

差分方程式の有理形解について

千葉大理 柳原二郎 (Niro Yanagihara)

§1 . 序論

非線形差分方程式

$$(1.1) \quad \alpha_n w(z+n) + \alpha_{n-1} w(z+n-1) + \cdots + \alpha_1 w(z+1) = R(w(z))$$

を考へる. $\alpha_i \neq 0$. $R(w) = P(w)/Q(w)$ は有理関数で, $\deg[P] = p$, $\deg[Q] = q$ とする. (1.1) で $n=1$ のときは $w(z+1) = R(w(z))$ となる. しかし $n > 1$ ならば (1.1) は iteration の関係も失われるから果してどのような意味があるか, むしろ一般な非線形を扱った方がよいではないか, という意見もある. 筆者もその点, あまり自信はないが, しかし (1.1) は非線形としては最も簡単な形なと思われ, これについて調べておいて一般の非線形への足掛りとするのもさう無意味でもあるまいと思われる. $q_0 = \max(p, q)$.

(I) $q=0$, $p=1$ なら (1.1) は極をもつ有理形解をもち得る. しかし $q=0$, $p \geq 2$ なら (1.1) の解は entire. [9]

(II) $p \geq q+1$ なら (1.1) の解は超越的. [9]

(III) $p \geq q+2$ なら (1.1) の解は位数 ∞ . [9]

(IV) $q_0 = \max(p, q) \geq n+1$ なら (1.1) の解は超越的かつ位数 ∞ . [9]

(V) p, q を $p = q+1$ でかつ $q_0 \leq n$ なように任意に与えると, 位数有限な超越解をもつ (1.1) の形の方程式が存在する. [10]

(VI) p, q を $p \leq q \leq n$ なように任意に与えると, 有理関数解をもつ (1.1) の形の方程式が存在する. [10]

このようなことから, p と q の関係が (1.1) の解の性質に対して大きな意味をもつことがわかる. (V), (VI) で存在を主張している方程式はごく少いだろうと予想される. [10]

Harris-Sibuya [2], [4] は一般の非線形方程式 $\vec{w}(z+1) = \vec{F}(z, \vec{w}(z))$ について, ある角領域で漸近展開 $\vec{w}(z) \sim \sum \vec{a}_m / z^m$ をもつ解の存在を証明している. これを (1.1) に適用すれば解の存在はいえろが, $\vec{a}_m = \vec{0}$ となり定数解の存在を言っていることになる. しかし (I) - (VI) は定数でない解についての命題だから, (1.1) が定数でない解をもつかどうか, が問題となる.

それを考えるために

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} ; (\alpha_n + \dots + \alpha_1)\lambda = R(\lambda)\}$$

とおく. Λ は空かも知れない. たゞ之は $R(w) = (\alpha_n + \dots + \alpha_1)w + 1/Q(w)$ を考えてみよ. しかし $p \geq q+2$ ならたゞしに Λ は空ではない. $\lambda \in \Lambda$ に対し, 特性方程式

$$(1.2) \quad f_\lambda(t) = \alpha_n t^n + \dots + \alpha_1 t - R'(\lambda) = 0$$

を考へ, その根を $\tau_1(\lambda), \dots, \tau_n(\lambda)$ とかきう. このとき

補題 1.1. $p \geq q+2$ とする. あり $\lambda \in \Lambda$ と, あり j ($1 \leq j \leq n$) とがあつて, $\tau_j(\lambda) = 1$ となりかまは $|\tau_j(\lambda)| > 1$ となる.

この補題から, (1.1) の non-trivial な解をもつてとわいてくる. ちなりち, $\tau_j(\lambda) = 1$ な λ と j とがあければ, ある角領域で

$$(1.3) \quad \begin{aligned} w(z) &\sim \lambda + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(z) \left(\frac{\log z}{z} \right)^k \\ p_k(z) &\sim \sum_{j=1}^{\infty} c_{kj} z^{-\frac{j}{m}} \end{aligned}$$

をみたす解が存在する. 二つの m は方程式 (1.1) によつて与まる正整数で, c_{kj} は c_{0m} を定めれば一意的に定まる.

$|\tau_j(\lambda)| > 1$ な λ と j とがあければ, もし $\tau_j(\lambda)^k$ がとくなく $k > 1$ に対しても (1.2) の根となさなりなる, あり半平面で

$$(1.4) \quad w(z) = \lambda + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \tau_j(\lambda)^{kz}$$

と展開される解が存在する. 係数 p_k は p_1 を任意に定めれば

一意に定まる。 $\tau_j(\lambda)^*$ があることに就いて (1.2) の根となる
ときも、(1.4) はもう少し複雑にはなるが、解は存在する。

(1.3) あるいは (1.4) のような展開をもたない解はどうなる
だろうか。これを考えるために

$$H^*(\alpha, \beta, K) = \{z = x + iy \ ; \ \alpha < y < \beta, \quad x \leq K\}$$

とおく。このとき

定理 1.2. $p \geq p+2$ とする。 $w(z)$ は (1.1) の有理形解
とする。定数 L ((1.1) によって定まる) があって、つぎの
ことが成り立つ: α, β を任意に与えたとある K が定まり

$$z \in H^*(\alpha, \beta, K) \quad \text{のとき} \quad |w(z)| \leq L.$$

この定理から容易に、 $\{w(z-\mu); \mu \geq 0\}$ が正超族をなし

$$(1.5) \quad w(z-\mu) \rightarrow \lambda \in \Lambda \quad (\mu \rightarrow \infty)$$

が広義一様に成り立つ、ことが示される。さらに、もし

$$(1.6) \quad |\tau_1(\lambda)| > |\tau_2(\lambda)| > \cdots > |\tau_n(\lambda)| > 0$$

ならば

$$(1.7) \quad [w(z+1-\mu) - \lambda] / [w(z-\mu) - \lambda] \rightarrow \tau_j(\lambda)$$

が、ある j ($1 \leq j \leq n$) について成り立つことが示される。

このことから、解はほぼ (1.3) または (1.4) の形になることが
推測されるであろう。このように、解の形を求めて行くた
めには、(1.5) が成り立つかどうかを知ることが大切である。

しかし補題 1.1 および (1.5) に對し, 条件 $\rho \geq \rho+2$ は落せない. 左と之は

$$(1.8) \quad w(z+2) + w(z+1) = w(z) + \frac{1}{w(z)}$$

を考へれば, $\Lambda = \{1, -1\}$ で, (1.2) は $t^2 + t = 0$ となり根は 0 と -1 とで, 補題 1.1 は成り立たない. また解 $w(z) = (e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}) / (e^{\pi iz} - e^{-\pi iz})$ をもち, 之は (1.5) をみたさない.

そうではあるが, $\rho \leq \rho+1$ でも, $\rho_0 \geq n+1$ なら (1.5) と類似のことはいえるのではないか? ここではとくに $\rho = \rho+1 \geq n+1$ の場合を考へよう. 議論の基礎となるのは, 半帯状領域における Nevanlinna 理論である.

2. 半帯状領域における Nevanlinna 理論

正数 $A > 0$ と, 実数 a, a' ($a < a'$) に對し

$$(2.1) \quad H = H(A, a, a') = \{z = x + iy; -A < y < A, a < x < a'\}$$

とおく. sn は, 基本周期 $4K$, $2iK'$ ($K > 0, K' > 0$) をもつ Jacobi 楕円関数とする. よく知られているように, $sn(iz - ia)$ は, $H(K, a, a+K')$ を上半平面に写像する.

$$(2.2) \quad \begin{aligned} v(z) &= v(z; A, a, a', c) = \\ &= \log \left| \frac{sn(iz - ia) + sn(ic - ia)}{sn(iz - ia) - sn(ic - ia)} \right| \end{aligned}$$

とおく. ここで c は実数で, $a < c < a' = a + K'$ とし,

また $A=K$ とする。 $v(z)$ は $H(A, a, a')$ のグリーン関数で、
 その極は $z=c$ にある。

$f(z)$ は $\overline{H(A, a, \infty)}$ で有理形な関数とする。

$$(2.3) \begin{cases} m(A, a, a', c; \infty, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial H} \frac{\partial v}{\partial n} \log \frac{\sqrt{1+|f(z)|^2}}{\sqrt{1+|f(c)|^2}} dS_z \\ N(A, a, a', c; \infty, f) = \sum v(z_n) \end{cases}$$

とおく。 $\sum$ は、 $f(z)$ の、 $H(A, a, a')$ に含まれた極 $\{z_n\}$ についてとる。 また $f(c) \neq \infty$ としてある。 c が $f(z)$ の k 位の極であれば、 (2.3) の代りに

$$(2.3') \begin{cases} m(A, a, a', c; \infty, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial H} \frac{\partial v}{\partial n} \log \frac{\sqrt{1+|f(z)|^2}}{|c_k|} dS_z, \\ N(A, a, a', c; \infty, f) = \sum v(z_n) + k V_0 \end{cases}$$

とおく。 $\sum$ は $c_k = \lim_{z \rightarrow c} [(z-c)^k f(z)]$, $V_0 = \lim_{z \rightarrow c} [v(z) - \log \frac{1}{|z-c|}]$ とおく。
 和は $f(z)$ の、 $H(A, a, a')$ に含まれた c 以外の極 $\{z_n\}$ についてとる。 さらに

$$(2.4) \quad T(A, a, a', c; f) = \frac{1}{\pi} \iint_H v(z) \left(\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \right)^2 d\sigma_z$$

とおく。 また任意の複素数 b に対し

$$m(A, a, a', c; b, f) = m(A, a, a', c; \infty, \frac{1+\bar{b}f}{f-b}),$$

$$N(A, a, a', c; b, f) = N(A, a, a', c; \infty, \frac{1+\bar{b}f}{f-b})$$

とする。 $v(z)$ と、 $u(z) = \log \sqrt{1+|f(z)|^2}$ は Stokes の

公式を適用すると、半帯状領域下の第一基本定理を得る：

定理 2.1. 任意の h ($|h| \leq \infty$) に対し

$$m(A, a, a', c; h, f) + N(A, a, a', c; h, f) = T(A, a, a', c; f).$$

7.2 の定理がゆれゆれには有用である。

定理 2.2. $R(w) = P(w)/Q(w)$ は次数 g_0 の有理関数とする。

$f(z)$ が $\overline{H(A, a, \infty)}$ で有理形な関数とすると

$$(2.5) \quad T(A, a, a', c; R(f)) = g_0 T(A, a, a', c; f) + O(1).$$

ここで $O(1)$ は、 c を固定したとき、 $f(c)$ によって主まり A, a, a' によらずに有界であることを意味する。

注意. 定理 2.1 により、 $\rho > g$ としておいてよい。

定理 2.2 の証明. Γ は有限個の閉円板の和集合で、 $P(w)$ の零点はすべて含み、 $Q(w)$ の零点を含まないものとする。
すると定数 M_1, M_2 がある。

$$(2.6) \quad \frac{M_1}{|P(w)|} \leq \frac{1}{|R(w)|} \leq \frac{M_2}{|P(w)|} \quad (w \in \Gamma)$$

となる。また Γ の外部では $\frac{1}{R(w)}$ も $\frac{1}{|P(w)|}$ も有界：

$$(2.6') \quad \frac{1}{|R(w)|} \leq L, \quad \frac{1}{|P(w)|} \leq L \quad (w \notin \Gamma)$$

(L はある定数)。

$$E_1 = \{z; z \in \partial H(A, a, a'), f(z) \in \Gamma\},$$

$$E_2 = \{z; z \in \partial H(A, a, a'), f(z) \notin \Gamma\}$$

とする。このとき

$$\left| \int_{E_2} \frac{\partial v}{\partial n} \log \frac{\sqrt{1 + \left| \frac{1}{R(f(z))} \right|^2}}{\sqrt{1 + \left| \frac{1}{R(f(c))} \right|^2}} ds_z \right| \leq 2\pi \max \left(\log \sqrt{1+L^2}, \log \sqrt{1 + \left| \frac{1}{R(f(c))} \right|^2} \right)$$

であるから

$$(2.7) \quad m(A, a, a', c; \infty, \frac{1}{R(f)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{E_1} + \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{E_1} + O(1)$$

で、 $O(1)$ は A, a, a' によらずに抑えられる。同様に

$$\left| \int_{E_2} \frac{\partial v}{\partial n} \log \frac{\sqrt{1 + \left| \frac{1}{P(f(z))} \right|^2}}{\sqrt{1 + \left| \frac{1}{P(f(c))} \right|^2}} ds_z \right| \leq 2\pi \max \left(\log \sqrt{1+L^2}, \log \sqrt{1 + \left| \frac{1}{P(f(c))} \right|^2} \right)$$

であるから

$$(2.7') \quad m(A, a, a', c; \infty, \frac{1}{P(f)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{E_1} + O(1).$$

(2.6), (2.7), (2.7') から

$$m(A, a, a', c; \infty, \frac{1}{R(f)}) = m(A, a, a', c; \infty, \frac{1}{P(f)}) + O(1).$$

$$\text{— } \bar{h}, \text{ 明らかに } N(A, a, a', c; \infty, \frac{1}{R(f)}) = N(A, a, a', c; \infty, \frac{1}{P(f)})$$

であるから,

$$(2.8) \quad T(A, a, a', c; \frac{1}{R(f)}) = T(A, a, a', c; \frac{1}{P(f)}) + O(1) = T(A, a, a', c; P(f)) + O(1).$$

$$P(w) = a_p w^p + \dots \text{ とする. } C^* \text{ は}$$

$$|w| \geq C^* \text{ のとき } 2|a_p w^p| \geq |P(w)| \geq \frac{1}{2}|a_p w^p|$$

が成り立つように定数とする。これを使って

$$E_1^* = \{z; z \in \partial H(A, a, a'), |f(z)| > C^*\},$$

$$E_2^* = \{z; z \in \partial H(A, a, a'), |f(z)| \leq C^*\}$$

とすると、上と同様にして

$$(2.9) \quad \begin{aligned} m(A, a, a', c; \infty, P(f)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{E_1^*} \frac{\partial v}{\partial n} \log \frac{\sqrt{1 + |P(f(z))|^2}}{\sqrt{1 + |P(f(c))|^2}} ds_z + \frac{1}{2\pi} \int_{E_2^*} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{E_1^*} + O(1) = g_0 m(A, a, a', c; \infty, f) + O(1) \end{aligned}$$

($g_0 = p$) とする。また明らかに

$$N(A, a, a', c; \infty, P(f)) = g_0 N(A, a, a', c; \infty, f)$$

よって、結局

$$T(A, a, a', c; R(f)) = g_0 T(A, a, a', c; f) + O(1)$$

で、(2.8), (2.9) の $O(1)$ は A, a, a' によらずに抑えられるから

定理を得る。

Q.E.D.

定理 2.3. $f_1(z), f_2(z)$ が $\overline{H(A, a, \infty)}$ で有理形ならば

$$(2.10) \quad T(A, a, a', c; f_1 + f_2) \leq T(A, a, a', c; f_1) + T(A, a, a', c; f_2) + O(1)$$

$$(2.11) \quad T(A, a, a', c; f_1 f_2) \leq T(A, a, a', c; f_1) + T(A, a, a', c; f_2) + O(1)$$

== 7 $O(1)$ は、 c を固定し n と $f_1(c), f_2(c)$ で置き、

A, a, a' によらない。

定理 2.4. $A \leq A_1, a \geq a_1, a' \leq a'_1$ ならば

$$T(A, a, a', c; f) \leq T(A_1, a_1, a'_1, c; f).$$

3. 補助定理

$w(z)$ は (1.1) の有理形解とする。ただし $p = g+1 \geq n+1$.

定数 K に對し

$$(3.1) \quad L(y_0, K) = \{z = x + iy_0; x \leq K\}$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} \Delta = \{y_0; w(z) \text{ が任意の } K \text{ に対し } L(y_0, K) \text{ 上に極をもつ} \} \\ H^*(\alpha, \beta, K) = \{z = x + iy; \alpha < y < \beta, x \leq K\} \end{cases}$$

補題 3.1. $\gamma_0 \in \Delta$ とある. α, β ($\alpha < \gamma_0 < \beta$) と K とあって $w(z)$ は $H^*(\alpha, \gamma_0, K) \cup H^*(\gamma_0, \beta, K)$ で正則とある.

証明. $w(z)$ の極 $\{z_m\}$, $z_m = x_m + iy_m$, $y_m \rightarrow \gamma_0$, $x_m \rightarrow -\infty$, がある. 各 m に対し 整数 $j_1, \dots, j_{k_m}$ ($1 \leq j_l \leq n$) があり, $-n \leq x_m + j_1 + \dots + j_{k_m} \leq 0$ かつ, $z'_m = z_m + j_1 + \dots + j_{k_m}$ が $w(z)$ の極とある. $z'_m = x'_m + iy_m$ とおくと, 極 $\{z'_m\}$ は $z_0 = x_0 + iy_0$, $-n \leq x_0 \leq 0$, に集積するものとあり, 矛盾. Q.E.D.

補題 3.2. $R(w) = P(w)/Q(w)$ は (1.2) の有理函数で, $p = q+1$ とし, w_1 は $Q(w)$ の零点とある. $\gamma_0 \in \Delta$ とし, α, β, K は補題 3.1 のものとある. $K' < K$ あって, $w(z)$ は $w_1 \in H^*(\alpha, \gamma_0, K') \cup H^*(\gamma_0, \beta, K')$ においてとらえない.

証明. $w(z_m) = w_1$ とある系列 $\{z_m\}$, $z_m = x_m + iy_m$ かつ, $y_m \rightarrow \gamma_0$, $x_m \rightarrow -\infty$ なるものがあるとして, 各 m に対し 整数 $j^{(m)}$, $1 \leq j^{(m)} \leq n$ あり, $z_m^* = z_m + j^{(m)}$ が $w(z)$ の極とある. これは補題 3.1 と矛盾する. Q.E.D.

補題 3.2. $\gamma_0 \in \Delta$ とあると, ある K と, 極 $z_1, \dots, z_k$, $z_j = x_j + iy_0$, $K-n \leq x_j \leq K$ ($j=1, \dots, k$) とあって, 函数の性質は z_0 在 $L(\gamma_0, K)$ 上の極存在性, ある j ($1 \leq j \leq k$) があり, $z_j - z_0$ は整数で, $ord(z_j) = ord(z_0)$.

補題 3.4. w_1 は $Q(w)$ の零因子とす。 $\gamma_0 \in \Delta$ とす。 K' とし、 w_1 -乗 $z'_1, \dots, z'_{k'}$, $z'_j = z_j + 2\gamma_0$, $K' - n \leq z'_j \leq K'$,
 故あって、 w_1 の性質をもつ: $z'_0 \in L(\gamma_0, K')$ 故 $w(z'_0) = w_1$
 なるは、 故 j ($1 \leq j \leq k'$) 故 $z'_j - z'_0$ 故 整数と存す。
 (補題 3.3, 3.4 の証明は容易故から省略す。)

4. 第2基本定理と、予備的不等式

有理形関数 $f(z)$ に対して

$$S(A, a, a'; f) = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A dy \int_a^{a'} \left[\frac{|f'(\xi + iy)|}{1 + |f(\xi + iy)|^2} \right]^2 d\xi$$

とす。 $S(A, a, a'; f)$ は、 $f(z)$ による $H(A, a, a')$ の像の球面積である。 b_1, b_2, b_3 相異なる3つの値とす。 [8, P.100, Lemma 2] によって

$$(4.1) \quad S(A, a, a'; f) \leq 3 \sum_{j=1}^3 n(a' + 2 + A; b_j, f) + O(a').$$

== $n(t; b_j, f)$ は $f(z) - b_j$ の、 $H(A, a, t)$ に含まれた零因子の個数である。 故 b_j の重複度は考へない。

$\frac{\partial v}{\partial x}(z; A, a, a', c)$ は、 $\operatorname{Re} z \geq c+1$ では、 $a' \rightarrow \infty$ のとき、有界である。 故ゆえ

$$\begin{aligned} T(A, a, a', c; f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A dy \int_a^{a'} v(x + iy) \left[\frac{|f'(x + iy)|}{1 + |f(x + iy)|^2} \right]^2 dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A dy \int_a^{a'} \left[\frac{\partial v}{\partial x}(x + iy) \int_a^x \left(\frac{|f'(\xi + iy)|}{1 + |f(\xi + iy)|^2} \right)^2 d\xi \right] dx \leq \\ &\leq K \int_a^{a'} S(A, a, x; f) dx + O(1) \end{aligned}$$

ある定数 $K > 0$ によって成り立つ。よって (4.1) から

$$(4.2) \quad T(A, a, a', c; f) \leq 3K \sum_{j=1}^3 \int_a^{a'} n(x+z+A; b_j, f) dx + O(a'^2)$$

すなわち、半帯状領域の第2基本定理である。

一方、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $A, -a, a'$ が十分大のとき

$$(4.3) \quad v(z; A, a, a', c+1) \leq (1+\varepsilon) v(z; A, a, a', c)$$

が、 $x = Re z$ が十分大のときに成り立つ。

$w(z)$ は (1.1) の有理形解とす。定理 2.2 と 2.3 から

$$\begin{aligned} T(A, a, a', c; R(w(z))) &= f_0 T(A, a, a', c; w(z)) + O(1) \\ &= T(A, a, a', c; \alpha_n w(z+n) + \dots + \alpha_1 w(z+1)) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n T(A, a, a', c; w(z+k)) + O(1) = \\ &= \sum_{k=1}^n T(A, a+k, a'+k, c+k; w(z)) + O(1) \leq \\ &\leq n(1+\varepsilon) T(A, a, a'+n, c; w(z)) + O(1). \end{aligned}$$

よって

$$(4.4) \quad f_0 T(A, a, a', c; w(z)) \leq n(1+\varepsilon) T(A, a, a'+n, c; w(z)) + O(1)$$

$a' \rightarrow \infty$ のとき $T(A, a, a', c; w(z)) \rightarrow \infty$ なるから、(4.4) から

$$f_0 T(A, a, a', c; w(z)) \leq n(1+2\varepsilon) T(A, a, a'+n, c; w(z)).$$

いま、 $f_0 \geq n+1$ とす。 $\varepsilon > 0$ に対し $\varepsilon/2 < \varepsilon < 1$ とし、 $f_1 = \frac{f_0}{n(1+2\varepsilon)}$ > 1 と仮定する。

$$T(A, a, a'+n, c; w(z)) \geq f_1 T(A, a, a', c; w(z)),$$

$$T(A, a, a'+mn, c; w(z)) \geq f_1^m T(A, a, a', c; w(z)).$$

したがって

$$(4.5) \quad T(A, a, a', c; w(z)) \geq M g_2^{a'} \quad (a' \rightarrow \infty)$$

れ, ある $M > 0$ に対して成り立つ. $\therefore \tau \quad g_2 = g_1^{\frac{1}{n}} > 1$.

5. 定理 と, その証明.

以上の準備の上で, つぎの定理を証明する.

定理. (1.1) において $\beta = g+1 \geq n+1$ とする. $Q(w)$ は
少なくとも 2 つの零点をもち, $w(z)$ は (1.1) の有理形
な解とすると, $\mu \uparrow +\infty$ のとき

$$(5.1) \quad w(z-\mu) \rightarrow \lambda$$

が広義一様に成り立つ. $\therefore \tau \quad \lambda$ は, $\lambda = \infty$ または $\lambda \in \Delta$.

証明. $w_1, \dots, w_\ell$ は $Q(w)$ の零点とする.

また, (3.2) の Δ を空集合のときを考へる. このとき, 任
意の α, β に対して定数 K があって, $w(z)$ は $H^*(\alpha, \beta, K)$ に
あって正則でかつ $w_1, \dots, w_\ell$ をとらない. (したがって $\{w(z-\mu)\}$
は正則族となり, ある $\{\mu_m\}$ あって $w(z-\mu_m) \rightarrow w(z)$
が広義一様に成り立つ. $w(z)$ は正則でかつ $w_1, \dots, w_\ell$ を
とらない. ゆえに $w(z)$ は定数で, 明らかに (1.1) をみた
すから, $w(z) \equiv \infty$ または $w(z) \equiv \lambda \in \Delta$. (しかし $w(z)$ の
値集合は 1 点または連結体であるから, $\{w(z-\mu)\}_{\mu \geq 0}$
自身も, $\mu \uparrow +\infty$ のとき, ∞ または $\lambda \in \Delta$ に収束する.

つぎに Δ を空でないとする. $\gamma_0 \in \Delta$ をとると, 補題 3.3

と 3.4 とから, $L(y_0, K)$ 上は $z_1^{(t)}, \dots, z_{k_t}^{(t)}$, $t=0, 1, \dots, l$ あり, $z_j^{(t)} = x_j^{(t)} + iy_0$ とかくとき, $K-n \leq x_j^{(t)} \leq K$, $t=0, 1, \dots, l$ で, $z_1^{(0)}, \dots, z_{k_0}^{(0)}$ は 補題 3.3 にいふ極, $z_1^{(t)}, \dots, z_{k_t}^{(t)}$ は 補題 3.4 にいふ w_t -点 ($t=1, \dots, l$) となる.

$r > 0$ を小さくとり $D(z_j^{(t)}, r) = \{ |z - z_j^{(t)}| \leq r \}$ を定め, 任意の α, β に対し K' あり, $w(z)$ は

$$(5.2) \quad H_{(r)}^*(\alpha, \beta, K') = H^*(\alpha, \beta, K') \setminus \bigcup_{j=1, \dots, k_t; t=0, \dots, l; m=0, 1, \dots} D(z_j^{(t)} - m, r)$$

しかって $\{w(z-\mu); \mu \geq 0\}$ は, $H_{(r)}^*(\alpha, \beta, K')$ において正規族とある. $\frac{1}{w(z-\mu)}$ を考慮すれば, $\{w(z-\mu); \mu \geq 0\}$ は

$H^*(\alpha, \beta, K')$ で正規族で, それゆえ $\{\mu_m\}$, $\mu_m \nearrow \infty$, あり

$$w(z-\mu_m) \rightarrow w(z) \quad (\text{広義一致}),$$

こゝで $w(z)$ は (1.1) の有理形解である. $w(z)$ は定数でないから, 実数 c へ, $w(c) \neq \infty$, $P(w(c)) \neq 0$, $Q(w(c)) \neq 0$ となる c をとれる. c をこのようにして固定する.

$a' \rightarrow \infty$ のとき $T(A, a, a', c; w(z)) \rightarrow \infty$ なるが, (4.5) から

$$(5.3) \quad T(A, a, a', c; w(z)) \geq M g_2^{a'} \quad (g_2 > 1).$$

一方, 補題 3.3 と 3.4 とから, $w(z)$ の極と w_t -点とは $L(y_0, K_{y_0})$ ($y_0 \in \Delta$) 上に一定の間隔で並ぶ. しかって $n(a'; w_t, w(z)) = O(a')$. それゆえ (4.2) から

$$T(A, a, a', c; w(z)) \leq 3K \sum_{t=0}^2 \int_a^{a'} n(x+2+A; w_t, w(z)) dx + O(a'^2)$$

が, ある定数 K で成り立つ. ($w_0 = \infty$ とかく). よって

$$T(A, a, a', c; W(z)) = O(a'^2)$$

と仮定せよ, 今度は (5.3) と矛盾する. (仮定より)

$$(5.4) \quad T(A, a, a', c; W(z)) \text{ は, } a' \rightarrow \infty \text{ のとき, 有界.}$$

すなわち

$$\begin{aligned} T(A, a, a', c; R(W(z))) &= g_0 T(A, a, a', c; W(z)) + O(1) = \\ &= T(A, a, a', c; \alpha_n W(z+n) + \dots + \alpha_1 W(z+1)) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n T(A, a, a', c; W(z+k)) + O(1) \leq \\ &\leq n(1+\varepsilon) T(A, a, a'+n, c; W(z)) + O(1). \end{aligned}$$

すなわち $\varepsilon > 0$ は, $n(1+\varepsilon) < g_0$ となるように取ることができ.

$a' \rightarrow \infty$ と仮定せよ. (5.4) から

$$g_0 T(A, a, \infty, c; W(z)) \leq n(1+\varepsilon) T(A, a, \infty, c; W(z)) + O(1).$$

したがって

$$(5.5) \quad T(A, a, \infty, c; W(z)) \leq M$$

ある定数 M (A, a に依存しない) で成り立つ. よって

$$(5.6) \quad N(A, a, \infty, c; w_t, W(z)) \leq M, \quad t=0, 1, \dots, \ell.$$

$A \rightarrow \infty$ と

$$\begin{aligned} v(z; A, a, \infty, c) &= \log \left| \frac{\sin \frac{i\pi(z-a)}{2A} + \sin \frac{i\pi(c-a)}{2A}}{\sin \frac{i\pi(z-a)}{2A} - \sin \frac{i\pi(c-a)}{2A}} \right| \\ &\rightarrow \log \left| \frac{1 + \frac{c-a}{z-a}}{1 - \frac{c-a}{z-a}} \right|. \end{aligned}$$

それゆえ (5.6) から, $W(z)$ の w_t -項は有限個しかなく, よ

って $W(z) \equiv \text{定数} (\infty \text{ または } \in \Lambda)$.

よけゆ之, $w(z-\mu_m)$ が収束すれば, 極限は ∞ かまたは Λ に属する定数である. $w(z)$ の集積値集合は Λ である連続体であるから, $w(z-\mu)$ 自身が ∞ かまたは $\lambda \in \Lambda$ に広義一致収束することがわかる. Q. E. D.

REFERENCES

1. Goldberg & Ostrowskii: Value Distribution of Meromorphic Functions. Moskva 1970.
2. Harris & Sibuya: Asymptotic solutions of systems of nonlinear difference equations. Arch. Rat. Mech. Anal. 15(1964), 377-395.
3. " : General solutions of nonlinear difference equations. TAMS 115.
4. " : On asymptotic solutions of systems of nonlinear difference equations. J. Reine Angew. Math., 291(1977), 92-117.
5. Kimura: On the iteration of analytic functions. FE 14(1971).
6. " : On meromorphic solutions of the difference equation $y(x+1)=y(x)+1+\lambda/y(x)$. Lecture Notes in Math. No.312(1973).
7. M. Tsuji: Potential Theory in Modern Function Theory. 1975.
8. Yanagihara: Meromorphic solutions of the difference equation $y(x+1)=y(x)+1+\lambda/y(x)$, I. FE 21(1978), 97-104.
9. " : Meromorphic solutions of some difference equations of higher order. Proc. Japan Acad., 58A (1982).
10. " : Meromorphic solutions of some difference equations of higher order, II. Proc. Japan Acad., 58A (1982).