therefore \omega_3^*(B|G_3), \eta \cong \omega_3^*(B|G_3), \eta$ $\triangle$
 (ともに B, c に等しい.)

$z, z \in \mathbb{P}^3, \quad z \neq z \text{ とする。}$

$$\pi^*(B|S^4)|_{\mathbb{P}^3 - \{z\}} = \omega_3^*(B|G_3)|_{\mathbb{P}^3 - \{z\}}$$

$$\pi^*(B|S^4)|_{\mathbb{P}^3 - \{z\}} = \omega_3^*(B|G_3)|_{\mathbb{P}^3 - \{z\}}$$

$$\omega_3^*(B|G_3)|_{\mathbb{P}^3 - \{z, z\}} = \omega_3^*(B|G_3)|_{\mathbb{P}^3 - \{z, z\}}$$

によ, $z, \pi^*(B|S^4)$ が $\mathbb{P}^3$ 上の holomorphic bundle である
 ことが判, た。以上で定理 3 の証明が終る。 $\square$

与えられたのは S^4 上の real analytic bundle P (fiber
 は $SU(n)$) と, P 上の real analytic connection B , curvature
 F であ, た。

$S^4 \hookrightarrow G$ だから, P, B, F は S^4 の複素近傍 $U \subset G$ にま
 で拡張出来る。解析接続した P, B, F を P^c, B^c, F^c と書く。

P^c, B^c, F^c U を十分小にとり, 各 G_3 との交わ
 $\downarrow$ り $U \cap G_3$ が simply connected である
 $S^4 \hookrightarrow U \hookrightarrow G$ ようにしておく。 ($S^4 \cap G_3 = \{1\}$)

中之一つでも可能.)

定理 2 (Atiyah の定理) は, 「 $*F = -F$ ならば $\pi^*(P^C|_{S^4})$ は $\mathbb{P}^3$ 上の holomorphic bundle」 という形で述べられていることが出来る. これを定理 3 で用いた手法で証明してみよう.

命題 3 は base を $\mathbb{C}$ とし, $\mathbb{C}$ で証明したから, 今の場合でも,

「 $F^C|_{S^4} = F$ が anti-self-dual $\Rightarrow F^C|_{G_3 \cap U} \equiv 0$ for $\forall \zeta$ 」
 という形で成立する. $G_3 \cap U$ は simply connected にとったから, 「 $P^C|_{G_3 \cap U} \rightarrow G_3 \cap U$ なる bundle は trivial」 といふ Lemma 2 も成り立つ.

$\omega_\zeta : Q_\zeta \mathbb{P}^3 \rightarrow G_3$ による $G_3 \cap U$ の逆像は,
 ($G_3 \cap U$ が G_3 の open subset であるから) $Q_\zeta \mathbb{P}^3$ の open set になる. 従って, $\omega_\zeta^{-1}(G_3 \cap U) \subset \mathbb{P}^3 - \{\zeta\}$ は open.

定理 3 の証明のときには Lemma 3 と Lemma 5 を用いて 2 点 $\zeta, \zeta' \in \mathbb{P}^3$ をとり, $\mathbb{P}^3$ を示したのだ. それは,

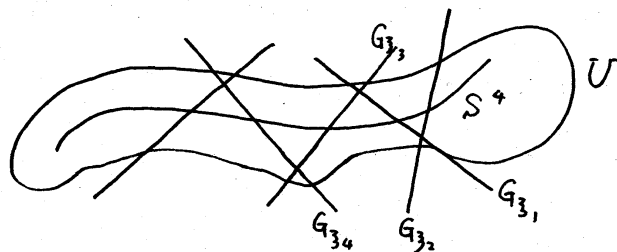
$$\mathbb{P}^3 = (\mathbb{P}^3 - \{\zeta\}) \cup (\mathbb{P}^3 - \{\zeta'\})$$

ということにあたる. 今度の場合は

$$\mathbb{P}^3 = \bigcup_{\zeta \in \mathbb{P}^3} \omega_\zeta^{-1}(G_3 \cap U)$$

なる covering を使わねばならない. また, Lemma 3 では, a, b をつなぐ G_η が, U の中で a, b をつなぐかわねばならないが, $\omega_\zeta^*(P^C|_{G_3})$ と $\pi^*(P^C|_{S^4})$ とが等しくなる $\mathbb{P}^3$ の領域は極めて複雑になる. しかし, ω_ζ にかく open set であり, ζ を動かせば $\mathbb{P}^3$ を cover する: これは確かであるから, Lemma 4 + Lemma 5 によつて $\mathbb{P}^3$ 上

global に矛盾なくつなぐことが出来る。これで、 $\pi^*(P^c|_{S^4})$



$= \pi^*(P)^c$ の analyticity
が結論された。

Anti-self-dual という条件が、どのようにして complex structure と結びついたのか、という点のくりか、§4 で明らかになった。

§5. $D*DB = 0$ と $*DB = \pm DB$ のうちかい。

$D*DB = 0$ の解で、 $*DB = \pm DB$ となるもの (BP 5 $\|F\|^2$ の最小値以外の critical point) が存在するか? という問題はまた解かれていない (Atiyah [6])。ここでは、Linear な場合について考察する。

群が $U(1)$ の場合: B のかわりに A と書く。 $DA = dA$ 。

命題 4. (Atiyah [7])

$$d*dA = 0 \iff *dA = \pm dA$$

証明 (Atiyah [7])

$\Leftarrow$ は明らか。

$\Rightarrow$: δ を余微分作用素とする

$$\left[\begin{array}{l} \delta = (-1)^{np+n+1} * d * \\ = - * d * \\ (\because n=4) \end{array} \right]$$

$d * d A = 0$ のとき,

$$\Delta (*dA \pm dA) = (d\delta + \delta d) (*dA \pm dA)$$

$$= d\delta *dA \pm d\delta dA$$

$$= -d * d * *dA \pm (-d * d * dA)$$

$$= -d * d dA$$

$$= 0$$

$\therefore *dA \pm dA$ は harmonic 2-form. 従って, S^4 は compact であるから, Hodge の定理により

$$i(*dA \pm dA) \in H^2(S^4)$$

判る. $H^2(S^4) = 0$ であるので $*dA = \pm dA$ を得る. $\blacksquare$

Note. A は純虚数に値を持つので, $i(*dA \pm dA)$ とした.

Yang-Mills 場とは全くちがうが, 2次元で次のようなものを考えてみる.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{ある実函数.}$$

$$\mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}^2} d\phi \wedge *d\phi.$$

$$\left(\text{物理学者の記号では } \mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left(\frac{\partial \phi_a}{\partial x_i} \right)^2, \quad \begin{array}{l} a=1,2 \\ i=1,2 \end{array} \right)$$

但し x_1, x_2 は $\mathbb{R}^2$ の座標.)

このとき Euler-Lagrange 方程式は $d * d\phi = 0$.

Self-duality として $*d\phi = \pm d\phi$ をとると, これは $\phi = 0$

しか解を持たないの2面はくはない。そこで、

$$(22) *d\phi = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\phi$$

は (anti-) self-duality としとる。

「 $d*d\phi = 0 \Leftrightarrow *d\phi = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\phi$ 」は成立するだろうか？
もちろん $\Leftarrow$ は成り立つから $\Rightarrow$ を調べる。

その為に座標で書いてみる。

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2, \quad *dx_1 = dx_2, \quad *dx_2 = -dx_1$$

$$\text{よって } *d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_1$$

$$\therefore d*d\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} dx_1 \wedge dx_2 = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) dx_1 \wedge dx_2$$

従って、 $d*d\phi = 0 \Leftrightarrow \phi_1, \phi_2$ は $\mathbb{R}^2$ 上の調和函数。

$$\text{よって } *d\phi = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\phi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = \pm \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = \mp \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} = \pm \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}, & -\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = \mp \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \end{cases}$$

これは Cauchy-Riemann の方程式である。 ϕ_1, ϕ_2 が共役な $\phi_1 + i\phi_2$ は正則函数だから、 $\Rightarrow$ が言える。併し ϕ が

$d \ast d\phi = 0$ を満たすだけなら必ずしも $\Rightarrow$ は成立しない.

Bibliography and References

- [1] C.N. Yang and R. L. Mills ; Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance , Physical Review 96, 191 - 195 (1954).
- [2] E. S. Abers and B. W. Lee ; Gauge Theories , Physics Reports 9 C , 1 - 141 (1973).
- [3] G. Girardi , C. Meyers and M. de Roo ; On the self - Duality of Solutions of the Yang - Mills equations , Ref. Th. 2399 - CERN (Preprint) , Geneva , (1977).
- [4] M. F. Atiyah and R. S. Ward ; Instantons and Algebraic Geometry , Commun. math. Physics. 55 , 117 - 124 (1977)
- [5] M. F. Atiyah ; Classical Solutions of Yang - Mills Equations, 京都大学数理解析研究所での講演. (1977年10月3日)
- [6] M. F. Atiyah ; Morse Theory and Stable Bundles over Curves , 京都大学数理解析研究所での講演. (1977年10月4日)
- [7] M. F. Atiyah ; Classical Geometry of Yang - Mills Fields , 東京大学理学部数学教室での講演. (1977年10月7日)
- [8] H. Flanders ; Differential Forms , Academic Press (1963).

[9] 吉川圭二 ; 場の理論におけるトンネル効果 , 素粒子論研究 54-4 , 49-56 (1977)

[10] 小嶋泉 ; Yang-Mills 場と Fibre Bundles , 素粒子論研究 , 53-4 , 299 - 334 (1976)