

偏微分方程式の解の構造 研究集会

1977 年 11 月 7 日 - 11 月 9 日

Double の特性根を持つ system の双曲性に関する注意.

京大 理学部 松本和一郎

§ 0. Introduction と定義. $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合 Ω で与えられる.

偏微分作用素 $I \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^n A^j(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} + A^0(t, x)$ ($N \times N$) に対する Cauchy 問題を考える。 ($A^j(t, x)$ ($1 \leq j \leq n$), $A^0(t, x)$ は real かつ $C^\infty(\Omega)$ とする。) 作用素を $D_t = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}$, $D_{x_j} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ を用いてかく。

$$(1) \quad Lu \equiv D_t u - A_1(t, x, D_x)u + A_0(t, x)u = f(t, x)$$

$$(2) \quad u(s, x) = u_0(x)$$

$$= \text{すなわち} \quad A_1(t, x, D_x) = \sum_{j=1}^n A^j(t, x) D_{x_j}, \quad A_0(t, x) = -i A^0(t, x)$$

である。

この論文において用いる用語は従来のものと異なる場合が多いので、まず“ことば”を定義しよう。なお、双曲性は、局所的性質と思われるので、定義も局所的なものを採用した。

定義 1. Cauchy 問題 (1)-(2) が $(t_0, x_0) \in \Omega$ で両側に弱適切である。

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \exists K_0 \subset K_1 \subset K_2; \text{ compact sets in } \mathbb{R}^n \text{ s.t. } I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \text{ と}$$

して、 $x \in K_0$, $I \times K_2 \subset \Omega$ かつ (2) において $s = t_0$ とすると、 $\forall u_0(x) \in \mathcal{D}(K_0)$
 $\forall f(t, x) \in \mathcal{E}_t(I, \mathcal{D}(K_0))$, $\exists 1 \text{ } u(t, x) \in \mathcal{E}_t(I, \mathcal{D}(K_1))$ sol of (1) in $I \times K_2$ satisfying (2).

注] I を $I_+ = [t_0, t_0 + \varepsilon]$ に置きかえると未来に弱適切, $I_- = [t_0 - \varepsilon, t_0]$ に置きかえると過去に弱適切という。ここでは簡単のために両側への弱適切性のみとりあつかうが、未来への(過去への)弱適切性に対しても対応する結果がえられる。なお一般には未来への弱適切性が過去への弱適切性を保証しないことを注意しておく。(§1. 例3 参照)

定義2. L が $(t_0, x_0) \in \Omega$ で $[\Omega]$ 双曲である。

$\Leftrightarrow L$ に対する Cauchy 問題 (1)-(2) が (t_0, x_0) で $[\Omega$ の各点で] 両側に弱適切である。

さて、 L の主要部を $L_p = ID_t - A_1(t, x, D_x)$ とおこう。

定義3. L_p が形式的に双曲型である。

$\Leftrightarrow \det L_p(t, x, \tau, \xi) = 0$ が τ の方程式として $(t, x) \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$ において実根のみ持つ。

定義4. L_p が $(t_0, x_0) \in \Omega$ で $[\Omega]$ 強双曲である。

$\Leftrightarrow \forall A_0(t, x) \in C^0(\Omega)$ に対して $L = L_p + A_0$ が (t_0, x_0) で $[\Omega$ の各点で] 双曲的である。

定義5. L_p が $(t_0, x_0) \in \Omega$ で $[\Omega]$ 弱双曲である。

$\Leftrightarrow \exists A_0(t, x) \in C^0(\Omega), \exists A'_0(t, x) \in C^\infty(\Omega)$ に対して、 $L_p + A_0$ は (t_0, x_0) で $[\Omega$ の各点で] 双曲的だが、 $L_p + A'_0$ は (t_0, x_0) で $[\Omega$ のある点で] 双曲的でない。

定義6. L_p が $(t_0, x_0) \in \Omega$ で $[\Omega]$ 安定的に非双曲である。

$\Leftrightarrow \forall A_0(t, x) \in C^\infty(\Omega)$ に対して $L_p + A_0$ が (t_0, x_0) で $[\Omega$ のある点
で] 双曲的でない。

定義 7. L が $\Omega_0 = (T_1, T_2) \times \mathbb{R}^n$ で (一様に) ε -適切である。

$\Leftrightarrow \forall s \in (T_1, T_2)$ に対して $\forall u_0(x) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\forall f(t, x) \in \mathcal{E}(\Omega_0)$,
 $\exists \pm u(t, x) \in \mathcal{E}(\Omega_0)$; sol of (1) in Ω_0 .

よく知られているように L が Ω で双曲的なら L の主要部 L_p は Ω で形式的に双曲型でなければならぬ。(P. D. Lax [9], S. Mizohata [11]) この論文における目的は形式的に双曲型であるにもかかわらず、安定的に非双曲な作用素が 2×2 の system できちんと double root をもつものにすら存在すること、双曲であるための必要条件を分析することにより示すことである。K. Kasahara-M. Yamaguchi [6] に示唆されるように、 $A_1(t, x, \tau)$ の固有 vector 挙動が重要な役割をはたす。

仮定 1. $\det L_p(t, x, \tau, \tau) = 0$ の根 $\tau = \lambda_j(t, x, \tau)$ は $(t, x, \tau) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ で常に実かつ重複度一定で、double 又は simple である。

$\lambda_j(t, x, \tau)$ は $1 \leq j \leq r$ で double, $r+1 \leq j \leq S = N-r$ で simple とする。このとき次の命題が V. M. Petkov [12], H. Yamahara [13] によって証明されている。 $\tau = \tau_0, t = x_0, C_{(ij)}^{(1)}(x, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_j} D_{x_j} C(x, \tau)$ かく。このとき subprincipal symbol を $L_s = A_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n L_{p_j}^{(1)}$ とおく。更に $\{A, B\} = \sum_{j=0}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau_j} A D_{x_j} B - D_{x_j} A \frac{\partial}{\partial \tau_j} B \right\}$ とおく。

命題 1. L が Ω で双曲ならば、次の (3) が成り立っている。

$$(3) \quad \left. {}^{\infty}L_p L_s {}^{\infty}L_p + \frac{1}{2} {}^{\infty}L_p \{L_p, {}^{\infty}L_p\} \right|_{\xi_0 = \lambda_j(t, x, \xi)} \equiv 0 \quad (1 \leq j \leq r),$$

for $(t, x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$.

(3) を Levi の条件と云う。^(*) $R_j = \text{rank } L_p(t, x, \lambda_j(t, x, \xi), \xi)$

$(1 \leq j \leq r)$ とおこう。 $R_j = N-2$ の点で、 λ_j についての (3) は自明

となる。仮定 1 の下で $R_j (1 \leq j \leq r)$ が $\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で一定でい

定ならば Levi の条件 (3) は L が双曲であるための十分条件でも

あることが、H. O. Kreiss [7], Petkov [12], H. Yamahara [13] に

よって示されている。又、 R_j が一定でない場合には Y. Demay [1]

が一つの十分条件を与えている。^(**) しかし、彼の条件が成り立

つ得るのは、各 R_j が bicharacteristic curve に沿って一定の場合

に限られるように思われる。(きちんと確かめたわけでは無い。) 更

にその場合、Demay の条件はほぼ (3) と同値であるが、完全に

は同値ではなく、若干より強い。この論文においてはいく

つ bicharacteristic curve に沿って R_j が変わる場合を扱う。

§ 1. 結果と例.

定義 8. 超曲面 T ; $t = \psi(x) \in C^\infty$ が space-like である。

$$\Leftrightarrow |\nabla \psi(x)| \cdot \lambda_{\max} < 1, \quad \text{すなわち} \quad \lambda_{\max} = \max_{\substack{\xi \in \mathbb{S}^{n-1} \\ 1 \leq j \leq s}} |\lambda_j(t, x, \xi)|$$

ある。

(*) (3) と H. Yamahara [13] の Levi の条件との同値性は Tarama によって示された。

(**) K. Kajitani [5] も参照。

(unpublished)

仮定 2. 次の条件を満たす. Ω で互いに交うない *space-like* な超曲面族 $\{T_j\}$ がとれる; $\{T_j\}$ で区切られる Ω の連結領域を $\{\Omega_k\}$ とすると, 各 j , 各 Ω_k に対して $R_j = \text{rank } L_p(t, x, \lambda_j(t, x, z), z)$ が $\Omega_k \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上で一定である ($1 \leq j \leq r$). (図 1 参照)

注] $\Omega_k \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ での R_j は全く

free である。すなわち,

$\{T_j \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ が rank の
変わり目である。

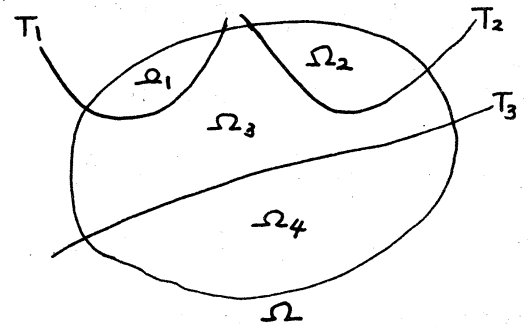


図 1

(on $\Omega_k \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

すべての j, k について $R_j = N-2$ ならば, 自然に $\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ であり, 強双曲である (H. O. Kreiss [7]). そこで, ある j, k について, $R_j = N-1$ on $\Omega_k \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ となる場合を考察しよう。

命題 2. 仮定 1, 2 の下, L_p が Ω で弱双曲とする。このとき, $R_j = N-1$ となる j 及び Ω_k に対して $\overline{\Omega_k} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ における λ_j に属する $A_1(t, x, z)$ の単位固有vector $\vec{e}(t, x, z)$ が $C^\infty(\overline{\Omega_k} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ にとれる。

注] $\vec{e}(t, x, z)$ が $C^\infty(\overline{\Omega_k} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ にとれることは容易であるが, 命題 2 は自明ではない (例 1, 2 参照)。なお, 命題 2 の仮定の下にも, $\vec{e}(t, x, z)$ は固有vectorとして Ω_k を
えては, 一般には C^0 にさえもできない (例 3 参照)。

但し、 $L_p(t, x, \xi)$ の係数 $A^j(t, x)$ が analytic のときは、各 j ごとに $R_j \equiv N-2$ in $\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ か又は、 $R_j = N-1$ on $\bigcup_k \Omega_k \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ のどちらかであり、後者の場合は $\tilde{e}^j(t, x, \xi)$ は $\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で analytic にとれる。

例1. $L_p = I D_t - \begin{pmatrix} -tx & t^2 \\ -x^2 & tx \end{pmatrix} D_x$, $x \in \mathbb{R}^1$, [W. Matsumoto [10]]

$T = \{t=0\}$ である。 $(t, x) = (0, 0)$ において、固有vector が $t \geq 0$ でも、 $t \leq 0$ でも C^0 に延びる。従って命題2により、 L_p は $(0, 0)$ において安定的に非双曲である。

例2. $L_p = I D_t - \varphi(t) \begin{pmatrix} \sin(1/t) & 1 \\ -\sin(1/t) & \sin(1/t) \end{pmatrix} D_x$, $x \in \mathbb{R}^1$, [W. Matsumoto [10]]

== には、 $\varphi(t)$ は $t=0$ を α 次の0点にもつ、 $\varphi(t) \neq 0$ ($t \neq 0$) である実 C^∞ -函数である。 $T = \{t=0\}$ である。例1と同じ理由で、この L_p も $(0, 0)$ で安定的に非双曲である。

仮定1, 2の下 Levi の条件は L が Ω で双曲であるための十分条件であろうか？ おおむね十分だが次のような反例がある。

例3. $L_p = I D_t - \begin{pmatrix} 0 & \mu(t, x) \\ \nu(t, x) & 0 \end{pmatrix} D_x$, $x \in \mathbb{R}^1$.

== には、 $t_j \uparrow t_0$ ($j \uparrow \infty$) なる点列 $\{t_j\}$ があって、

$$(4) \quad \mu(t, x) = \begin{cases} \neq 0 & t_{j-1} < t < t_j \quad (j \geq 1) \\ = 0 & \text{その他} \end{cases}, \quad \nu(t, x) = \begin{cases} \neq 0 & t_j < t < t_{j+1} \quad (j \geq 1) \\ = 0 & \text{その他} \end{cases}$$

かつ、 μ, ν は実、 C^∞ である。== のとき $T_j = \{t = t_j\}$ ($j \in \mathbb{N}$) である。

$A_0 = i \begin{pmatrix} \alpha(t, x) & \beta(t, x) \\ \gamma(t, x) & \delta(t, x) \end{pmatrix}$ とする。Levi condition (3) は $\mu\gamma \equiv \nu\beta \equiv 0$ を意味する。 $\Omega \ni (t_0, x_0)$ ($\exists x_0 \in \mathbb{R}^1$) とする Ω に対して、 Ω のある点で $\mu\gamma \neq 0$ 又は $\nu\beta \neq 0$ なる。その点で $L = L_P + A_0$ は双曲でない (命題 1)。又、 $\mu\gamma \equiv \nu\beta \equiv 0$ in Ω ならば §2 で示すように、 $L = L_P + A_0$ は (t_0, x_0) で双曲的でない。従って L_P は Ω で安定的に非双曲である。

注] 例 3 の L_P に対してある A_0 が Levi の条件 (3) をみたしていれば、Cauchy 問題 (1)-(2) が任意の点で未来に弱適切である。しかし (t_0, x_0) (x_0 は任意の $\mathbb{R}$ の元) においては過去には弱適切でない。更に大域的適切性については、 $\Omega_0 = (t_1, t_0) \times \mathbb{R}$ においては Levi の条件の下に Cauchy 問題 (1)-(2) が一様 ε -well-posed となる。しかし、 $\overline{\Omega}_0 = [t_1, t_0] \times \mathbb{R}$ においては、Cauchy 問題 (1)-(2) は未来に限っても、どの初期面からでも ε -well-posed でない。

仮定 3. 仮定 2 における曲面族 $\{T_j\}$ について、任意の compact set $K \subset \Omega$ に対して、 K においては T_j は集積しない。すなわち

$$(5) \quad \exists \delta_K > 0, \quad \text{dist}(T_j \cap K, T_k \cap K) \geq \delta_K \quad (\text{if } j \neq k).$$

この仮定を加えると次の命題と定理が成り立つ。

命題 3. 仮定 1, 2, 3 の下に Levi の条件 (3) が成り立っていれば、

L は有限伝播速度 $\lambda_{\max}(t, x) = \max_{\substack{3 \in S^{n-1} \\ 1 \leq j \leq s}} |\lambda_j(t, x, 3)|$ を持つ。

以上の命題により、以下の定理が得られる。

定理 1. 仮定 1, 2, 3 の下に、 L が ^(2.2)双曲的であるための必要十分条件は Levi の条件 (3) が成り立つことである。

大域的な ε -適切性についても次の定理が成り立つ。

定理 2. L_p の係数 $A_j^i(t, x)$ ($1 \leq j \leq n$) が $C^\infty(\Omega) \cap \beta^0(\Omega)$ でかつ仮定 1, 2, 3 が成り立っているとしよう。このとき L に対する Cauchy 問題 (1)-(2) が uniformly ε -well-posed であるための必要にして十分条件は Levi の条件が $\Omega_0 \times \mathbb{R}^n$ で成り立つことである。

さて、以上の仮定 1, 2 は次元 n と system の大きさ N に関して制限する。特に $N=2$ の場合、 n は 1 に限られる。しかし、 $N=2$ の場合は、次の様な設定で任意の n について定理が成り立つ。

仮定 1'. $\det L_p(t, x, \tau, \zeta) = 0$ は 2 重根 $\lambda(t, x, \zeta) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(t, x) \zeta_j$ を持つ。

$\lambda(t, x, \zeta)$ は自然に実である。 $\lambda_j I - A_j^i(t, x) = \begin{pmatrix} a_j(t, x) & b_j(t, x) \\ c_j(t, x) & d_j(t, x) \end{pmatrix}$ と

おこす。 ($1 \leq j \leq n$)

仮定 2'. ある ^(互いに交らない)space-like な超曲面の族 $\{T_j\}$ があって、次の条件を満たす； $\{T_j\}$ で区切られる領域 $\{\Omega_k\}$ において、各 Ω_k ごとに

$$\sum_{j=1}^n b_j^2(t, x) + \sum_{j=1}^n c_j^2(t, x) \equiv 0 \text{ on } \Omega_k \times \mathbb{R}^n \text{ 又は } \sum_{j=1}^n b_j^2(t, x) + \sum_{j=1}^n c_j^2(t, x) \neq 0 \text{ on } \Omega_k \times \mathbb{R}^n \text{ の方}$$

が成り立つ。

定理 1'. 仮定 1', 2', 3 の下に、 L が Ω で双曲であるための必要十分条件は Levi の条件が $\Omega \times \mathbb{R}^n$ で成り立つことである。

定理 2'. $A^j(t, x) \in \mathcal{B}^0(\Omega_0) \cap C^\infty(\Omega_0)$ ($1 \leq j \leq n$) のとき、仮定 1', 2', 3 の下には、 Ω_0 に対する Cauchy 問題 (1)-(2) が Ω_0 で一様 ε -適切であるための必要十分条件は Levi の条件 (3) が $\Omega_0 \times \mathbb{R}^n$ で成り立つことである。

注 1] 定理 2' の仮定の下には、各 $\overline{\Omega_k}$ において $\hat{a}(t, x), \hat{b}(t, x), \hat{c}(t, x) \in C^\infty(\overline{\Omega_k})$ があって $\hat{A} = \begin{pmatrix} -\hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{a} \end{pmatrix}$ とおくと、

$$L_p = D_t - \sum_{j=1}^n \lambda^j(t, x) D_{x_j} + \hat{A}(t, x) \sum_{j=1}^n (b_j(t, x) - c_j(t, x)) D_{x_j}$$

とかけること、更に $\hat{A}(t, x)$ が $\overline{\Omega_k}$ で C^∞ の単位固有 vector を持つことが、 L_p が Ω で弱双曲であるための必要十分条件である。こゝに $\det \hat{A}(t, x) \neq 0$ on $\overline{\Omega_k}$ である。

注 2] L_p が仮定 1' の下に弱双曲ならば、 $\text{rank } L_p(t, x, \lambda(t, x, \zeta), \zeta) = 1$ (for $\exists \zeta \in S^{n-1}$) となる (t, x) を通る特性曲線に沿って、はじめて $\text{rank } L_p(t, x, \lambda(t, x, \zeta), \zeta) \equiv 0$ (for $\forall \zeta \in S^{n-1}$) となる点まで、 $A_1(t, x, \zeta)$ の単位固有 vector が C^∞ にとれる。このことにより、Demailly の条件 [1] は、特性曲線に沿って $\text{rank } L_p(t, x, \lambda, \zeta)$ が変わらぬ場合に限りうることがわかる。

§ 2. 例 3 において、 $\mu \equiv \nu \equiv 0$ の場合の (t_0, x_0) における非双曲性

こゝに述べる証明は定理 1 の十分性の証明 (§ 5) の model にもなるから詳しく述べる。

$L = L_p + A_0$ が (t_0, x_0) で双曲とすると、 $\mathcal{O}(K_0) \times \mathcal{E}(I, \mathcal{O}(K_0))$

から解の空間への写像が連続となるから. $\exists M$; 自然数, $\exists \epsilon > 0$.

$$(2-1) \quad \|u(t, x)\|_0 \leq C \{ \|u_0(x)\|_M + \|f(t, x)\|_M \}$$

が成り立つ. $\therefore \|g(t, x)\|_k = \sum_{l=1}^2 \sup_{\substack{(t, x) \in I \times K_1 \\ i+j \leq k}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^j g_l(t, x) \right|$
 $g(t, x) = (g_1(t, x), g_2(t, x))$ である. $\therefore$

$$(2-2) \quad iL u = \frac{\partial}{\partial t} u - \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \nu & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} u$$

であるから. $\gamma(x) \in \mathcal{D}(K_0)$, $\gamma(x_0) = 1$ とし. $t_{4j} > t_0 - \epsilon$ に対して.

$$(2-3) \quad u(t, x) \equiv \gamma(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix\gamma} \quad (t_{4j} \leq t \leq t_0 + \epsilon)$$

$$\text{とおくと } iL u = \{ -(i\gamma\gamma(x) + \gamma'(x)) \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} - \gamma(x) \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \} e^{ix\gamma}$$

である. 特には $t_{4j} \leq t \leq t_{4j+1}$ においては $\mu \equiv 0, \beta \equiv 0$ である.

($\because \nu \neq 0$ ($t_{4j} < t < t_{4j+1}$)) $iL u = -\gamma(x) \delta(t, x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix\gamma}$ である. $\therefore$

$$(2-4) \quad f^j = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\gamma\mu\gamma + i\mu\gamma' + i\beta\gamma \\ i\delta\gamma \end{pmatrix} e^{ix\gamma}, & t \geq t_{4j} \\ i\gamma(x)\delta(t, x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix\gamma}, & t < t_{4j} \end{cases}$$

とおくと. $f^j \in \mathcal{C}(I, \mathcal{D}(K_0))$ である.

$$(2-2) \quad iL u \equiv \frac{\partial}{\partial t} u - \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \nu & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} u = -\gamma(x) \delta(t, x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix\gamma},$$

$$(2-5) \quad u(t_{4j}, x) = \gamma(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix\gamma},$$

を過去に解く. $t_{4j-1} \leq t \leq t_{4j}$ において $\nu \equiv \delta \equiv 0$ ゆえ (2-2) は

$$(2-2') \quad \begin{cases} \partial_t u_1 = \alpha u_1 + \mu \partial_x u_2 + \beta u_2, \\ \partial_t u_2 = \delta u_2 - \gamma \delta e^{ix\gamma}, \end{cases}$$

である. $\therefore$ したがって. $u_2(t, x) = \gamma(x) e^{ix\gamma}$ である. 更に u_2 を (2-2') に

$$\text{代入して. } u_1(t, x) = \left\{ \int_{t_{4j}}^t (i\gamma\gamma(x)\mu(s, x) + \gamma'(x)\mu(s, x) + \gamma(x)\beta(s, x)) e^{\int_s^t \alpha(r, x) dr} ds \right\} e^{ix\gamma}$$

$\equiv \{i\zeta \zeta(x) \hat{g}_1(t, x) + \hat{g}_0(t, x)\} e^{i\alpha \zeta}$ と得る。 $\hat{g}_1, \hat{g}_0 \in E_\epsilon(I_{4j}, \mathcal{O}(K_0))$,

$(I_{4j} = [t_{4j-1}, t_{4j}])$, $\hat{g}_1(t, x) \neq 0$ ($t_{4j-1} \leq t < t_{4j}$) である。従って

$$(2-5') \quad u(t_{4j-1}) = \begin{pmatrix} i\zeta \zeta(x) g_1(x) + g_0(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} e^{i\alpha \zeta},$$

$\equiv 1 = g_0(x) \in \mathcal{O}(K_0)$, $g_1(x) \neq 0$ である。

次に $I_{4j-1} = [t_{4j-2}, t_{4j-1}]$ においては $\mu \equiv \beta \equiv 0$ である。

$$(2-2'') \quad \begin{cases} \partial_t u_1 = \alpha u_1, \\ \partial_t u_2 = \delta u_2 + \nu \partial_x u_1 + \gamma u_1 - \delta \zeta e^{i\alpha \zeta}, \end{cases}$$

(2-2''), (2-5') を $t_{4j-2} \leq t \leq t_{4j-1}$ で解く。

$$u_1(t, x) = \{i\zeta \zeta(x) g_1(x) + g_0(x)\} \exp \int_{t_{4j-1}}^t \alpha(s, x) ds \cdot e^{i\alpha \zeta}$$

$$\equiv \{i\zeta \zeta(x) \hat{g}_1(t, x) + O(1)\} e^{i\alpha \zeta},$$

である。よって $\partial_t u_2 = \delta u_2 + \{ (i\zeta)^2 \zeta(x) g_1(x) \exp \int_{t_{4j-1}}^t \alpha(s, x) ds + O(\zeta) \} e^{i\alpha \zeta}$

$$= \delta u_2 + \{ (i\zeta)^2 \zeta(x) h_2(t, x) + O(\zeta) \} e^{i\alpha \zeta}, \quad h_2(t, x) \neq 0 \quad (t_{4j-2} \leq t \leq t_{4j-1}).$$

$$\therefore u_2(t, x) = \left\{ \zeta(x) \exp \int_{t_{4j-1}}^t \delta(s, x) ds + \int_{t_{4j-1}}^t \{ (i\zeta)^2 \zeta(x) h_2(s, x) + O(\zeta) \} \exp \int_s^t \delta(r, x) dr ds \right\}$$

$$\times e^{i\alpha \zeta} \equiv \{ (i\zeta)^2 \zeta(x) \hat{g}_2(t, x) + O(\zeta) \} e^{i\alpha \zeta}.$$

$\equiv 1 = \hat{g}_2(t, x) \neq 0$ ($t_{4j-2} \leq t < t_{4j-1}$) である。

※下同様にして。

$[t_{4j-(2k-1)}, t_{4j-(2k-2)}]$ においては

$$(2-6)_1 \quad u(t, x) = \begin{pmatrix} (i\zeta)^{2k-1} \zeta(x) \hat{g}_{2k-1}(t, x) + O(\zeta^{2k-2}) \\ (i\zeta)^{2k-2} \zeta(x) \hat{g}_{2k-2}(t, x) + O(\zeta^{2k-3}) \end{pmatrix} e^{i\alpha \zeta},$$

$[t_{4j-2k}, t_{4j-(2k-1)}]$ においては

$$(2-6)_2 \quad u(t, x) = \begin{pmatrix} (i\zeta)^{2k-1} \zeta(x) \hat{g}_{2k-1}(t, x) + O(\zeta^{2k-2}) \\ (i\zeta)^{2k} \zeta(x) \hat{g}_{2k}(t, x) + O(\zeta^{2k-1}) \end{pmatrix} e^{i\alpha \zeta}, \quad (k \geq 1),$$

$\hat{g}_l(t, x) \neq 0$ ($t_{4j-l} \leq t < t_{4j-l+1}$), $\hat{g}_{l-1}(t, x) \neq 0$ ($t_{4j-l} \leq t \leq t_{4j-l+1}$).

この解を $u^j(t, x)$ とかく。(2-6)₁, (2-6)₂ において $t = t_{2j}$ とおく。

$$(2-7) \quad u^j(t_{2j}, x_0) = O(\xi^{2j}), \quad t_{2j} \uparrow t_0 \quad (j \uparrow \infty) \quad (\text{true order}),$$

である。一方 (2-3), (2-4) により。

$$(2-8) \quad |u^j(t_0, x)|_M = O(\xi^M), \quad |f^j(t, x)|_M = O(\xi^{M+1}),$$

である。(2-7), (2-8) は (2-1) に反する。Q.E.D.

§3. 命題2の証明. L が Levi の条件(3)をみたすとする。

Lemma 1. 1) Levi の条件(3)は space-like な変換に不変である。

2) ξ について 0 次斉次の regular matrix $N_0(t, x, \xi)$,

-1 次の $N_{-1}(t, x, \xi)$, $N'_{-1}(t, x, \xi)$ に対して $N = N_0 + N_{-1}$, $N' = N_0^{-1} + N'_{-1}$

を symbol に持つ擬微分作用素 $N(t, x, D_x)$, $N'(t, x, D_x)$ もする。

L が Levi の条件(3)をみたせば $N(t, x, D_x) L(t, x, D_x) N'(t, x, D_x)$

も Levi の条件をみたす。

[証明] $\sigma_h(A)$ によって擬微分作用素 A の h 次斉次部分の

symbol を表すとする。

1) については H. Yamahara [13] による。(3)の形からも容易に

推察される。2) については $\sigma_1(N L N') = N_0 L_P N_0^{-1} (\equiv \tilde{L}_P)$,

$\omega \tilde{L}_P = N_0 \omega L_P N_0^{-1}$, 及び下の (3-1) に注意すれば容易である。

$$(3-1) \quad \sigma_0(N L N') = N_0 A_0 N_0^{-1} + \sum_{j=0}^n N_0 L_P^{(j)} N_0^{-1} + \sum_{j=0}^n N_0^{(j)} L_P N_0^{-1} + \sum_{j=1}^n N_0^{(j)} L_P N_0^{-1} + N_{-1} L_P N_0^{-1} + N_0 L_P N'_{-1}. \quad \text{Q.E.D.}$$

Lemma 2. $\forall (t, x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\exists \omega$; Ω における (t, x) の近傍,
 $\exists \Gamma$; $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ における ξ の conical な近傍, $\omega \times \Gamma$ において.

$A_1(t, x, \xi)$ は $C^\infty(\omega \times \Gamma)$ で実, 0 次斉次 in ξ の block 化行列 $B_0(t, x, \xi)$ をもつ. ξ なるわけ

$$(3-2) \quad A_1 B_0 = B_0 C', \quad \text{即ち} \quad C' = \begin{pmatrix} C_1' & & & 0 \\ & C_2' & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_r' & & \\ & & & & \lambda_{r+1} & \dots & \lambda_s \end{pmatrix},$$

$C_j'; 2 \times 2 \quad (1 \leq j \leq r)$ かつ
 実で ξ に関して 1 次斉次の C^∞ 函数.

[証明] λ_j の root space への projection が

$$(3-3) \quad P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} (I - A_1/|\xi|)^{-1} d\eta, \quad \gamma_j \text{ は } \lambda_j/|\xi| \text{ のみ内部に含む円.}$$

で与えられる. 従って $1 \leq j \leq r$ において (3-3) の縦 vector のうち
 一次独立なものを 2 つ, $r+1 \leq j \leq s$ において non-zero なものを 1 つ
 取り, 単位化してなるべきものを B_0 とすればよい. $\lambda_j/|\xi|, A_1/|\xi|$
 $A_1(t, x, \xi)$ について C^∞ である. B_0 は適当な conical な近傍 $\omega \times \Gamma$
 で B_0 も C^∞ で $\det B_0 \neq 0$ である. $C' = B_0^{-1} A_1 B_0$ とおけば, C' は
 Lemma 2 の要請をみたす. Q.E.D.

Lemma 3. K. Kajitani [5]. $\forall (t, x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\exists \omega$; n.b.d. of (t, x) ,
 $\exists \Gamma$; conical n.b.d. of ξ , $\omega \times \Gamma$ において. $L(t, x, D_t, D_x)$ Block 化
 行列 $B(t, x, D_x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_{-k}(t, x, D_x)$ があり, 次の性質をもつ.

$$L(t, x, D_t, D_x) B(t, x, D_x) \equiv B(t, x, D_x) C(t, x, D_t, D_x) \pmod{S^{-\infty}},$$

即ち $B_{-k}(t, x, D_x)$ は $-k$ 次斉次の擬微分作用素,

$$(3-4) \quad C(t, x, D_t, D_x) = \begin{pmatrix} \boxed{C^1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{C^r} & \\ 0 & & & C_{r+1} \dots C_s \end{pmatrix},$$

$$C^j \sim C_1^j(t, x, D_t, D_x) + \sum_{k=0}^{\infty} C_{-k}^j(t, x, D_x), \quad 2 \times 2 \quad (1 \leq j \leq r),$$

$$C_1^j(t, x, D_t, D_x) = ID_t - C_1^{j'}(t, x, D_x),$$

$$C^j \sim C_1^j(t, x, D_t, D_x) + \sum_{k=0}^{\infty} C_{-k}^j(t, x, D_x), \quad \text{scalar} \quad (r+1 \leq j \leq s),$$

$$C_1^j(t, x, D_t, D_x) = D_t - \lambda_j(t, x, D_x), \quad \text{in } W \times P$$

C_{-k}^j ($1 \leq j \leq r, k \geq 0$), C_{-k}^j ($r+1 \leq j \leq s, k \geq 0$) は $-k$ 次斉次の擬微分作用素。

又、 L が Levi の条件を満足せば、 C が従って C^j が Levi の条件を満足するように B, C をとれる。

[証明] $B \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_{-k}(t, x, D_x)$ とする。

$$LB \sim L_p B_0 + \left(\sum_{j=0}^n L_p^{(j)} B_{0,j} \right) + A \cdot B_0 + L_p B_{-1} + \dots$$

$$\sim \sum_{\substack{-j+k+|k|=-1 \\ j=0,1}}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} L_j^{(\alpha)} B_{-k}^{(\alpha)}, \quad \text{即ち } L_1 = L_p, L_0 = A_0.$$

$$BC \sim B_0 C_1 + \left(\sum_{j=0}^n B_0^{(j)} C_{1,j} \right) + B_0 C_0 + B_{-1} C_1 + \dots$$

$$\sim \sum_{\substack{j+k+|k|=-1 \\ j \geq -1, k \geq 0}}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} B_{-k}^{(\alpha)} C_{-j}^{(\alpha)}.$$

$$\text{よって } L_1 B_{-m} - B_{-m} C_1 = \sum_{\substack{j+k+|k|=m-1 \\ k \leq m-1 \\ j \leq m-2}} \frac{1}{\alpha!} B_{-k}^{(\alpha)} C_{-j}^{(\alpha)} - \sum_{\substack{-j+k+|k|=m-1 \\ k \leq m-1 \\ j=0,1}} \frac{1}{\alpha!} L_j^{(\alpha)} B_{-k}^{(\alpha)} + B_0 C_{-(m-1)}.$$

ゆえに両辺に B_0^{-1} を左からかけて。

$$(3-5) \quad C_1 (B_0^{-1} B_{-m}) - (B_0^{-1} B_{-m}) C_1 = \sum_{\substack{j+k+l=m-1 \\ j \leq m-2 \\ k \leq m-1}} \frac{1}{\alpha!} B_0^{-1} B_{-k}^{(\alpha)} C_{-j}^{(\alpha)} + \\ - \sum_{\substack{-j+k+l=m-1 \\ k \leq m-1 \\ j=0,1}} \frac{1}{\alpha!} B_0^{-1} L_j^{(\alpha)} B_{-k}^{(\alpha)} + C_{-(m-1)}.$$

$$(3-6) \quad \hat{B}_{-m} \equiv B_0^{-1} B_{-m} = \begin{pmatrix} B_{-m}^{11} & B_{-m}^{12} & \cdots \\ B_{-m}^{21} & B_{-m}^{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} B_{-m}^{ij} \text{ } 2 \times 2 \text{ } (1 \leq i, j \leq r) \\ 2 \times 1 \text{ } (1 \leq i \leq r, r+1 \leq j \leq s) \\ 1 \times 2 \text{ } (r+1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r) \\ 1 \times 1 \text{ } (r+1 \leq i, j \leq s) \end{array}$$

$$C_{-m} = \begin{pmatrix} C_{-m}^{11} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & C_{-m}^{rr} & \\ 0 & & & C_{-m}^{ss} \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} C^j; 2 \times 2 \text{ } (1 \leq j \leq r), \\ \text{scalar } (r+1 \leq j \leq s), \end{array}$$

とおく. B_{-m}^{ij} , $C_{-(m-1)}^j$ を m の小さい方から inductive に決める.

$$C_1 \tilde{B}_0 - \tilde{B}_0 C_1 = 0 \text{ ゆえ. Lemma 2 により } \tilde{B}_0 = I,$$

$$C_1 = \tau I - C_1'(t, x, \bar{x}) \text{ とおけばよい. (3-5) は (3-6) により.}$$

$$(3-5)' \quad C_1^i B_{-m}^{ij} - B_{-m}^{ij} C_1^j = (\text{known}) + \delta_{ij} C_{-(m-1)}^j$$

である. (3-5)' において $i \neq j$ ならば「任意の右辺」について B_{-m}^{ij}

は一意的にとけるから B_{-m}^{ij} が決定される. $i=j$ のときは.

右辺が 0 になるように $C_{-(m-1)}^j$ を与えると $B_{-m}^{jj} = 0$ であり.

このようにして B_{-m} , $C_{-(m-1)}$ が決定される.

$$\begin{aligned} \text{なお. } C_0 &= B_0^{-1} (L_0 B_0 + \sum_{j=0}^n L_1^{(j)} B_{0(j)} + L_1 B_{-1}) - \sum B_0^{-1} (B_0^{(j)} C_{1(j)} + B_{-1} C_1) \\ &= B_0^{-1} A_0 B_0 + \sum_{j=0}^n B_0^{-1} L_P^{(j)} B_{0(j)} + \sum_{j=0}^n B_0^{-1(j)} L_{P(j)} B_0 + \sum \tilde{B}_0^{-1(j)} L_P B_{0(j)} \\ &\quad + C_1 B_0^{-1} B_{-1} - B_0^{-1(j)} B_{0(j)} C_1 - B_0^{-1} B_{-1} C_1 \end{aligned}$$

であるから Lemma 1 2) と同様にして Levi の条件が保存されている

ことがわかる。又、 C がblock化されていることから、 C が
Leviの条件をみたすことと C^j がLeviの条件をみたすことは
同等であることがわかる。 Q.E.D.

[命題2の証明] Lemma 3により、 $W \times P$ において、同値は
 2×2 system C^j に帰着された。しかも、 C^j がLeviの条件(3)をみ
たすとしてよい。以下しばらく、 j を略す。 $C_1 = (\tau - \lambda(t, x, \xi))I + \tilde{A}_1$,
 $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} a(t, x, \xi) & b(t, x, \xi) \\ c(t, x, \xi) & d(t, x, \xi) \end{pmatrix}$ とおくと、 $\tilde{A}_1$ が固有値として常に0を
2重根にもつかる。

$$(3-7) \quad d \equiv a, \quad a^2 + bc \equiv 0 \quad \text{in } W \times P, \quad \tilde{A}_1^2 \equiv 0 \quad \text{in } W \times P$$

である。領域 Ω_R において $\text{rank } L_p(t, x, \lambda(t, x, \xi), \xi) = N-1$, 与
えらる $b^2(t, x, \xi) + c^2(t, x, \xi) \neq 0$ としよう。 $\partial\Omega_R$ の一部が $T; t = \psi(x)$
から成るとしよう。 Ω_R は $t < \psi(x)$ の側として一般性を失わ
ない。 $\tilde{A}_1 = A$ とおくと Levi の条件の左辺は

$$\begin{aligned} (3-8) \quad & ((\tau - \lambda)I - A) \left(C_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n (\tau - \lambda)^{(j)}_{(j)} I - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n A^{(j)}_{(j)} \right) ((\tau - \lambda)I - A) \\ & + \frac{1}{2} ((\tau - \lambda)I - A) \left(\sum_{j=0}^n (\tau - \lambda)^{(j)}_{(j)} I + A^{(j)}_{(j)} \right) ((\tau - \lambda)_{(j)} I - A_{(j)}) - \\ & - \sum_{j=0}^n ((\tau - \lambda)_{(j)} I + A_{(j)}) ((\tau - \lambda)^{(j)}_{(j)} I - A^{(j)}_{(j)}) \Big|_{\tau = \lambda} \\ = & A \left(C_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)}_{(j)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n A^{(j)}_{(j)} \right) A + \frac{1}{2} A \left\{ - \sum_{j=0}^n (\tau - \lambda)^{(j)}_{(j)} (\tau - \lambda)_{(j)} I + \sum_{j=0}^n (\tau - \lambda)^{(j)}_{(j)} A_{(j)} \right. \\ & - \sum_{j=0}^n (\tau - \lambda)_{(j)} A^{(j)}_{(j)} + A^{(j)}_{(j)} A_{(j)} + \sum_{j=0}^n (\tau - \lambda)_{(j)} (\tau - \lambda)^{(j)}_{(j)} I - \sum_{j=0}^n (\tau - \lambda)_{(j)} A^{(j)}_{(j)} + \sum_{j=0}^n (\tau - \lambda)^{(j)}_{(j)} A_{(j)} \Big\} \\ & - A_{(j)} A^{(j)}_{(j)} \Big\} \\ = & A C_0 A - \frac{1}{2} A \left\{ \sum_{j=1}^n (A_{(j)} A + A_{(j)} A^{(j)}_{(j)} - A^{(j)}_{(j)} A_{(j)}) + A \sum_{j=0}^n \{ (\tau - \lambda)^{(j)}_{(j)} A_{(j)} - \sum_{j=1}^n (\tau - \lambda)_{(j)} A^{(j)}_{(j)} \} \right\} \end{aligned}$$

$$= AC_0A + AA_0C_0 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^{(j)} AA_{ij} + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^{(j)} AA^{(j)} + AA^{(j)}A_{ij}$$

ここで (3-7) を考慮して, $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix}$, $-iC_0 = \begin{pmatrix} \gamma & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$ とおくと,

$a_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} a$ を使って, (3-8) = 0 は次のように書き直せる.

$b \neq 0$ の点では (3-8) の (1, 2) 成分に $\frac{1}{b^2}$ をかけて,

$$(3-9) \quad \left(\frac{a}{b}\right)_t - \sum_{j=1}^n \lambda_{x_j} \left(\frac{a}{b}\right)_{x_j} + \sum_{j=1}^n \lambda_{x_j} \left(\frac{a}{b}\right)_{x_j} + \sum_{j=1}^n \{a_{x_j} - \left(\frac{a}{b}\right) b_{x_j}\} \left(\frac{a}{b}\right)_{x_j} \\ - \beta \left(\frac{a}{b}\right)^2 - (\alpha - \delta) \left(\frac{a}{b}\right) + \gamma = 0$$

$c \neq 0$ の点では (3-8) の (2, 1) 成分に $\frac{1}{c^2}$ をかけて,

$$(3-10) \quad \left(-\frac{a}{c}\right)_t - \sum_{j=1}^n \lambda_{x_j} \left(-\frac{a}{c}\right)_{x_j} + \sum_{j=1}^n \lambda_{x_j} \left(-\frac{a}{c}\right)_{x_j} - \sum_{j=1}^n (a_{x_j} + \left(\frac{a}{c}\right) c_{x_j}) \left(-\frac{a}{c}\right)_{x_j} \\ - \gamma \left(-\frac{a}{c}\right)^2 - (\delta - \alpha) \left(-\frac{a}{c}\right) + \beta = 0$$

ここで, $g = \frac{a}{b}$, $h = -\frac{a}{c}$ とおくと, $b \neq 0$, $c \neq 0$ の点で $gh \neq 0$.

$$(3-9') \quad g_t - \sum_{j=1}^n \lambda_{x_j} g_{x_j} + \sum_{j=1}^n (\lambda_{x_j} + a_{x_j} - b_{x_j} g) g_{x_j} - \beta g^2 - (\alpha - \delta) g + \gamma = 0,$$

$$(3-10') \quad h_t - \sum_{j=1}^n \lambda_{x_j} h_{x_j} + \sum_{j=1}^n (\lambda_{x_j} - a_{x_j} - c_{x_j} h) h_{x_j} - \gamma h^2 - (\delta - \alpha) h + \beta = 0.$$

が成り立つ. $g \neq 0$, $h \neq 0$ なら $gh = 1$ である.

そこで g, h を未知函数とみた方程式 (3-9'), (3-10') を,

特性曲線を用いて解いてみる. $\dot{a} = \frac{d}{ds} a$ とおくと,

$$(3-9'') \quad \begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = -\nabla_x \lambda \\ \dot{z} = \nabla_x \lambda + \nabla_x a - g \nabla_x b \\ \dot{g} = \beta g^2 + (\alpha - \delta) g - \gamma \end{cases} \quad (3-10'') \quad \begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = -\nabla_x \lambda \\ \dot{z} = \nabla_x \lambda - \nabla_x a - h \nabla_x c \\ \dot{h} = \gamma h^2 + (\delta - \alpha) h - \beta \end{cases}$$

今 ω が $\exists T; t = \psi(x)$ と交っている場合を考える. ω を適当に

小さくおけば, ω は T 以外の T_k には交らないとしてよい.

以下 $\omega \cap \Omega_k$ で考える.

$$(3-11) \quad t(0) = \psi(x) - \varepsilon_0 (= t^0), \quad x(0) = x^0, \quad z(0) = z^0, \quad (t^0, x^0, z^0) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$$

と し、 $b(t^0, x^0, z^0) \neq 0$ ならば

$$(3-12) \quad g(0) = a(t^0, x^0, z^0) / b(t^0, x^0, z^0),$$

$c(t^0, x^0, z^0) \neq 0$ ならば

$$(3-13) \quad h(0) = -a(t^0, x^0, z^0) / b(t^0, x^0, z^0)$$

とおく。 (3-12) 又は (3-13) の一方は常に意味をもつ。

Lemma 4. (3-9''), (3-11), (3-12) の解 $t(s), x(s), z(s), g(s)$ において

$g(s) \neq 0$ であるかぎり、 $t=t(s), x=x(s), z=z(s), h=1/g(s)$ は (3-10''),

(3-11), (3-13) をみたす。逆も成り立つ。

[証明] (3-9''), (3-11), (3-12) の解 $t(s), x(s), z(s), g(s)$ は解の一意的性により、

$$(3-14) \quad g(s) = a(t(s), x(s), z(s)) / b(t(s), x(s), z(s))$$

をみたす。 $g(s) \neq 0$ は $c(t(s), x(s), z(s)) \neq 0$ を意味するから、

$$(3-15) \quad h = 1/g(s) = -a(t(s), x(s), z(s)) / c(t(s), x(s), z(s))$$

である。 $\dot{t}_0 = 1, \dot{x}(s) = -\nabla_x \lambda(t(s), x(s), z(s))$ により、

$$\dot{z}(s) = \nabla_x \lambda + \nabla_x a - \left(\frac{a}{b}\right) \nabla_x b \Big|_{\substack{t=t(s) \\ x=x(s) \\ z=z(s)}} = \nabla_x \lambda - \nabla_x a - \left(-\frac{a}{c}\right) \nabla_x c \Big|_{\substack{t=t(s) \\ x=x(s) \\ z=z(s)}}$$

$$\dot{h}(s) = \left(\frac{\dot{1}}{g(s)}\right) = -\frac{\dot{g}(s)}{g(s)^2} = -\frac{\beta g^2 + (d-\delta)g - \gamma}{g^2} \Big|_{\substack{t=t(s) \\ x=x(s) \\ z=z(s) \\ g=g(s)}} = \gamma h^2 + (\delta-d)g - \beta \Big|_{\substack{t=t(s) \\ x=x(s) \\ z=z(s) \\ h=1/g(s)}}$$

従って、 $t(s), x(s), z(s), 1/g(s)$ は (3-10''), (3-11), (3-13) の解である。

逆も同様に示される。

Q. E. D.

$$M = \sup_{(t,x,z) \in W \times S^{n-1}} \{ |\nabla_3 \lambda|, |\nabla_2 \lambda|, |\nabla_2 a|, |\nabla_2 b|, |\nabla_2 c|, |\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\delta| \}$$

$$\theta_1 = \arctan 2, \quad \theta_2 = \arctan 3 \quad (\theta_1 < \theta_2) \quad \text{と置く.}$$

Lemma 5 $\varepsilon_0 < \frac{\theta_2 - \theta_1}{M}$ に対して. $\uparrow$ $t = \psi(x) - \varepsilon_0$ を (3-9''), (3-10'') の初期面とする.

1) $|g(0)| = |\alpha(t^0, x^0, z^0) / b(t^0, x^0, z^0)| \leq 1$ となる点 (t^0, x^0, z^0) の $\uparrow$ 上での近傍で (3-12) に意味があり, $z = \varepsilon$ から出発する (3-9''), (3-11), (3-12) の解は $T; t = \psi(x)$ $z = \varepsilon$ まで C^∞ である.

2) $|h(0)| = |\alpha(t^0, x^0, z^0) / c(t^0, x^0, z^0)| \leq 1$ となる点 (t^0, x^0, z^0) の $\uparrow$ 上での近傍で (3-13) に意味があり, $z = \varepsilon$ から出発する (3-10''), (3-11), (3-13) の解は $T; t = \psi(x)$ $z = \varepsilon$ まで C^∞ である.

[証明] (3-9''), (3-10'') は共通の優方程式をもつ.

$$(3-16) \begin{cases} \dot{X} = M, \\ \dot{G} = n M G (2 + G), \quad \dot{\Theta} = -5\sqrt{n} M (2 + G), \\ \dot{Q} = M (G^2 + 1), \end{cases}$$

ゆえに.

$$(3-17) \begin{cases} X = X_0 + Ms, \quad G = \tan(Ms + \arctan G_0) \\ G \leq 3 \text{ の領域において } G \leq G_0 e^{5nMs}, \quad \Theta \geq \Theta_0 e^{-5\sqrt{n}Ms}. \end{cases}$$

そこで (3-9''), (3-10'') で定義される特性曲線の (t, x) 空間への projection は常に L_p のある base characteristic curve に接触していることに注意すれば, $\varepsilon_0 < \frac{\theta_2 - \theta_1}{M}$ によっておける.

$|g(0)|, |h(0)| \leq 2$ を $(\psi(x^0) - \varepsilon_0, x^0, z^0)$ ($|z^0| \neq 0$) でとる解 $g(s)$,

$h(s)$ は T 上で $|g(s)|, |h(s)| \leq \tan \theta_2$ ゆえ、 T 上へえて存在する。又、その時、 $|x(s) - x^0| \leq M \varepsilon_0$, $|z^0| e^{-5\sqrt{n} M \varepsilon_0} \leq \max_j |z_j(s)| \leq |z^0| e^{5\sqrt{n} M \varepsilon_0}$
 $|z^0| = 0$ にならぬ。よって、 解は C^∞ である。 Q. E. D.

Lemma 5 により、 $W' \subset C W$, $P' \subset C P$ とする開集合をとり、

$\uparrow \cap W' \times P'$ を初期面にとると、 ε_0 を小さくとれば $|g(0)| \leq 2$,
 $|h(0)| \leq 2$ の解は $W \times P$ にあつまり、 $\exists W'' \subset C W'$, $\exists P'' \subset C P'$ なる開集合
 $W'' \times P''$ をうめつくす。更に $(s, x^0, z^0) \rightarrow (t, x, z)$ が diffeomorph
 になる。したがって、 $g(t, x, z)|_{\uparrow \cap W' \times P'} = a(t, x, z)/b(t, x, z)|_{\uparrow \cap W' \times P'} \leq 2$
 又は $h(t, x, z)|_{\uparrow \cap W' \times P'} = -a(t, x, z)/c(t, x, z)|_{\uparrow \cap W' \times P'} \leq 2$ が $\uparrow \cap W' \times P'$ の
 各点の近傍で成り立つ。それに応じて、(3-9'), (3-10') は T 上へ
 えて C^∞ の解をもつ。更に $g \neq 0$ の領域では $k = 1/g$ が (3-10') の
 解であり、逆も成り立つ。 $g(t, x, z), h(t, x, z)$ は $W \cap \Omega_k$ では、
 意味のあるかぎり $g \equiv a(t, x, z)/b(t, x, z)$, $c \equiv -a(t, x, z)/c(t, x, z)$ であ
 る。ゆえに、 T 上では $g(t, x, z)$ が $h(t, x, z)$ の少くとも一方が存在
 する = ことにより、 T 上では g, h を用いて、 Ω_k での固有 vector
 の極限を定義しよう。

$\hat{A}_1$ の null vector $\tilde{e}$ は $\frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2}} {}^t(b, a) = \pm \frac{1}{\sqrt{H+g^2}} {}^t(1, g)$ ($b \neq 0, t < \psi(a)$)

又は $\tilde{e} = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} {}^t(-a, c) = \pm \frac{1}{\sqrt{H+k^2}} {}^t(h, 1)$ ($c \neq 0, t < \psi(a)$) である

$$(3-18) \quad \tilde{e} = \begin{cases} \pm \frac{1}{\sqrt{H+g^2}} {}^t(1, g) \\ \pm \frac{1}{\sqrt{H+k^2}} {}^t(h, 1) \end{cases} \quad \text{よって } \tilde{e} \text{ を定義すると } \tilde{e} \text{ は } t \leq \psi(a) \text{ で}$$

$\tilde{A}_1$ の null vector になっている。なお (3-18) において $\pm$ は上の 2 式が、

$t \leq \psi(x)$ で C^∞ に つな がる よう に 選 ぶ。 そ う す る と $\tilde{e}_j = \hat{e}$ は $W'' \cap \{t \leq \psi(x)\} \times P''$ で 定 義 せ ら れ C^∞ で あ る。 ま た A_1 の λ_j に 属 す 固 有 vector が $W'' \cap \Omega_k \times P''$ に お い て $e_j = \frac{B_0 \tilde{e}_j}{|B_0 \tilde{e}_j|}$ と し て 得 ら れ た。

ま た の こ と が $\overline{\Omega_k}$ の 各 点 で 成 り 立 つ。 e_j が real vector で あ る と、 $\Omega_k \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に お い て 固 有 空 間 が 一 次 元 で あ る と か ら、 ± だ け 調 節 す る べ し。 e_j は $\overline{\Omega_k} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上 の C^∞ -vector と し て 接 続 せ ら れ る。 こ れ で 命 題 2 の 証 明 が 終 っ た。 Q.E.D.
注] g, h は Γ を 通 過 し て 定 義 せ ら れ た が、 (3-18) は $t > \psi(x)$ で は も ち や 固 有 vector と は 限 ら な い。

命 題 2 に よ り、 後 の 証 明 に 用 い る $Cor.$ が 得 ら れ る。

Cor. 1 L が Ω で 双 曲 的 な ら ば、 $\forall \Omega_k$ に お い て、 $(t, x) \in \partial \Omega_k$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に 対 し て conical (19.3) の 近 傍 $W \times P$ が あ り、 $W \cap \overline{\Omega_k} \times P$ 及 び $W \cap \Omega_k^c \times P$ に お い て、 そ れ で れ、 Lemma 2 の C^j は C^∞ の Jordan の 標 準 形 化 行 列、 $J^{j,1}, J^{j,2}$ を も つ。 ($1 \leq j \leq r$)。 こ の べ し。

$$(3-19) \left\{ \begin{array}{l} \bullet C^j(t, x, D_t, D_x) J^{j,\nu}(t, x, D_x) \equiv J^{j,\nu}(t, x, D_x) D^j(t, x, D_t, D_x), \quad (\nu=1,2) \text{ mod } S^{-\infty} \\ \bullet D^j(t, x, D_t, D_x) \sim D_1^j(t, x, D_t, D_x) + \sum_{k=0}^{\infty} D_{-k}^j(t, x, D_x), \\ \bullet D_1^j(t, x, D_t, D_x) = I D_t - \begin{pmatrix} \lambda_j(t, x, D_x) & e_j(t, x, D_x) \\ 0 & \lambda_j(t, x, D_x) \end{pmatrix} \text{ in } \overline{\Omega_k} \text{ or } \Omega_k^c \\ \bullet J^{j,\nu}(t, x, D_x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} J_{-k}^{j,\nu}(t, x, D_x), \end{array} \right.$$

== 1. $D_{-k}^j, J_{-k}^{j,u}$ は $-k$ 次斉次である。

更に $e_j \neq 0$ in Ω_k ならば $D_0^j(t, x, D_x) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ である。

[証明] $C^j(t, x, \lambda_j(t, x, \zeta), \zeta)$ の rank が 0 ならば $J^{j,u} = I$ であり。

1 ならば Prop. 2 により $J_0^{j,u}$ が $\pm I$ であることは命題 2 により

より。あとは Lemma 3 の証明と同じ。このとき $D_0^j = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$

となるのは Levi の条件 (3) の帰結である。(H. Yamahara [13]).
Q. E. D.

Cor. 2. L が Ω で双曲ならば $\forall \Omega_k, \forall (t, x, \zeta) \in \Omega_k$ に対して
conical (in ζ) な近傍 $W \times P$ があって $W \cap \overline{\Omega_k} \times P$ における $\overline{L}$ の
の標準形化行列 $N(t, x, D_x)$ があり。次の 1) ~ 3) を満たす。

1) N は低階まで分けて block 化する。

2) 主要部は Jordan の標準形に変換される。すなわち、

$$N(t, x, D_x) L(t, x, D_t, D_x) \equiv \Theta(t, x, D_t, D_x) N(t, x, D_x), \text{ mod } S^{-\infty}$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & d^{r+1} & \dots & d^s \end{pmatrix}, \quad \Theta_1 \approx ID_t - \partial_1^j + \sum_{k=0}^{\infty} \Theta_{-k}^j, \quad \partial_1^j = \begin{pmatrix} \lambda_j & e_j \\ 0 & j_j \end{pmatrix},$$

$$N \sim \sum_{k=0}^{\infty} N_{-k}, \quad d^j = D_t - \lambda_j + \sum_{k=0}^{\infty} d_{-k}^j.$$

3) $\text{rank } L_p(t, x, \lambda_j(t, x, \zeta), \zeta) = N-1$ in $\Omega_k \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ならば N_0 の
(2j-1) 行, 2j 行の 2 行は $\overline{\Omega_k} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で global にとれる。

4) $\text{rank } L_p(t, x, \lambda_j(t, x, \zeta), \zeta) = N-2$ in $\Omega_k \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ならば $e_j \equiv 0$,

$N-1$ ならば $e_j \neq 0$ in $\Omega_k \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で。後者の場合 $\Theta_0^j = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ 。

なお $\Theta_{-k}^j, d_{-k}^j, N_{-k}$ はそれぞれ $-k$ 次斉次である。

[証明] 証明は Lemma 3, Cor 1 と同様である。3) については。

N_0 の $2j$ 行が λ_j の左固有vectorであるから命題2により、又、

(2j-1) 行は root vector であり、root space が 2次元であることから、

固有vector に直交するようになっていくことにより従う。

Q.E.D.

§4. 命題3の証明. 局所一意性を示せば、Leviの条件は space-like な変換に不変だから命題3が従う。

Lemma 6. 仮定1, 2, 3の下で Leviの条件が成り立っているとす。これに対する Cauchy 問題(1)-(2)の解に対して、各 Ω_k において局所一意性が成り立つ。

[証明] $(s, x_0) \in \Omega_k$ の近傍 W' において $u_0(x) \equiv 0$ on $W \cap \{t=s\}$, $f(t, x) \equiv 0$ in W' としよう。Holmgren変換により、 $u_0 \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n$, $f(t, x) \equiv 0$ in $[s, s+\varepsilon] \times \mathbb{R}^n$, $u(t, x) \in C^1(I_\varepsilon \times \mathbb{R}^n)$ としてよい。 $(I_\varepsilon = [s, s+\varepsilon])$ W を $W \subset \Omega_k$ であり、 $W \times P_i$ において、Cor 2. の N が構成できる (s, x_0) の近傍とする。 ε を小さくとることにし、 $\bigcup_{t \in I_\varepsilon} \text{supp } u(t, x) \subset W$ とできる。 $\{P_i\}$ に属する単位の分解で、これについて0次高次のものを $\{\alpha_i(t)\}$ としよう。方針は H. Yamahara [13] の energy estimate と同じである。

$W \times P$ における N を N^i としよう。 $V_{< i \rangle} = N^i u$ とおくと、

$$(4-1) \begin{cases} \partial(t, x, D_t, D_x) V_{< i \rangle}(t, x) \equiv 0 \quad \text{mod } S^{-m} \\ V_{< i \rangle}(s, x) = 0 \end{cases} \quad \text{on } W \times P$$

後で、 $\alpha_i(D)$ を (4-1) の両辺にかけるので、 $W \times P$ の外はすべて $S^{-\infty}$

の影響しかうけない。よって、 $I_\varepsilon \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で (4-1) と思っていよう。

以下しばらく、 i を略す。 $\|w(t)\| = \|w(t, x)\|_{L_x}$, $(g(t), h(t)) = (g(t, x), h(t, x))_{L_x}$,

とかく。又、 $v = {}^t(v_1, \dots, v_N)$ のとき、 $v^j = \begin{cases} {}^t(v_{2j-1}, v_{2j}), & (1 \leq j \leq r) \\ v_{r+j} & (r+1 \leq j \leq s), \end{cases}$
とかく。各 v^j ごとに考えればよいから、

$\sigma(\Lambda) = \sqrt{1 + |\Lambda|^2}$ として、 j を略して、 $r+1 \leq j \leq s$ の場合

$$(4-2)_1 \quad \frac{d}{dt} \|\alpha v\| \leq C (\|\alpha v\| + \sum_{\ell=1}^n \|\alpha^{(\ell)} \Lambda v\| + \|v\|_{-1}).$$

$1 \leq j \leq r$ で主要部が対角のとき

$$(4-2)_2 \quad \frac{d}{dt} \|\alpha v\| \leq C (\|\alpha v\| + \sum_{\ell=1}^n \|\alpha^{(\ell)} \Lambda v\| + \|v\|_{-1}).$$

$1 \leq j \leq r$ で主要部が対角でないとき、 $M = \begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $w = Mv$

とかく。

$$M \partial_t v = \Delta(Mv), \quad \Delta \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \Delta_{-k}, \quad \Delta_1 = I(D_t - \lambda(t, x, D_x)) \text{ である。}$$

よって (4-2)₂ と同様に、

$$(4-2)_3 \quad \frac{d}{dt} \|\alpha w\| \leq C (\|\alpha w\| + \sum_{\ell=1}^n \|\alpha^{(\ell)} \Lambda v\| + \|w\|_{-1}).$$

対角の $\partial_i^{j'}$ については $\|\alpha v^{j'}\|$ を、対角でない $\partial_i^{j''}$ には $\|\alpha w^{j''}\|$ を用いて、

$$(4-3) \quad E(t) = \sum_i \left(\sum_{j'} \|\alpha_i v_{<i>}^{j'}\| + \sum_{j''} \|\alpha_i w_{<i>}^{j''}\| + \sum_{j=r+1}^s \|\alpha_i v_{<i>}^j\| \right) + C_0 \|u\|_{-1}$$

とかく。 C_0 を十分大きくとってあげれば $C_1 \|u(t)\|_{-1} \leq E(t) \leq C_2 \|u(t)\|$ 。

$N_0^i = (n_{k,m}^i)_{1 \leq k, m \leq N}$ とかく。(4-2)₂ の $\alpha^{(\ell)} \Lambda v$ について、 $k = 2j'-1, 2j'$ と

して、 $\text{mod } \|u\|_{-1}$ で考えていく。

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(\ell)} \Lambda v_{<i>, k} &\equiv \sum_{m=1}^N \alpha_i^{(\ell)} \Lambda n_{k,m}^i u_m \equiv \sum_m n_{k,m}^i \alpha_i^{(\ell)} \Lambda u_m = \sum_m n_{k,m}^i \alpha_i^{(\ell)} \Lambda \left(\sum_k \alpha_k u_m \right) \\ &\equiv \alpha_i^{(\ell)} \Lambda \sum_k \left(\sum_m n_{k,m}^i \alpha_k u_m \right) \end{aligned}$$

ここで、 $(n_{k,m}^i)_{1 \leq m \leq N} = \beta_{k,1}^h (n_{k,m}^h)_{1 \leq m \leq N} + \beta_{k,2}^h (n_{k,m}^h)_{1 \leq m \leq N}$, $\beta_{k,i}^h$ i 0 次斉次項。

($\because (n_{k,m}^h)_{1 \leq m \leq N}$ は $\lambda_{j'}$ に属する左固有vectorの $\text{supp } \alpha_k$ 上の basis.)

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(12)} \wedge v_{<i>,k} &\equiv \alpha_i^{(12)} \wedge \sum_k \alpha_k \sum_m (\beta_{k1}^h n_{2j'-1,m} + \beta_{k2}^h n_{2j',m}) u_m \\ &\equiv \sum_k \{ \alpha_i^{(12)} \wedge \beta_{k1}^h (\alpha_k v_{<k>,2j'-1}) + \alpha_i^{(12)} \wedge \beta_{k2}^h (\alpha_k v_{<k>,2j'}) \} \end{aligned}$$

$$(4-4) \quad \|\alpha_i^{(12)} \wedge v_{<i>,k}\| \leq C \sum_k (\|\alpha_k v_{<k>,2j'-1}\| + \|\alpha_k v_{<k>,2j'}\|) + C \|u\|_{-1}.$$

(4-2)₁ の $\alpha_i^{(12)} \wedge v_{<i>,1}$ についても同様である。

(4-2)₃ の $\alpha_i^{(12)} \wedge w_{<i>,k}$ について。Cor 2 により $(n_{k,m}^i) = (n_{k,m}^h) \quad (\forall k)$ ゆえ

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(12)} \wedge w_{<i>,2j''} &\equiv \alpha_i^{(12)} \wedge \sum_m n_{2j'',m}^i u_m \equiv \sum_k \sum_m \alpha_i^{(12)} \wedge n_{2j'',m}^i (\alpha_k u_m) \\ &\equiv \alpha_i^{(12)} \wedge \sum_k \alpha_k (\sum_m n_{2j'',m}^h u_m) \equiv \alpha_i^{(12)} \wedge \sum_k \alpha_k w_{<k>,2j''} \end{aligned}$$

$\alpha_i^{(12)} \wedge w_{<i>,2j''-1}$ についても同様にできるが、 $\|\alpha_i^{(12)} \wedge w_{<i>,2j''-1}\| \leq C \|u\|_{-1}$

も成り立つ。ゆえにこれらに

$$(4-4') \quad \|\alpha_i^{(12)} \wedge w_{<i>,k}\| \leq C \left(\sum_k \|\alpha_k w_{<k>,k}\| + \|u\|_{-1} \right), \quad (k=2j''-1, 2j'').$$

ゆえに (4-2)₁, (4-2)₂, (4-2)₃, (4-3), (4-4), (4-4') により、

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq C E(t).$$

とすることで $E(s) = 0$ ゆえ $E(t) \equiv 0$ が従い、 $u(t,x) \equiv 0 \quad [s, s+\varepsilon] \times \mathbb{R}^n$ である。
Q.E.D.

Lemma 7. Lemma 6 の仮定の下に、実は Ω で局所一意性が

成り立つ。

[証明] Lemma 6 により、各 Ω_k では伝播速度 $\lambda_{\max}$ を持つことが

わかる。ゆえに $\partial\Omega_k$ の上の点について議論しよう。 $\partial\Omega_k$ の一部 Γ

上に (s, x_0) があり、その近傍 ω において $u_0 \equiv 0$ の $\omega \cap \{t=s\}$,

$f(t,x) \equiv 0$ in ω としよう。 Ω_k 内では有限伝播速度を持つから、

図 2 の斜線部 M_1, M_2 で $u \equiv 0$ である。 u の連続性により、

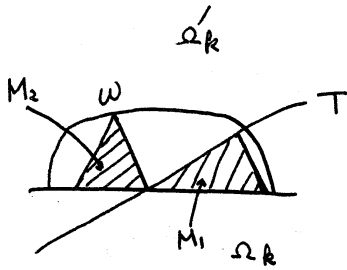


図 2

M_1, M_2 の境界まで $\equiv$ めて 0 である。

$t \leq S$ で $u \equiv 0$ とおいてやれば, T 上の

(s, x_0) の近傍で $u|_T \equiv 0$ となる。そこで

初期曲面を T とみて, 再び Lemma 6 を適用

すれば, $\partial\Omega_k$ 上の点の近傍でも局所一意

性が成り立つことがわかる。

Q.E.D.

§ 5. 定理 1 の十分性の証明. (t_0, x_0) での L の双曲性を示す。

1° reduction. (t_0, x_0) の近傍で考えよう。 $(t_0, x_0) \in \overline{\Omega_1}$ とする。

$$(5-1) \quad \begin{cases} L(t, x, D_t, D_x) U_i(t, s, x, y, D_y) \equiv 0, \text{ mod } S^{-\infty}, \\ U_i(s, s, x, y, D_y) = \delta(x) E_i, \quad E_i = \begin{pmatrix} 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

を満たす Fourier integral operator を求める (L. Hörmander [2], [3], [4]).

Lemma 3, Cor 1 の成り立つ ω, ρ_j として, $U\rho_j = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ρ_j は有限個

ととれる。 ω の内部に高々 1 つの $T_k = T$ としか交うないよう

に $[t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times K_\varepsilon$ とする。 $I_{\varepsilon_0} = [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$ としよう。 K_ε は $\mathbb{R}^n$ の

compact set である。 $K_4 \supset K_3 \supset K_2 \supset K_1 \supset K_0$ とするよう compact

set K_i ($0 \leq i \leq 3$) とする。又, $\varepsilon_1 (< \varepsilon_0)$ を K_i の $\{x \mid \text{dist}(x, K_{j-1}) \leq \varepsilon_1, \bar{\lambda}_{\max}\}$

($i=1, 2, 3, 4$) とするようにとる。 $\bar{\lambda}_{\max} = \max_{\substack{(t,x,y) \in I_{\varepsilon_0} \times K_4 \times S^{n-1} \\ 1 \leq j \leq 5}} |\lambda_j(t, x, y)|$

である。 $\delta(x) \in C_0^\infty(K_3)$ を $\delta(x) \equiv 1$ on K_2 とするようにとる。

$I_1 = [t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1]$ とおく。以下添字 i を省略する。 $\{\rho_j\}$ に属す

る 0 次斉次の単位の分解を $\{\eta_j(x)\}$ とする。

$$(5-1') \begin{cases} L(t, x, D_t, D_x) U^j(t, s, x, y, D_y) \equiv 0 \pmod{S^{-\infty}}, \\ U^j(s, s, x, y, D_y) = \zeta(x) \eta_j(D_x) E_i. \end{cases}$$

の解を重ねあわせて (5-1) の解を得る。以下 j も略す。

Lemma 3 の $B(t, x, D_x)$ を用いて, $U = BV$ とおくと。

$$0 \equiv L(BV) \equiv BC V \pmod{S^{-\infty}} \text{ であるから.}$$

$$(5-2) \quad C(t, x, D_t, D_x) V(t, s, x, y, D_y) \equiv 0 \pmod{S^{-\infty}}$$

を解けばよい。すなわち, $V = (V_1, \dots, V_N)$, $V^j = (V_{2j-1}, V_{2j})$ ($1 \leq j \leq r$),

$$V^j = V_{j+r} \quad (r+1 \leq j \leq s) \text{ とすると.}$$

$$(5-2') \quad C^j(t, x, D_t, D_x) V^j(t, s, x, y, D_y) \equiv 0 \pmod{S^{-\infty}}$$

を解けばよい。以下 $1 \leq j \leq r$ の場合を考察する。 $r+1 \leq j \leq s$ の場合は容易であるから略す。

2° $(I \times K_4) \cap \overline{\Omega}_i \wedge \beta_j$ における V^j の決定. (しばらく j を省略しよう。

まず, $\omega \cap \overline{\Omega}_i \times P$ で考える。Cor 1 の J^1 は $(W \times \mathbb{R}^n K_0) \setminus (\omega \cap \overline{\Omega}_i) \times P$ において 0 次に適当に拡張する。 $(\omega \cap \overline{\Omega}_i) \times P$ において

$$(5-3) \quad V(t, s, x, y, D_y) \equiv J^1(t, x, D_x) W(t, s, x, y, D_y) \pmod{S^{-\infty}},$$

として求める。次の (5-4) を解けばよい。

$$(5-4) \quad D(t, x, D_t, D_x) W(t, s, x, y, D_y) \equiv 0 \pmod{S^{-\infty}}$$

$$(5-5) \begin{cases} W \text{ の symbol } \varepsilon & W(t, s, x, y, \zeta) = w(t, s, x, \zeta) e^{i\phi(t, s, x, \zeta) - i y \cdot \zeta}, \\ w(t, s, x, \zeta) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} w_{-k}(t, s, x, \zeta), & w_{-k} \text{ は } \zeta \text{ に関して } -k \text{ 次斉次.} \end{cases}$$

としよう。 $\varepsilon = 1$ に ϕ は

$$(5-6) \quad \partial_t \phi - \lambda(t, x, \nabla_x \phi) = 0 \text{ in } I \times K_4, \quad \phi(s, s, x, \zeta) = x \cdot \zeta$$

の解である。 ϕ の存在する範囲を $[s - \varepsilon_2, s + \varepsilon_2]$ とする。 ε_2 は $I_1 \times K_4$ において s に依存するものとれる。 $\min\{\varepsilon_1, \frac{\varepsilon_1}{2}\} = \varepsilon$

とし、 $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ としよう。 $\nabla_x = \nabla$ とおく。

とすると、 $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ としよう。 $\nabla_x = \nabla$ とおく。

$$(5-7) \quad h(t, x, \xi) \equiv h(t, s, y, x, \xi) = \phi(t, s, y, \xi) - \phi(t, s, x, \xi) - (y-x) \cdot \nabla \phi(t, s, x, \xi).$$

Hörmander [2] より

$$(5-8) \quad e^{-i\phi(t, x, \xi)} DW \sim \sum_{j, k \geq -1} D_{-j}(t, x, \partial_t \phi, \nabla \phi) W_{-k}(t, x, \xi) + \sum_{k \geq -1} D_t W_{-k}(t, x, \xi) \\ + \sum_{j, k, \ell \geq -1} \frac{1}{\alpha_j} D_{-j}^{(\ell)}(t, x, \nabla \phi) (W_{-k}(t, y, \xi) e^{i h(t, y, x, \xi)}) \Big|_{y=x}$$

$$\sim D_1(t, x, \partial_t \phi, \nabla \phi) W_1(t, x, \xi) + \left\{ D_t W_1 + \sum_{j=1}^n D_1^{(j)}(t, x, \nabla \phi) D_{x_j} W_1(t, x, \xi) \right. \\ + D_0(t, x, \nabla \phi) W_1(t, x, \xi) + D_1(t, x, \partial_t \phi, \nabla \phi) W_0(t, x, \xi) \Big\} \\ + \left\{ D_t W_0 + \sum_{j=1}^n D_1^{(j)}(t, x, \nabla \phi) D_{x_j} W_0(t, x, \xi) + D_1(t, x, \partial_t \phi, \nabla \phi) W_{-1}(t, x, \xi) \right. \\ + D_0(t, x, \nabla \phi) W_0(t, x, \xi) + D_1(t, x, \nabla \phi) W_1(t, x, \xi) + \sum_{j=1}^n D_0^{(j)}(t, x, \nabla \phi) D_{x_j} W_1(t, x, \xi) \\ \left. + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} D_1^{(\alpha)}(t, x, \nabla \phi) \phi_{(\alpha)}(t, x, \xi) W_1(t, x, \xi) \right\} + \dots$$

$$= = D_1(t, x, \partial_t \phi, \nabla \phi) = \begin{pmatrix} 0 & -e(t, x, \nabla \phi) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5-6) \text{ による}.$$

これより $(\omega \cap \overline{I_1}) \times P$ において成り立つ ϕ 以下 $\omega \times P$ で成り立つ

と見て $W_{-k}(t, x, \xi) \quad (k \geq -1)$ を求める。 $V(t, s, x, y, \xi) = V(t, x, \xi)$ とおく。

一方初期値は $B(s, x, D_x) V(s, x, \xi) \sim \zeta(x) \eta(\xi) e^{i(x-y)\xi} E_i$

$$V(s, x, \xi) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} V_{-k}(s, x, \xi) e^{i(x-y)\xi} \quad \text{とおく。}$$

$$(5-9) \quad \begin{cases} V_1(s, x, \xi) = 0, & V_0(s, x, \xi) = \zeta(x) \eta(\xi) B_0^{-1} E_i \\ V_{-k}(s, x, \xi) = B_0^{-1} G(x, \xi, V_{-l}; 0 \leq l \leq k-1) \end{cases}$$

一意的に定まる。更に $W^j(s, x, \xi) = \sum_{k=-1}^{\infty} W_{-k}^j(s, x, \xi) e^{i x \cdot \xi}$ とおくと

$$\text{よって} \quad \sum_{k=-1}^{\infty} v_k^j(s, x, z) \sim \sum_{\substack{i \geq 0 \\ l \geq -1 \\ |i| \geq 0}} \frac{1}{\alpha!} J_{-i}^{1,j(\alpha)}(s, x, z) w_{-l}^j(\alpha)(s, x, z).$$

したがって略して.

$$(5-10) \quad w_1(s, x, z) = 0, \quad w_0(s, x, z) = z(x) \eta(z) J_0^{-1} B_0^{-1} E_i \text{ の } (2j-1, 2j) \text{ 成分}, \\ w_{-k}(s, x, z) = \tilde{G}(x, z, w_{-l}; 0 \leq l \leq k-1).$$

したがって $w_{-k}(s, x, z)$ も inductive に定まる.

1) $e \equiv 0$ on $w \cap \Omega_1$ のとき. (5-8) = 0 とおいて.

$$(5-11) \quad D_t w_{-k} - \lambda^{(j)} D_{x_j} w_{-k} + D_0 w_{-k} - i \sum_{|i|=2} \frac{1}{\alpha!} \lambda^{(i)} \phi_{(i)} w_{-k} \\ = F_k(t, x, \phi_{(i)} (|i| \leq k+2), w_{-l} (-1 \leq l \leq k-1))$$

である. (5-11) は 主要部が対角 ゆえ $w_{-l} (-1 \leq l \leq k-1)$ を既知

とすると解ける. なお (5-10) により $w_1 \equiv 0$. (5-11) の 伝播速度

を考慮すると. $\text{supp } w_{-k} \subset I \times K_4 \times \Gamma$ も明か.

2) $e \neq 0$ in $w \cap \Omega_1$ のとき. (5-8) にあいて. $D_1(t, x, \nabla \phi) = \begin{pmatrix} 0 & -e(t, x, \nabla \phi) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$D_0(t, x, \nabla \phi) = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ 0 & d_4 \end{pmatrix} \Big|_{z=\nabla \phi}, \quad D_{-1}(t, x, \nabla \phi) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Big|_{z=\nabla \phi} \text{ である}$$

から (Cor 1 参照) $w_{-k} = {}^t(w_{-k}^1, w_{-k}^2)$ とおくと.

$$(5-12)_1 \quad D_t w_{-k+1}^1 - \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} D_{x_j} w_{-k+1}^1 + d_1 w_{-k+1}^1 - i \sum_{|i|=2} \frac{1}{\alpha!} \lambda^{(i)} \phi_{(i)} w_{-k+1}^1 - e w_{-k+1}^2 \\ = F_{k-1}^1(t, x, \phi_{(i)} (|i| \leq k+2), w_{-l}^i \stackrel{i=1,2}{(-1 \leq l \leq k-2)}, w_{-k+1}^2).$$

$$(5-12)_2 \quad D_t w_{-k}^2 - \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} D_{x_j} w_{-k}^2 + d_4 w_{-k}^2 - i \sum_{|i|=2} \frac{1}{\alpha!} \lambda^{(i)} \phi_{(i)} w_{-k}^2 + \gamma w_{-k+1}^1 \\ = F_k^2(t, x, \phi_{(i)} (|i| \leq k+3), w_{-l}^i \stackrel{i=1,2}{(-1 \leq l \leq k-2)}, w_{-k+1}^2).$$

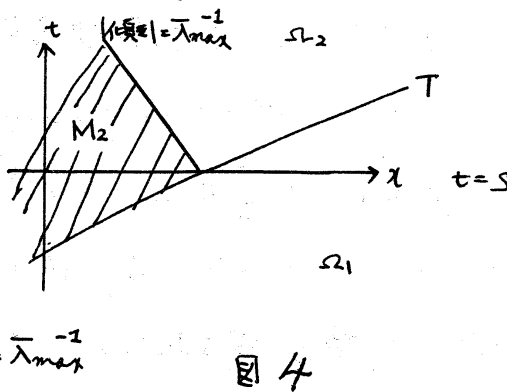
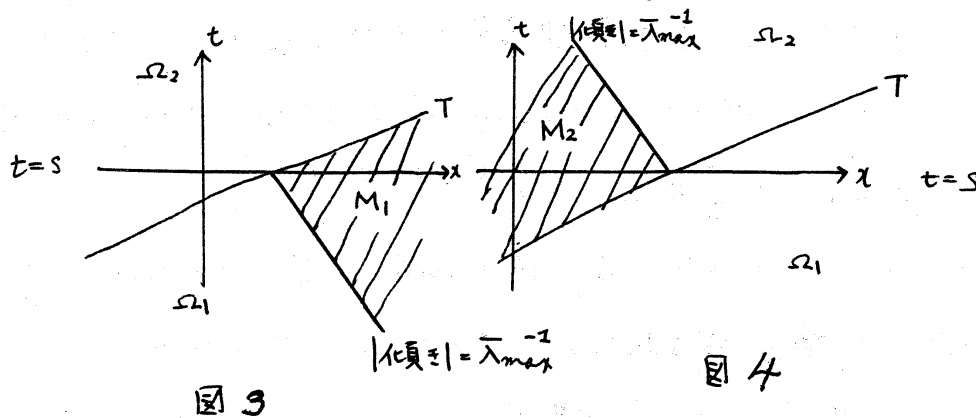
すなわち $w_{<k>} = {}^t(w_{-k+1}^1, w_{-k}^2)$, $F_{<k>} = {}^t(F_{k-1}^1, F_k^2)$ とおくと.

$$(5-12) \quad D_t w_{<k>} - \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} D_{x_j} w_{<k>} + \begin{pmatrix} d_1 - i \sum_{|i|=2} \frac{1}{\alpha!} \lambda^{(i)} \phi_{(i)} & -e \\ \gamma & d_4 - i \sum_{|i|=2} \frac{1}{\alpha!} \lambda^{(i)} \phi_{(i)} \end{pmatrix} w_{<k>} \\ = F_{<k>}, \quad \text{すなわち } w_1^2 \equiv 0 \text{ とわかるから. あるいは (5-12) が主要部対角である}$$

ことから inductive に決まる。 $\text{supp } W_{-k}^i \subset I \times K_4 \times P$ も明か。 ($i=1,2$)

1), 2) いずれにしても $W_{-k}(t, x, y, z)$ ($k \geq -1$) が決定される。

この解は (5-11), (5-12) の伝播速度 $\bar{\lambda}_{\max}$ を考慮すると、図3の斜線の領域 M_1 で、境界まで求めて、(5-8) ~ (5-10) をみたら。



$\bar{M}_1$ において、 $v^j(t, x, y, z) \sim \sum \frac{1}{\alpha!} J_{-k}^{\alpha}(t, x, y, z) (W_{-k}^j(t, y, z) e^{ik_j(t, y, z, z)}) \Big|_{y=z} e^{i\phi_j}$ とおく。これは $\bar{M}_1$ において (5-2') をみたす。

同様のことを $\bar{\Omega}_2$ においても行くと、図4、 $\bar{M}_2$ においても、 v^j が決定される。しかもその2つは $T \cap \{t=s\}$ で C^∞ で接続されている。(もちろん漸近展開が)。それは2つの v^j が共に $T \cap \{t=s\} = \bar{M}_1 \cap \bar{M}_2$ で (5-2') を漸近的に満たしていることによる。したがって、 T 上の v^j の漸近展開が得られる。それを初期値として、 $\Omega_1 \cap W \times P$ と $\Omega_2 \cap W \times P$ で再び (5-2') を解を直せば、少なくとも $I \times K_4 \times P$ においては、 $V(t, s, x, y, z)$ が得られる。(一般に、 $V(t, x, y, z)$ は3の2次の項から始まる。それは T を初期面として解を直すときに $U_2^j(t, x, y, z)$

が必要となる。) $I_j = {}^t(0, \dots, 0, \overset{r_j}{1}, 0, \dots, 0) \quad (r+1 \leq j \leq s),$

$$I_j = {}^t(0, \dots, 0, \overset{2j-1, 2j}{1}, 0, \dots, 0)_{(K_j \leq s)}, \quad \tilde{v}^j = I_j V^j(t, x, z) \text{ とおく.}$$

$$(5-13) \quad u^j(t, x, z) \sim \sum_{\substack{k \geq 0 \\ \ell \geq -2}} B_{-k}^{(k)}(t, x, z) \left(\tilde{v}_{-\ell}^j(t, y, z) e^{i h_j(t, y, x, z)} \right)_u \Big|_{y=x}$$

とおく。(5-13)の右辺を漸近展開にもつように $u^j(t, x, z)$ を決める。このとき $u^j(t, x, z)$ の support は $I \times K_4 \times P$ にあつて δ_{12} 。

$$(5-14) \quad U_i^j(t, s, x, y, z) = \sum_{j=1}^s u^j(t, s, x, z) e^{i \phi_j(t, s, x, z) - i y \cdot z}$$

を symbol にもつ Fourier integral operator を $U_i(t, s, x, y, D_y)$ とする。

入は、(5-1)の解が得られた。 $U = (U_1, \dots, U_N)$ とおこう。

3°) Fundamental matrix の構成。H. Kuranogō [8] による。

$$(5-15) \quad L(t, x, D_x) U_i(t, s, x, y, D_y) = R(t, s, x, y, D_y) \equiv R(t, s) \in S^{-\infty}$$

であらう。 $R_1(t, s) = -i R(t, s)$ とおく。

$$R_k(t, s) = \int_s^t R_1(t, \tau, x, x', D_x) R_{k-1}(\tau, s, x', y, D_y) d\tau,$$

$$(5-16) \quad \tilde{R}(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(t, s),$$

とおく。 $\tilde{R}$ (5-16)の右辺は収束し、 L が $\tilde{R}$ となる。

$$(5-17) \quad \tilde{R}(t, s) = -i R(t, s) - i \int_s^t R(t, \tau, x, x', D_x) \tilde{R}(\tau, s, x', y, D_y) d\tau$$

と $\tilde{R}$ が $\tilde{R}$ 。 L となる。

$$(5-18) \quad U^\infty = \int_s^t U(t, \tau, x, x', D_x) \tilde{R}(\tau, s, x', y, D_y) d\tau, \quad \tilde{U} = U + U^\infty,$$

とおく。明らかに $\tilde{U}(s, s, x, y, D_y) = I(x) I$ であり。

$$(5-19) \quad L(t, x, D_x) \tilde{U}(t, s, x, y, D_y) = i(1 - I(x)) \tilde{R}(t, s, x, y, D_y)$$

($\equiv 0$ on $I \times K_2$) であらう。

$u_0(x) \in \mathcal{D}(K_0)$, $f(t, x) \in \mathcal{E}_t(I, \mathcal{D}(K_0))$ に対して.

$$(5-20) \quad \tilde{u}(t, x) = \tilde{U}(t, t_0, x, y, D_y) u_0(y) + i \int_{t_0}^t \tilde{U}(t, s, x, y, D_y) f(s, y) ds$$

とおく。命題3と(5-19)及び K_0, K_1, K_2 のとり方から.

$\gamma(x) \in C_0^\infty(\{x \mid \text{dist}(x, K_1) \leq \varepsilon\})$, $\gamma(x) \equiv 1$ on K_1 とすると.

$u(t, x) = \gamma(x) \tilde{u}(t, x)$ は (1), (2) の $I \times \mathbb{R}^n$ の解である。これにて定理1の十分性が証明された。Q. E. D.

§6. 定理2について. 有限伝播速度 $\bar{\lambda}_{\max} = \max_{\substack{(t, x, \xi) \in \Omega_0 \times S^{n-1} \\ 1 \leq j \leq S}} |\lambda_j(t, x, \xi)|$

が保証されているから. data を compact set 上に局所化して考察すれば十分である。 $I = [T_1 + \varepsilon, T_2 - \varepsilon]$ とし、定理1の証明で $K_j = \{x \mid \text{dist}(x, K_{j-1}) \leq 3\bar{\lambda}_{\max}(T_2 - T_1)\}$ ととれば.

議論が K_4 の内部で行える。data を更に細分して定理1を適用すれば. 任意の初期面から少しとける。この解ける幅が $\mathcal{D}(K_0)$ の $u_0(x)$, $\mathcal{E}_t(I, \mathcal{D}(K_0))$ の $f(t, x)$ に対しては $I \times K_4$ で. 一樣であるから. 有限回のくり返して $I \times K_4$ での解が得られる。(H. Kumano-go [8]). ε は任意だから. $(T_1, T_2) \times K_4$ で解ける。

§7. 定理1', 2'について. $\lambda^j(t, x)I - A^j(t, x) = \begin{pmatrix} -a_j(t, x) & b_j(t, x) \\ c_j(t, x) & d_j(t, x) \end{pmatrix}$

とおくと. 仮定1'により.

$$(7-1) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j(t, x) \bar{z}_j \equiv \sum_{j=1}^n d_j(t, x) \bar{z}_j \\ \left(\sum_{j=1}^n a_j(t, x) \bar{z}_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n b_j(t, x) \bar{z}_j \right) \left(\sum_{j=1}^n c_j(t, x) \bar{z}_j \right) \equiv 0 \end{cases}$$

$\mathbb{R}[z]$ は素元分解環 T から $\exists j_0, b_{j_0}(t, x) \neq 0$ の点では.

$$(7-2) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j(t, x) \bar{z}_j = a(t, x) \sum_{j=1}^n b_j(t, x) \bar{z}_j, \\ \sum_{j=1}^n c_j(t, x) \bar{z}_j = c(t, x) \sum_{j=1}^n c_j(t, x) \bar{z}_j, \end{cases}$$

更に (7-1) に より $C = -a^2 T$ から.

$$(7-3)_1 \quad L_P = I D_t - \sum_{j=1}^n A_j(t, x) D_{x_j} = I \left(D_t - \sum_{j=1}^n \lambda_j(t, x) D_{x_j} \right) + \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -a^2 & a \end{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^n b_j(t, x) D_{x_j} \right)$$

となる。なお $a(t, x) = \frac{a_{j_0}(t, x)}{b_{j_0}(t, x)}$ ゆえ、 $a(t, x)$ は近傍で C^∞ である。

一方 $c_j(t, x) \neq 0$ の点の近傍でも C^∞ の $\hat{a}(t, x)$ があって

$$(7-3)_2 \quad L_P = I D_t - \sum_{j=1}^n A_j(t, x) D_{x_j} = I \left(D_t - \sum_{j=1}^n \lambda_j(t, x) D_{x_j} \right) + \begin{pmatrix} \hat{a} & -\hat{a}^2 \\ 1 & -\hat{a} \end{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^n c_j D_{x_j} \right)$$

とかける。

よって $g = a, h = \hat{a}$ に対する (3-9'), (3-10') が成り立つ。

命題 2 を得る。但し、このときは g, h が互に無関係であるから、(3-9'), (3-10') は $\lambda(t, x, z)$ の特性曲線と定義する方程式と全く同じになる。

Q. E. D.

文献表

1. Y. Demay ; Le problème de Cauchy pour les système hyperboliques à caractéristiques doubles. C. R. Acad. Sc. Paris t278 no. 11 (74)

2. L. Hörmander ; Pseudo-differential operators. *Comm. P. A. Math* vol 18 (1965)
3. ————— ; The spectral function of an elliptic operator.
Acta Math. vol 121 (1968).
4. ————— ; Fourier integral operators I. *Acta Math.* vol 127 (1971).
5. K. Kajitani ; Cauchy problem for non-strictly hyperbolic systems. (to appear)
6. K. Kasehara and M. Yamaguchi ; Strongly hyperbolic systems of linear partial differential equations with constant coefficients. *Mem. Coll. Sci. U. Kyoto, Series A* vol 33 Math. no. 1 (1960).
7. H. O. Kreiss ; Über sachgemässe Cauchyprobleme. *Math. Scand.* vol 13 (1963).
8. H. Kumano-go ; A calculus of Fourier integral operators on R^n and the fundamental solution for an operators of hyperbolic type. *Comm. P.D.E.* vol 1 (1) (1976).
9. P. D. Lax ; Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems.
Duke Math. J. vol 24 (1977).
10. W. Matsumoto ; Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations with multiple characteristic roots. *J. Math. Kyoto U.* vol 15 (1975).
11. S. Mizohata ; Some remarks on the Cauchy problem.
J. Math. Kyoto U. vol 1 (1961-1962).
12. V. M. Pethov ; On the Cauchy problem for first-order hyperbolic systems with multiple characteristics. *Dokl. Acad. Nauk SSSR* t. 209 (1973),
(Russian),
Soviet Math. Dokl. vol 14 (1973).
13. H. Yamahara ; On the Cauchy problems for weakly hyperbolic systems.
R. I. M. S. Kyoto U. vol 12, no. 2 (1976).