

逆不安定解 と 2 次分数調波解

岩手大 教 育 中 嶋 文 雄 (Fumio Nakajima)

§1. まえがき.

周期的外力を有する Duffing 方程式

$$(1) \quad \ddot{u} + k\dot{u} + au + bu^3 = B \cos t \quad (- = \frac{1}{\omega})$$

を考える. ここで $k > 0$, $a \geq 0$, $b > 0$, $B > 0$ は定数とする.

(1) において, k と B の数値に依って, 複数個の周期解が存在することを知っている. これらの中で, 奇数次の分数調波解については, その存在証明等は, Loud (1958), 占部 (1969) によって, 各々摂動論的, 数値解析的に研究されて来た. 他方, 偶数次の分数調波解については, その存在証明は, 摂動論的に極めて困難であり, 近年になって, 篠原 (1974) によって, 数値解析的に証明された.

他に、この偶数次の分数調波解の発生につきについては、比較的早くから、既に1940年代に、Levinson, Massera によつて、逆不安定な2元-周期解が存在すれば、2次分数調波解が存在することを知適された。但し、彼らは、おのれの周期解は simple であるという仮定を置いていた。

更に、物理現象としての研究は、林-上田-川上 (1969) によつて行われ、そこでは2次分数調波解は逆不安定な2元周期解から、分岐して発生することを知報告されている。

本講では、(1)に於いて、simple の仮定無しに、逆不安定な2元周期解が存在すれば、 B を変化させると、そこから2次分数調波解が分岐発生することを証明する。証明では、周期点の指数概念が用いられる。

次の2次元周期系を考える

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{u} = U(t, u, v; B) \\ \dot{v} = V(t, u, v; B) \end{cases} \quad (\cdot = \frac{d}{dt})$$

U, V は $(t, u, v, B) \in \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^1$ なる連続関数で、

t について 2π -周期的で、次の条件を満たすとする;

条件(I). U, V は (t, B) を固定すると (u, v) について解析的とする。

$$(II) \quad \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v} < 0 \quad (\forall (t, u, v, B) \in \mathbb{R}^4)$$

(III) $\forall B$ に対し、(2) は常に dissipative である。

(2) の解で、 $t=0$ で $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を通るものを

$(u(t, x, y), v(t, x, y))$ とする。 (2) が dissipative で

あるとは、 $\mathbb{R}^2$ のある compact set D が存在して、

任意の解 $(u(t, x, y), v(t, x, y))$ に対し、 t が十分大で

あれば

$$(u(t, x, y), v(t, x, y)) \in D$$

となることである。

(1) 2次元系

$$(3) \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -bv - au - bu^3 + B \cos t \end{cases}$$

は、条件 (I), (II), (III) をすべて満たしている。

すなわち、 $(u(t, x, y), v(t, x, y))$ が t について、 2π -
周期的ならば、 (x, y) を 2π -周期点と呼び、 t について
 4π -周期的ならば、 (x, y) を 4π -周期点と呼ぶ。
 4π -周期点であるが、 2π -周期点でない点を、2次分数
調波点と呼ぶ。即ち、2次分数調波点は、2次分数調
波解の $t=0$ の初期値である。

Poincaré 写像 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える：

$$T(x, y) = (u(2\pi, x, y), v(2\pi, x, y))$$

(2) の仮定より、 $T(x, y)$ は (x, y) の解析関数である。

$$(x, y) \text{ が } 2\pi\text{-周期点} \iff T(x, y) = (x, y),$$

$$(x, y) \text{ が } 4\pi\text{-周期点} \iff T^2(x, y) = (x, y)$$

$$(x, y) \text{ が } 2\text{次分数調波点} \iff T^2(x, y) = (x, y), T(x, y) \neq (x, y) \\ \text{である。}$$

§2. 周期点の指数

[6]より次の事が知られている；

命題1. T^2 の不動点は、高々有限個である。

さて、 C を単一閉曲線とし、その上に T^2 の不動点は無いものとする。 $Q \in C$ に対し、 Q を始点、 T^2Q を終点とする vector を $\overrightarrow{Q, T^2Q}$ で表わすと、

$$\overrightarrow{Q, T^2Q} \neq 0$$

となる。

今、 Q を C 上を反時計回りに 1 度一回転すれば、

$\overrightarrow{Q, T^2Q}$ は原点の回りを反時計回り、あるいは

時計回りに 何回か回転する。その回転数を I_0 と

すると

$$I(T^2, C) = \begin{cases} I_0 & (\overrightarrow{Q, T^2Q} \text{ は反時計回り}) \\ -I_0 & (\quad \quad \text{は時計回り}) \end{cases}$$

と定義し、 C の T^2 による指数という。

さて、 P を T^2 の不動点とする。 P の十分小なる近傍を
 考え、この中には、 P 以外に T^2 の不動点はないものとする。
 これは命題 1 より可能である。上の近傍に含まれる
 単一閉曲線 C を、その内部に P を含むものを C で表す。
 T^2 は C 上に不動点を持たないから、 $I(T^2, C)$ が
 定義される。次に、 C を一定 P に連続的に
 縮小して行くことを考えると、 $I(T^2, C)$ も連続的に
 変化する。しかし $I(T^2, C)$ は常に整数値を取る
 から、実際は一定値となる。故に

$$I(T^2, P) = I(T^2, C)$$

と定義し、 P の T^2 による指数と呼ぶ。

[9] の定理 2 と同様にして、次の命題 2 が成立する：

命題 2

$$(i) \quad |I(T^2, P)| \leq 1$$

(ii) C の内部に含まれる T^2 の不動点の集合を

$$\{P_j\}_{j=1}^n \quad \text{とすると,}$$

$$I(T^2, C) = \sum_{j=1}^n I(T^2, P_j)$$

である。

次の事が成立する：

命題 3. Q_1 を 2 次分数調波点 とすれば, $Q_2 = TQ_1$ も 2 次分数調波点 で

$$(4) \quad I(T^2, Q_1) = I(T^2, Q_2)$$

である。

証明 Q_2 が 2 次分数調波点 であることは 明らかである. Q_1 を中心に 半径 δ 十分小なる円 H で, その上及び内部に, Q_1 以外に T^2 の不動点を 持たないものを C_0 とすると,

$$(5) \quad I(T^2, C_0) = I(T^2, Q_1)$$

が得られる。

$\forall t \in \mathbb{R}$ に對し,

$$C_t = \{ (u(t, Q), v(t, Q)) \in \mathbb{R}^2 : Q \in C_0 \}$$

と置く。

解の初期値に対する唯一性より, C_t も単一閉曲線.

$C_{2\pi}$ は, その内部に唯一つの T^2 の不動点 Q_2 を

含んでいる. 故に

$$(6) \quad I(T^2, C_{2\pi}) = I(T^2, Q_2)$$

となる. 今, (2) の解で, $t = s$ の (x, y) を通るものを

$(u(t, s; x, y), v(t, s; x, y))$ とし,

$$S_t(x, y) = (u(4\pi + t, t; x, y), v(4\pi + t, t; x, y))$$

と置く.

この時, $S_0 = S_{2\pi} = T^2$ であり, S_t の不動点は

4π -周期解の t における値となる. 故に $Q \in C_t$ に

に対し, $S_t Q \neq Q$ であり, $\overrightarrow{Q, S_t Q} \neq 0$ となる.

Q が C_t 上を反時計回りに一周するとき,

$\overrightarrow{Q, S_t Q}$ が原点の回りを反時計回りに I_0 回転すれば,

$I(S_t, C_t) = I_0$. と置き, 時計回りに I_0 回転

すれば, $I(S_t, C_t) = -I_0$. と置く.

S_t と C_t は共に t の変化に対し連続的であるから、
 $I(S_t, C_t)$ も連続的となり、かつ常に整数値であるから、
 一定となる。故に

$$I(S_{2\pi}, C_{2\pi}) = I(S_t, C_t) = I(S_0, C_0)$$

$$\text{となり、 } S_{2\pi} = S_0 = T^2 \text{ より}$$

$$I(T^2, C_{2\pi}) = I(T^2, C_0)$$

となる。故に (5), (6) より (4) が得られる。

証明 終り、

さて、 2π -周期点 $P = (x, y)$ に対し、その特性乗数、

$$\text{即ち、} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi, x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(2\pi, x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(2\pi, x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(2\pi, x, y) \end{pmatrix}$$

の固有値を ρ_1, ρ_2 で表し、

もし、 $|\rho_1| < 1, |\rho_2| < 1$ ならば P は完全安定 といふ、

もし、 $\rho_1 < -1 < \rho_2 < 0$ ならば P は逆不安定 といふ。

2π -周期点 P を T^2 の不動点と見れば、その特小値乗数は ρ_1^2, ρ_2^2 となる。ゆえに、次の事が導かれる:

(i) P が完全安定ならば、 $I(T^2, P) = +1$,

(ii) P が逆不安定ならば、 $I(T^2, P) = -1$

([3] を参照),

以下、(2) で B を変化させるとき、 $T = T(B)$ と書く。

すると $T(B)(x, y)$ は B の連続関数となる。

§4 2次分数調波解の分岐

定理1 ある $B_0 \in R$ と $\varepsilon > 0$ が存在して

$B_0 - \varepsilon < B < B_0 + \varepsilon$ に対し, (2) は 2π -周期解

$P(B)$ を持ち, $P(B)$ は B の変化 に対し 連続的で,

$B_0 < B < B_0 + \varepsilon$ で $P(B)$ は 逆不安定 で,

$B_0 - \varepsilon < B < B_0$ で $P(B)$ は 完全安定 とする.

このとき, 次の (i), (ii) の中, 少なくとも 一つが

成立する:

(i) $B_0 < B < B_0 + \varepsilon$ で (2) は 少なくとも 2 個の

2次分数調波解 $Q_1(B)$, $Q_2(B)$ を持ち,

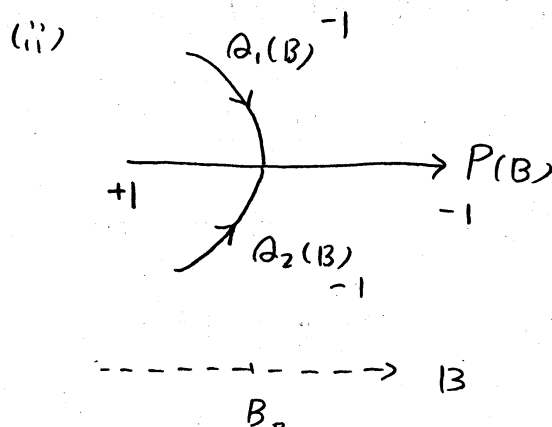
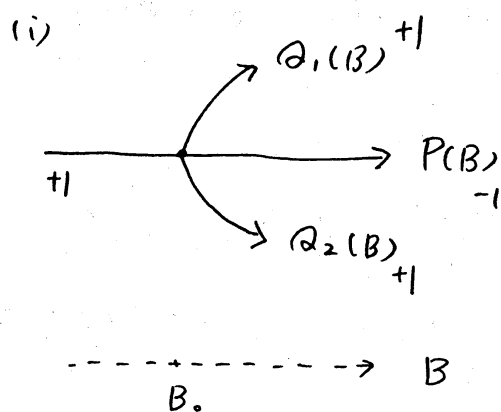
$B \rightarrow B_0$ のとき, $Q_{\lambda'}(B) \rightarrow P(B_0)$ ($\lambda' = 1, 2$),

かつ $I(T^2(B), Q_{\lambda'}(B)) = -I(T^2(B), P(B))$

($\lambda' = 1, 2$)

(ii) $B_0 - \varepsilon < B < B_0$ で (i) と同様の事が成立する.

上の結果を図示する:



ここで, $+1, -1$ は各々の不動点の $T^2(B)$ に対する指数を表している.

定理 1 の証明を行う.

step 1. $P(B_0) = P_0$ とする. P_0 を中心に半径 ϵ が十分

小なる円 C で, 次の要件を満たすものの存在を示す:

(i) $T^2(B_0)$ は C の上に不動点を持たず, かつ

C の内部に唯一つの不動点 P_0 を持つ,

(ii) ϵ を十分小とし, $|B - B_0| < \epsilon$ に仮し, $P(B)$ は

C の内部に含まれ, かつ $P(B)$ は $T(B)$ の C 上及び C の内部における唯一つの不動点である.

(i) は命題 1 より, (ii) の前半は $P(B)$ の B に対する連続性より明らかである. (ii) の後半を示すには,

$$S(x, y, B) = T(B)(x, y) - (x, y)$$

と置き, $S(x, y, B)$ について, $(x, y) = P_0$, $B = B_0$ の近傍で唯一つの零点を持つことを示せば良い. P_0 の特性乗数も ρ_1, ρ_2 とすれば, $\rho_1 \leq -1 \leq \rho_2 < 0$ であり, かつ

$$\frac{\partial^2 S(x, y, B_0)}{\partial (x, y)^2} \Big|_{(x, y) = P_0} = (\rho_1 - 1)(\rho_2 - 1) \neq 0.$$

故に, 陰関数の定理より示された.

Step 2. 要件 (ii) より

$$(7) \quad I(T^2(B_0), P_0) = I(T^2(B_0), C)$$

と定義できる. 十分小さい ε に対して, $|B - B_0| < \varepsilon$ ならば, $T^2(B)$ は C 上に不動点を持たず, 従って, $I(T^2(B), C)$ が定義され, B の変化に対し連続的となる. このとき, $I(T^2(B), C)$ は常に整数値であることが一定となり,

$$I(T^2(B), C) = I(T^2(B_0), C).$$

故に (7) より

$$I(T^2(B_0), P_0) = I(T^2(B), C)$$

により,

命題 2 より, $|B - B_0| < \varepsilon$ により,

$$(8) \quad I(T^2(B_0), P_0) = \sum_{P \in C} I(T^2(B), P)$$

を得る. ここで 右辺の和は C に含まれる $T^2(B)$ の不動点について取る.

Step 3. さて, $B_0 < B < B_0 + \varepsilon$ とすると, 条件に依りより

$$I(T^2(B), P(B)) = -1.$$

もし, C の中に, $T^2(B)$ の不動点で, 指数 $\neq 1$ のものが無ければ,

命題 2 より, $I(T^2(B), P) \leq 0$ であるから,

$$\sum_{P \in C} I(T^2(B), P) \leq I(T^2(B), P(B)) = -1.$$

よって, (8) より

$$I(T^2(B_0), P_0) \leq -1$$

になり

命題 2 より,

$$(9) \quad I(T^2(B_0), p_0) = -1$$

となる.

次に $B_0 - \varepsilon < B < B_0$ とすると, 条件と例より

$$I(T^2(B), P(B)) = +1$$

となり, もし C の中に $T^2(B)$ の不動点で 指数 -1 のものが無ければ, 同様の議論より,

$$I(T^2(B_0), B_0) = +1$$

となり, (9) に矛盾する. 故に, $B_0 < B < B_0 + \varepsilon$

が, $B_0 - \varepsilon < B < B_0$ の少くともいつかホーネに
に対し, $T^2(B)$ は少くとも 2 個の不動点 (指数 $+1$ の
ものと 指数 -1 のもの) を持つ.

Step 4. 要件 (ii) より, $T(B)$ は C の中に不動点を
唯一つしか持たないので, $T^2(B)$ の 2 つの不動点の中,
一方は, $T(B)$ の不動点ではなく, 2 次分岐調波点となる.

これを $Q_1(B)$ とすると,

$$(10) \quad I(T^2(B), P(B)) = -I(T^2(B), Q_1(B))$$

となる。 $Q_2(B) = T(B)Q_1(B)$ とおくと, $Q_2(B)$ も
2次分数調波関数 となる。

$B \rightarrow B_0$ のとき, $P(B) \rightarrow P_0$ となるので,

C の半径は任意に小さく取れ, 従って

$$Q_1(B) \rightarrow P_0.$$

となる。

又, $B \rightarrow B_0$ のとき, $Q_2(B) \rightarrow T(B_0)P_0 = P_0$ が

得られる。更に (10) と命題 3 より

$$I(T^2(B), P(B)) = -I(T^2(B), Q_{\lambda'}(B)) \quad (\lambda' = 1, 2)$$

となり, 証明は終了。

$$(3) \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -kv - au - bu^3 + B \cos t \end{cases}$$

定理2 (3) は $B = B_0$ のとき, 逆不安定な 2π -周期点を持つとする. このとき, $0 < B_0 < B_1$ と正数 $\varepsilon > 0$ が存在して, 次の事が成立する;

(3) は $B_0 - \varepsilon < B < B_0 + \varepsilon$ で 2π -周期点 $P(B)$ を持ち, $P(B)$ は B の解析的で, $B_0 < B < B_0 + \varepsilon$ では逆不安定となり, $B_0 - \varepsilon < B < B_0$ では完全安定となる. 従って, 定理1の結論が成立する.

注. (3) に於て, B を減少させる代わりに, k を増加させても同様の議論が成立して, 同じ結論を得る.

証明.

Step 1. (3) の解で, $t=0$ で (x, y) を通るものを $(u(t, x, y; B), v(t, x, y; B))$ と置き,

$$f(x, y, B) = u(2\pi, x, y, B) - x$$

$$g(x, y, B) = v(2\pi, x, y, B) - y$$

とする。

f, g は x, y, B に解析的であり, (x, y) は 2π -
周期点 であることは

$$f(x, y, B) = g(x, y, B) = 0$$

となることと同値である。

さて, $B = B_1$ のとき 与えられた 逆不安定な 2π -
周期点を (x_0, y_0) とし, その特性乗数を ρ_1, ρ_2 と

すれば, $\rho_1 < -1 < \rho_2 < 0$ となる,

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0, B_1) = (\rho_1 - 1)(\rho_2 - 1) \neq 0$$

となる。

今, $f(x_0, y_0, B_1) = g(x_0, y_0, B_1) = 0$ であるから,

陰関数の定理より $B = B_1$ の近傍に定義された解析関数

$x(B), y(B)$ が存在して。

$$(11) \begin{cases} f(x(B), y(B), B) = 0 \\ g(x(B), y(B), B) = 0 \end{cases}$$

$$x(B_1) = x_0, \quad y(B_1) = y_0 \quad \text{となる.}$$

$(x(B), y(B))$ の $B < B_1$ の方向での解析関数としての最大の定義域を (B_2, B_1) とすると, (11) が成立し

続けるので, $(x(B), y(B))$ は (B_2, B_1) で 2π -周期関数

となる. $(x(B), y(B))$ の特性乗数を $\rho_1(B), \rho_2(B)$ とし,

これは B の連続関数である様に番号付けして
いるとし,

$$\rho_1(B_1) < -1 < \rho_2(B_1) < 0$$

とする. Abel の公式より

$$(12) \quad \rho_1(B) \rho_2(B) = e^{-2\pi B}$$

となる。

Step 2 $B_3 \in (B_2, B_1]$ が存在して

$$(13) \quad -1 < f_1(B_3) < 0$$

となることを示す。

もし、上の B_3 が存在しなければ、 $f_1(B)$ の連続性より

$$f_1(B) \leq -1 < f_2(B) < 0 \quad (B_2 < B < B_1)$$

となる。このとき、 $B_2 = -\infty$ である。実際、もし

$B_2 > -\infty$ ならば、 $B \rightarrow B_2$ のとき、 $P(B)$ は集積点を持つ、その一つは $B = B_2$ での 2π -周期点であり、

特性根 f_1, f_2 は

$$f_1 \leq -1 < f_2 < 0$$

となる。すると Step 1 の議論より、 $P(B)$ は解析関数として B_2 を超えて定義可能となる。これは

B_2 の決め方に矛盾する。従って $B_2 = -\infty$ である。

すると $0 \in (B_2, B_1)$ となる,

$$(14) \quad p_1(0) \leq -1 < p_2(0) < 0$$

が得られる. 他方, (3) は $B=0$ のとき

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -kv - au - bu^3 \end{cases}$$

となる. その 2π -周期解は 唯一つ, $u=v=0$ である.

その特性乗数の絶対値は 1 より 小となり, これは

(14) に矛盾する. 以上より (3) が成立する.

Step 3 (3) と $p_1(B)$ の連続性より, ある $B \in (B_2, B_1)$ が存在して

$$(15) \quad p_1(B) = -1$$

となる. $p_1(B)$ が -1 の近傍にあるとき, (12) より,

$p_2(B)$ は $-e^{-2\pi k}$ の近傍にあるから, $p_1(B)$ と $p_2(B)$ は相異なる実根となり, 故に $p_1(B)$ は B に対し, 解析的となる.

従って (15) を満たす B の中で、ある B_0 が存在して

十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\rho_1(B) < -1 \quad (B_0 < B < B_0 + \varepsilon)$$

$$\rho_1(B_0) = -1,$$

$$-1 < \rho_1(B) < 0 \quad (B_0 - \varepsilon < B < B_0)$$

となる。よって、 $-1 < \rho_2(B) < 0$ であるから、

$P(B)$ は $B_0 < B < B_0 + \varepsilon$ で逆不安定で、

$B_0 - \varepsilon < B < B_0$ で完全安定となる。

証明は終了。

参考文献

- [1] Funato & Maekawa, On the existence of subharmonics for Puffing's equation, Math. Japonica, 5 (1958~59), pp. 27-32.
- [2] C. Hayashi, Y. Ueda & H. Kawakami, Transformation theory as applied to the solutions of non-linear differential equations of the second order, Int. J. Non-linear Mechanics, vol. 4 (1969), pp 235-255.
- [3] N. Levinson, Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order, Ann. Math., 45 (1944), 723-737.
- [4] W. S. Loud, Periodic solutions of $\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = 2f(t)$, Amer. Math. Soc. Mem., No. 31 (1958).

- [5] J. L. Massera. The number of subharmonic solutions of nonlinear differential equations of the second order, *Ann. Math.*, 50 (1969), 118-126.
- [6] F. Nakajima & G. Seifert, On the number of periodic solutions of 2-dimensional periodic systems, *J. Diff. Equations*, vol. 49, No. 3 (1983), 830-880.
- [7] Y. Shinohara, Numerical investigation of $\frac{1}{2}$ -subharmonic solutions to Duffing's equation, *Memoirs of Numerical Mathematics*, No. 1 (1978).
- [8] M. Urabe, Numerical investigation of subharmonic solutions to Duffing's equation, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, vol. 5 (1969), 79-112.
- [9] F. Nakajima, Duffing 方程式 1/2 おける 指数定理 について, *数理解析講究録* 506 (1983), 237-253.