

# Kostka Polynomials and Crystals

九大数理 山田 泰彦 (Yasuhiko Yamada)

## 1. Introduction

A.N. Killirov は、フラインリ-環  $\widehat{sl}_N$  の部分環  $sl_N$  に対する branching coefficient を Kostka polynomial のある極限で表わす公式を予想した。[Ki]

branching coefficient for  $\widehat{sl}_N/sl_N$   $\longleftrightarrow$  Kostka polynomial

$\uparrow$  |  
 $\downarrow$  |

1 dim. configuration sum  $\longleftrightarrow$  ?  $\longleftrightarrow$  Lascoux-Schützenberger 公式

一方、可解格子模型の研究において、1次元配置和というものが計算され、 $\widehat{sl}_N$  の character (or branching coef.) を与えることが知られている。[DJKMO] [KNM].

本論の目標は、この1次元配置和と Kostka polynomial の Lascoux-Schützenberger による組み合わせ論的公式を結びつけることにより、Killirov の予想を証明することである。

本講義は中屋敷厚氏との共同研究による。[NY]

## 2. Kostka Polynomials

Kostka Polynomial  $K_{\lambda, \mu}(q)$  は、一変数  $q$  に関する多項式で、2つの分割  $\lambda, \mu$  によって指定される。その1つの定義は、次の公式によって与えられる。[M]

$$A_{\lambda}(x) = \sum_{\mu} K_{\lambda, \mu}(q) P_{\mu}(q, x).$$

ここに  $A_{\lambda}(x)$  は Schur 関数、 $P_{\mu}(q, x)$  は Hall-Littlewood 関数で、具体的な表示は次で与えられる。

$$P_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{v_{\lambda}} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w \left( x^{\lambda} \prod_{i < j} \frac{x_i - qx_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$v_{\lambda} = \prod_i m_i! \quad (\text{組}. \lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)), \quad x^{\lambda} = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots$$

$P_{\lambda}(q=1) = m_{\lambda}$  (monomial 対称関数),  $P_{\lambda}(q=0) = A_{\lambda}$  (Schur), とおいている。いくつか例を示しておく。

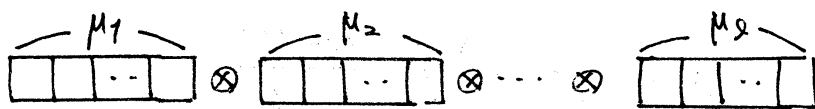
$$\begin{cases} P_{(1)} = m_{(1)} \\ P_{(2)} = m_{(2)} + (1-q)m_{(1,1)} \\ P_{(1,1)} = m_{(1,1)} \end{cases} \quad \begin{cases} P_{(3)} = m_{(3)} + (1-q)m_{(2,1)} + (1-q)^2 m_{(1,1,1)} \\ P_{(2,1)} = m_{(2,1)} + (1-q)(2+q)m_{(1,1,1)} \\ P_{(1,1,1)} = m_{(1,1,1)} \end{cases}$$

また Kostka polynomial の例は,

| $\lambda \backslash \mu$ | 3 | 2,1 | 1 <sup>3</sup> |
|--------------------------|---|-----|----------------|
| 3                        | 1 | $q$ | $q^3$          |
| 2,1                      |   | 1   | $q+q^2$        |
| 1 <sup>3</sup>           |   |     | 1              |

| $\lambda \backslash \mu$ | 4 | 3,1 | 2 <sup>2</sup> | 2,1 <sup>2</sup> | 1 <sup>4</sup> |
|--------------------------|---|-----|----------------|------------------|----------------|
| 4                        | 1 | $q$ | $q^2$          | $q^3$            | $q^6$          |
| 3,1                      |   | 1   | $q$            | $q+q^2$          | $q^3+q^4+q^5$  |
| 2 <sup>2</sup>           |   |     | 1              | $q$              | $q^2+q^4$      |
| 2,1 <sup>2</sup>         |   |     |                | 1                | $q+q^2+q^3$    |
| 1 <sup>4</sup>           |   |     |                |                  | 1              |

$q=1$  のとき,  $K_{\lambda\mu} = K_{\lambda\mu}(1)$  は Kostka number とよばれる数で、これは i) 最高 weight  $\lambda$  の  $sl_n$  表現の weight  $\mu$  の多重度  
 又は ii) 完全対称表現たちのテンソル積



の分解に現れるキヤク成分  $\lambda$  の多重度と見るこゝができる。

定義からは全く明らかではないが、 $K_{\lambda\mu}(q)$  の係数はすべて非負整数である。この事実は、Lascoux-Schützenberger により証明された。より詳しく、次のことが成り立つ。

**定理** (Lascoux-Schützenberger, Butler) [LS][B]

$$K_{\lambda\mu}(q) = \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda,\mu)} q^{c(T)}$$

ここに、 $T \in \mathcal{T}(\lambda, \mu)$  は shape  $\lambda$ , weight  $\mu$  の semi standard tableaux,  $c(T) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  はその charge であり、次のように計算される。

例.  $\lambda = (3, 1)$ ,  $\mu = (2, 1^2)$  のとき、 $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$  は 2つの要素からなる

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

各々の charge は  $c(T_1) = 2$ ,  $c(T_2) = 1$  である。例えば  $T_1$  については、次の図のように各数字 1, 2, 3... の index を計算し、 $c(T_1) = \text{ind}(1) + \text{ind}(2) + \text{ind}(3) = 0 + 1 + 1 = 2$ 。

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1_0 & 2_1 \\ \hline 3_1 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1_0 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

rule。右→左, 上→下の順に列 1, 2, 3... をひきあつめ、各々に index を与える。index は 0 から始めて右上にもどるたびに 1 を加える。  
 ・上の手順を可能な限りくりかえす。

我々の主結果は、ここに現わした index に対して、crystal base の理論における energy 関数を用いた新しい公式を与える。

### 3. Crystals and energy functions

ここでは、crystal baseの理論のうち、我々の必要とする部分について、主に例で説明する。(一般論は[K].[KN]などを参照のこと。)

$sl_2$ のキヤク表現  $\square, \square\square, \square\square\square, \dots$  などについて、その crystal graph なるものが次のように与えられる。

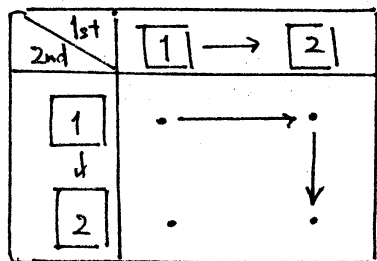
$$\square: \quad \boxed{1} \rightarrow \boxed{2}$$

$$\square\square: \quad \boxed{11} \rightarrow \boxed{12} \rightarrow \boxed{22}$$

$$\square\square\square: \quad \boxed{111} \rightarrow \boxed{112} \rightarrow \boxed{122} \rightarrow \boxed{221}$$

これらの graph は各表現の weight 空間の構造と、generator  $f$  の作用を表わすものと見なせる。重要なことは tensor 積にも canonical に crystal graph の構造が入れられることであり、例で示せば

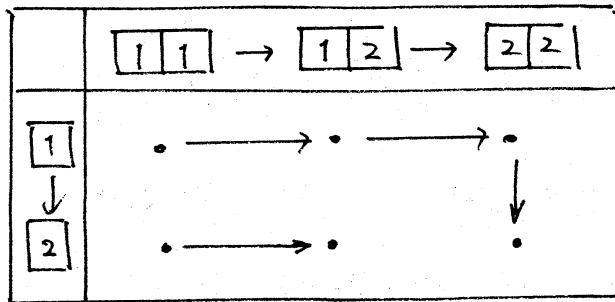
$$\square \otimes \square = \square\square \oplus \square (= \phi)$$



$$\underbrace{\boxed{1} \otimes \boxed{1} \rightarrow \boxed{2} \otimes \boxed{1} \rightarrow \boxed{2} \otimes \boxed{2}}_{\square\square}$$

$$\underbrace{\boxed{1} \otimes \boxed{2}}_{\square} = \phi$$

$$\square\square \otimes \square = \square\square\square \oplus \square\square (= \square)$$



$$\underbrace{\square\square \otimes \square \rightarrow \dots}_{\square\square\square}$$

$$\underbrace{\square\square \otimes \square \rightarrow \dots}_{\square\square (= \square)}$$

同じとなっている。

同様に、分解

$$\square\square \otimes \square \otimes \square = \square\square\square \oplus 2\square\square\square \oplus \square\square$$

に対応して、対応する graph は4つの成分からなり、各々の最高 weight 要素は次のようである。

$$\square\square\square \text{ の h.w. } \square\square \otimes \square \otimes \square \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\square\square\square \text{ の h.w. } \square\square \otimes \square \otimes \square \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & & \end{array}$$

$$\square\square \otimes \square \otimes \square \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & & \end{array}$$

$$\square\square \text{ の h.w. } \square\square \otimes \square \otimes \square \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

各々の h.w. 要素には、右端に示したような  $\mathcal{J}(\lambda, (2M))$  の元

が対応する。一般に、次の bijection がある。

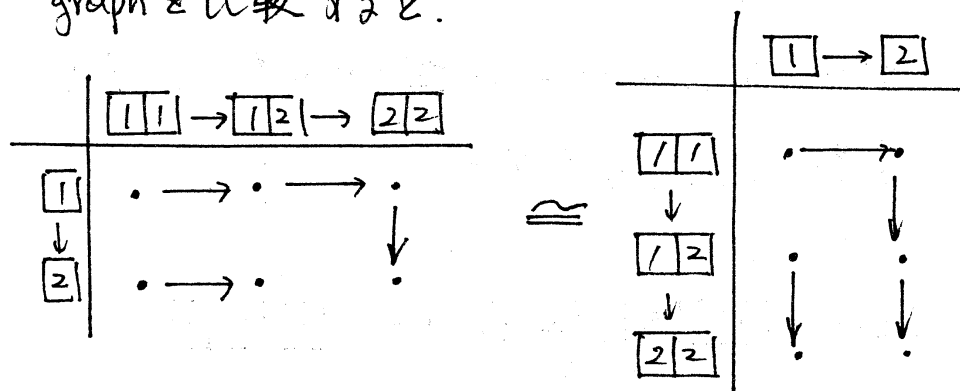
Prop.  $\mathcal{T}(\lambda, \mu) \xleftrightarrow{1 \leftrightarrow 1}$

$$\left\{ \text{h.w.要素 (of weight } \lambda) \text{ in } \overbrace{\square \cdots \square}^{M_1} \otimes \overbrace{\square \cdots \square}^{M_2} \otimes \cdots \otimes \overbrace{\square \cdots \square}^{M_\ell} \right\}$$

我々は Lascoux-Schützenberger の公式  $\alpha$  和をこの対応で、右辺の各 h.w.要素  $\alpha$  和と見なす。この時、重み関数  $c(T)$  や index の crystal 理論での表示を考える。

同型と energy 関数 (the combinatorial R-matrix).

また  $\square \square \square \otimes \square$  と  $\square \otimes \square \square \square$  の graph を比較すると。



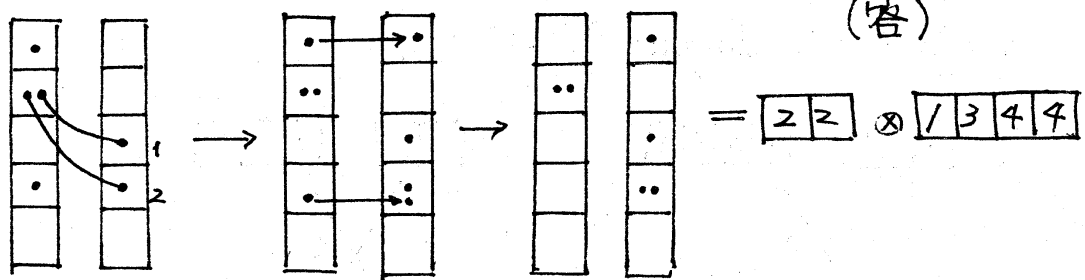
各 graph の対応する頂点を同視して 次の同型が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \square \square \square \otimes \square = \square \otimes \square \square \square \\ \square \square \square \otimes \square = \square \otimes \square \square \square \\ \square \square \square \otimes \square = \square \otimes \square \square \square \\ \square \square \square \otimes \square = \square \otimes \square \square \square \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \square \square \square \otimes \square = \square \otimes \square \square \square \\ \square \square \square \otimes \square = \square \otimes \square \square \square \end{array} \right.$$

一般に、 $sln$  の表現  $\overbrace{\square \cdots \square}^{k_1} \otimes \overbrace{\square \cdots \square}^{k_2}$  ( $k_1 \geq k_2$ ) と、  
 これを入れかえたものとの同型を次の rule で与えることが  
 できる。

例.  $sln$ .  $k_1=4$ ,  $k_2=2$ . で  $\boxed{1\ 2\ 2\ 4} \otimes \boxed{3\ 4}$  の行き先？

これを得るには次の図を書く。



rule: 右列一番上の  $\square_1$  に 左列の  $\square$  で 右の  $\square_1$  より上にあるものの  
 うち一番下のもの (のみ) を選んで線をひく。

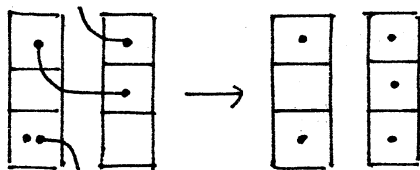
・ 右列二番目の  $\square_2$  に 同様の相方を (残ったものから) 選んで  
 線でひく。以下 同様にくり返す。

・ 左列で 上にある  $\square$  が存在しないときは 一番下まで  
 もどって 相手をさがす。(次の例参照)

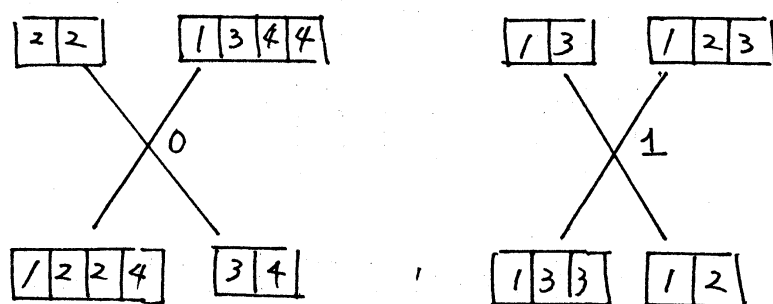
・ 右列の  $\square$  をすべて消が終えたら、左列の残った  $\square$  を  
 右へ移動させる。

例

$$\boxed{1\ 3\ 3} \otimes \boxed{1\ 2} = \boxed{1\ 3} \otimes \boxed{1\ 2\ 3}$$



上記の rule は、energy 関数も与えてくれる。energy 関数は、上記の同型を 3D クリスタルの同型に拡張したときの 0-th arrow との共立性によって定義される ([KNM], [NY]) が今の場合は、単に、“ぐるりと下から回って来る line の数”に他ならない事を示すことができる。以上の同型と energy 関数の data を次の diagram で表わそう。



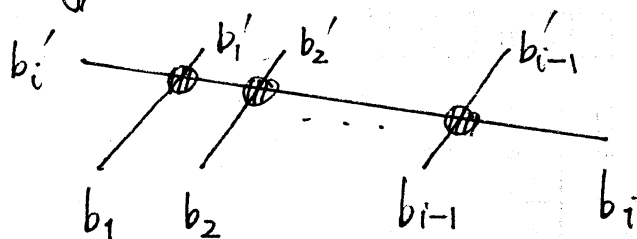
#### 4. Main Theorem

$T \in \mathcal{T}(\lambda, \mu)$  に対して、 $b_1 \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_\ell$  を tensor 積

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mu_1 & & \\ \hline \hline \end{array} \otimes \dots \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mu_2 & & \\ \hline \hline \end{array}$  における対応する highest weight 要素とする。

#### 定理 [NY]

$T$  における  $i$ -th letter の index  $\text{ind}(i)$  は次の diagram の energy 関数の和で与えられる。

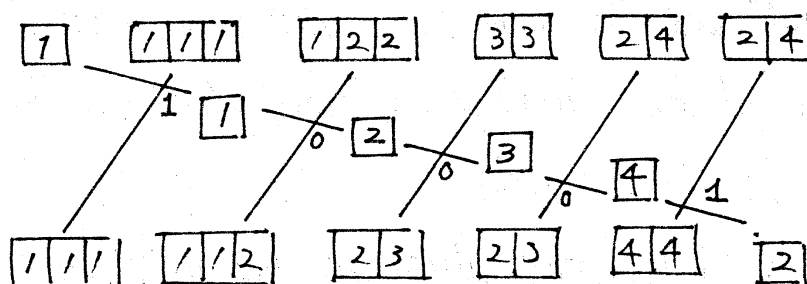


例.  $T =$

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 6 |   |
| 3 | 4 |   |   |   |
| 5 | 5 |   |   |   |

$$\leftrightarrow [1][1][1] \otimes [1][1][2] \otimes [2][3] \otimes [2][3] \otimes [4][4] \otimes [2]$$

この6番目の成分  $[2]$  の index  $\text{ind}(6)=2$  は次の図で求めらる



この定理と、[DJKMO]等の結果を組み合わせると、目標とした Killirova予想が従う。詳細は[NY]を見て下さい。

### Reference

[B] Butler, L.M. Subgroup lattices and symmetric functions, Memoir of the AMS Vol. 112 No.539 (1994)

[DJKMO] Date, E., Jimbo, M., Kunikida, A., Miwa, T. and Okado, M. One dimensional configuration sums in vertex models and affine Lie algebra characters, LMP 12, 69-77 (1989)

- [K] Kashiwara, M. On crystal bases of the  $q$ -analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.* 63 No.2 465-516 (1991)
- [KNM] Kang, S.-J., Kashiwara, M., Misra, K., Miwa, T., Nakashima, T., Nakayashiki, A. Affine crystals and vertex models, *Int. J. Mod. Phys. A7* Suppl.1A, 449-484 (1992)
- [KN] Kashiwara, M. and Nakashima, T. Crystal graph for representations of the  $q$ -analogue of classical Lie algebras, *J. Alg.* 165, 295-345 (1994)
- [Ki] Kirillov, A.N., Dilogarithm identities, *hep-th/9408113* (1994)
- [M] Macdonald, I. Symmetric functions and Hall polynomials, second edition. Oxford Univ. Press (1995)
- [LS] Lascoux, A. and Schützenberger, M.P., Sur une conjecture de H.O. Foulkes, *C.R. Acad. Sc. Paris* 288A, 323-324 (1978)
- [NY] Nakayashiki, A., Yamada, Y., Kostka polynomials and energy functions in Solvable Lattice models, preprint (1995)