

Topologically stable unfolding について

千葉九 理 福田 拓生

Introduction Thom の初等カタストロフィー理論は、基本的には、 C^{∞} 級関数の C^{∞} 級同相による分類である。所で、このように分類すると、余次元 ≥ 6 の関数の類の数は連続濃度となる。(cf, Arnold [1], Siersma [7])。従って、それらの安定開折 = 普遍開折の C^{∞} 同値類の数も連続濃度となる。カタストロフィー理論の応用から考えると、現象が観察される空間(いいかえるとコントロール空間)の次元が 6 次元以上の場合には、分類したものが多すぎて役に立たない。

一方、 C^{∞} 級関数を同相写像で分類することにより、Thom の初等カタストロフィーと同様の議論を組立てることが出来る。カタストロフィー理論の基本的アイデアが関数の minima のジャンプを分類することであることを考えると、同相写像による分類で充分である。そして、この場合には、上記の欠点(類の数 $\geq \infty$) が解消されることが、何となく知られている。(cf. T. Fukuda [2], F. Looyenga [3], J. Mather [4] には

implicit にこのことが含まれている。) しかしこの事実をきちんと述べたものはみあたらず, その証明を与えているものはないようである。

関数の開折を位相型で分類することは, カタストロフィー理論のみでなく, hyper surface の特異点, 写像の特異点, Analytic space の局所論において非常に重要であると思われる。この小論の目的は 上の事実の証明の概略を与えることである。証明することは 次のことである。

主定理 次元 n を任意に固定したとき 次元 n の topologically stable unfolding をもつ関数の位相型と それらの n 次元の top. stable unfolding の位相型は 有限個である。

目次

- §1 諸定義 (universal unfoldings と stable unfoldings)
- §2 Thom の初等カタストロフィーから
- §3 Topologically stable unfoldings
- §4 Key lemma の証明
- §5 主定理の証明

§1 では 開折 (unfolding) の概念を導入する。§2 では, Thom の初等カタストロフィ理論の骨子を述べられる。§3 では位相型による分類においても, 同様の骨組ができることを述べる。§4 と §5 で そのことが 証明される。

§1 諸定義 (universal unfolding と stable unfolding)

記号. $C^{\infty}(M, N) = \{f: M \rightarrow N \mid C^{\infty} \text{級写像}\}$

$J^k(M, N) = M \text{ から } N \text{ への写像の } k\text{-jets のなす } C^{\infty} \text{級多様体}$

$J^k(m, n) = \{z \in J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \mid \text{原点を原点に移す写像の } k\text{-jets}\}$

$j^k f: M \rightarrow J^k(M, N): M \text{ の各点 } p \text{ に対して写像 } f: M \rightarrow N \text{ の}$

点 p における $k\text{-jet } j^k f(p) \text{ を対応させる写像。}$

$L^k(n) = \mathbb{R}^n \text{ の原点を fix する } C^{\infty} \text{級同相写像の原点における}$

$k\text{-jets のなすリー群}$

$L^k(n)(j^k f(0)): j^k f(0) \in J^k(n, 1) \text{ とするとき, } L^k(n) \text{ は}$

$J^k(n, 1) \text{ にリー変換群として作用するか, その } j^k f(0) \text{ を通る orbit.}$

$\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]: n \text{ 変数の実係数の多項式のなす環。}$

$M_n = \{f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \mid f(0) = 0\}: \text{原点に対応する } \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \text{ の極大イデアル。}$

$\mathcal{E}_n$: $\mathbb{R}^n$ の原点の近傍で定義された C^0 級関数の原点における germs の可換環

$\mathcal{M}_n$: $\mathcal{E}_n$ の極大イデアル

$f: (X, p) \rightarrow (Y, q)$: 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ の点 p における germ をあらわす: $f(p) = q$

定義 1.1 C^0 級写像 $f_i: M_i \rightarrow N_i$, $i=1,2$ が C^0 級 (resp. C^1 級) 右同値であるとは, $N_1 = N_2 = \mathbb{R}^n$ であって, C^0 級 (resp. C^1 級) 同相写像 $h: M_1 \rightarrow M_2$ と平行移動 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が存在して $f_1 = T \circ f_2 \circ h$ が成立するときという。写像芽の右同値についても同様に定義する。

定義 1.2 C^0 級写像芽 $f: (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$ に対して

$$F(x, b) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

をみる C^0 級写像芽 $F: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$ を f の n 次元開折 (unfolding) という。

注意 1.3 $u \in \mathbb{R}^2$ に対して F_u を $F_u(x) = F(x, u)$ で定義する。そのとき, f の開折は $\mathbb{R}^2$ をパラメーターとする変形族 (deformation) $\{F_u\}_{u \in \mathbb{R}^2}$ と考えることができる。

定義 1.4 $F: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$ 及び $G: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}, c')$ をそれぞれ f 及び g の開折とする。そのとき、組 $\Phi = (H, \varphi, \alpha)$ が次の条件を満たすとき、 Φ を G から F への C^∞ 級 (resp. C^0 級) 開折図射 (unfolding morphism) という。

(i) $H: (\mathbb{R}^{n+d}, (a', b)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, a)$ は C^∞ 級 (resp. C^0 級) 写像で、制限 $H|_{\mathbb{R}^n \times \{b\}}: (\mathbb{R}^n \times \{b\}, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, a)$ は C^∞ 級 (C^0) 同相。

(ii) $\varphi: (\mathbb{R}^d, b) \rightarrow (\mathbb{R}^2, b)$ 及び $\alpha: (\mathbb{R}^d, b) \rightarrow (\mathbb{R}, c-c')$ は C^∞ 級 (C^0 級) 写像である。

(iii) 等式 $G(x, v) = F(H(x, v), \varphi(v)) + \alpha(v)$, $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ が成立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 & \\
 H \times \varphi \uparrow & \searrow F & \\
 \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{G - \alpha} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

注意 1.5 G から F への開折図射 $\Phi: G \rightarrow F$ が存在するとする。そのとき、 F 及び G を注意 1.3 のように変形族 $\{F_u\}$ 及び $\{G_v\}$ と考えると、上の条件 (iii) は、任意のパラメーター $v \in \mathbb{R}^d$ に対して、 G_v と F_u が (C^∞ 又は C^0) 右同値となるようなパラメーターの間の対応 $u = \varphi(v)$ が存在して、しかも連続性 (C^∞ 又は C^0) をもつことを意味している。こ

のことは、 G が g の南折としてもつ情報は 全て f の南折としての F の情報の中に含まれていることを示している。

定義 1.6 F, G を同じ f の南折とする。そのとき、
 $(C^\infty$ または $C^0)$ 南折図射 $\Phi = (H, \varphi, \alpha) : G \rightarrow F$ が $(C^\infty$ または $C^0)$ f -南折図射 であるとは Φ がさらに

$$(iv) \quad H|_{\mathbb{R}^n \times \{b\}} = id_{\mathbb{R}^n}$$

をみたすときにいう。

定義 1.4 より 但ちに $(C^\infty$ 級 または C^0 級) 南折図同型の概念をうる。

定義 1.7 $F: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$ 及び $G: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (a', b')) \rightarrow (\mathbb{R}, c')$ を $f: (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$ 及び $g: (\mathbb{R}^n, a') \rightarrow (\mathbb{R}, c')$ の同じ次元 (ie. $n=A$) の南折とする。そのとき、南折図射 $\Phi = (H, \varphi, \alpha) : G \rightarrow F$ が $(C^\infty$ 級 または C^0 級) 南折図同型 であるとは 南折図射 $\Phi' : (H', \varphi', \alpha') : F \rightarrow G$ が存在して

$$(v) \quad \varphi' = \varphi^{-1} \quad (H' \times \varphi') = (H \times \varphi)^{-1}, \quad \alpha' = -\alpha$$

をみたすときにいう。このように南折図同型が存在するとき、 F と G は 南折として $(C^\infty$ 級 または C^0 級) 同値であるという。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{H \times \varphi} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \\
 \uparrow H \times \varphi' & \searrow G - \alpha & \downarrow F \\
 \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F - \alpha'} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

$\curvearrowright$ G $\curvearrowright$ $G - \alpha$

同様にして, f -開折図同型, f の開折として同値なる概念を得る。注意 1.5 と定義 1.6 より次の普遍開折の概念を得る。

定義 1.8 f の開折 F が f の (C^∞ 級又は C^0 級)の普遍開折 (differentiably or topologically universal unfolding) であるとは, f の他の任意の開折 G に対して (C^∞ 級又は C^0 級)の開折図射 $\psi: G \rightarrow F$ が存在するときをいう。

定義 1.7 より, 次の安定開折の概念を得る。

定義 1.9 $f: (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$ の開折 $F: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$ が (C^∞ 級又は C^0 級) 安定開折 (differentiably or topologically stable unfolding) であるとは, 実 (a, b) の任意の近傍 $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ と F の任意の代表元 $\hat{F} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ に対して, $\hat{F}$ の $C^\infty(U, \mathbb{R})$ における Whitney topology での近傍 $N(\hat{F})$ が存在して 次の条件をみたすときをいう。

(条件) 任意の写像 $\widehat{G} \in N(\widehat{F})$ に対して, 集 $(a', b') \in \mathcal{U}$ が存在して $\widehat{G}$ の (a', b') における写像芽

$$G: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (a', b')) \rightarrow (\mathbb{R}, \widehat{G}(a', b'))$$

が n 次元開折として F に (C^∞ 級又は C^0 級) 同値になる。

§2 Thom の 初等カタストロフィー から。

定義 2.1 C^∞ 関数芽 $f: (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}, b)$ が C^∞ -k-determinate (又は C^0 -k-determinate) であるとは $j^k f(a) = j^k g(a)$ なる全ての $g: (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}, b)$ に対して常に f と g が (C^∞ 又は C^0) 右同値になるときにいう。

補題 2.2 $f \in m_n$ とする。そのとき

$$m_n^k \subset m_n \langle \partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n \rangle_{\mathcal{E}_n} + m_n^{k+1}$$

$$\Rightarrow f \text{ は } C^\infty\text{-k-determinate}$$

$$\Rightarrow m_n^{k+1} \subset m_n \langle \partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n \rangle_{\mathcal{E}_n}$$

(証明については J. Mather [10], G. Wassermann [9], 又は 野口-福田 [6] を参照)

この論文で使う C^0 - k -determinacy に関して 次の定理がある。

補題2.3 (Thom [8]) 任意の正の整数 r 及び n に対して r 及び n のみで定まる自然数 Δ が存在して 次の条件を満たす: (i) $\pi_\pi^\Delta: J^\Delta(n, 1) \rightarrow J^r(n, 1)$ を自然な射影とするとき 任意の $\text{jet } z \in J^r(n, 1)$ に対して, $\pi_\pi^{-1}(z)$ の中に proper な代数多様体 Σ_z (これを分岐多様体という。) が存在する。

(ii) $j^0 f(0) \in \pi_\pi^{-1}(z) - \Sigma_z$ ならば, f は C^0 - Δ -determinate である。

定義2.4 $F \in M_{n+r}$ を $f \in M_n$ の開折とする。 $\widetilde{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ を F の代表元とする。 $u \in \mathbb{R}^r$ に対して $\widetilde{F}_u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を $\widetilde{F}_u(x) = \widetilde{F}(x, u)$ で定義する。 $j^k \widetilde{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ を $j^k \widehat{F}(x, u) = j^k \widetilde{F}_u(x)$ で定義する。 $j^k \widehat{F}$ を F の 自然な k -拡大 (natural k -extension) という。

定義2.5 f の開折 F が C^0 - k -横断的 (C^0 - k -transversal) であるとは F の自然な k -拡大 $j^k \widehat{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $= J^k(n, 1) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ が $j^k f(0)$ を通る $L^k(n)$ の軌道

$$L^k(n)(j^k f(0)) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

に横断的なときという。

Thom の初等カタストロフィーの分類において 基本的な役割を果たすのは 次の二つの定理である。

定理 A C^{∞} - k -determinate な $f \in M_n$ の開折 $F \in E_{n+r,2}$ について 次の 3 条件は同値である。

- (i) F は C^{∞} -universal unfolding
- (ii) F は C^{∞} -stable unfolding
- (iii) F は C^{∞} - k -transversal

定理 B $f \in M_n$ に対して 次の 3 条件は同値である。

- (i) ある $k > 0$ に対して f は C^{∞} - k -determinate
- (ii) $\text{codim} f \left(\stackrel{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{R}} M_n / \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle_{E_n} \right) < +\infty$
- (iii) f は C^{∞} -普遍 (すは安定) 開折をもつ。

以上の定理 A, B は Thom の横断性定理と 次の補題に基づいている。

補題 C $f \in M_n$ は C^{∞} - k -determinate とする。そのとき f の開折で 同じ次元で 共に k -transversal な $F, G \in M_{n+r,2}$ は 開折として C^{∞} -同値 である。

Thom の初等カタストロフィーにおいて Malgrange の予備定

理が使われるのは この補題Cにおいて、そしてここでのみである。(この節の議論については, Wassermann [9], 野口-福田 [6] の7章, を参照。補題C $\Rightarrow$ 定理A, B については, 本論 §5 をcf.)

§3 Topologically stable unfoldings

Topologically stable unfolding についても前節の定理A, B 及び 補題C に相当する定理が成立つ。さて 安定性の観点からみると、 $\mathbb{C}^n$ 級関数の範疇で考える必要はなく、多項式の範疇で考えれば充分であることを注意して、今後考える関数 及び 開折 は全て多項式で与えられるものとする。

§2 において $L^k(n)$ -orbit の果たした役割をここでは Canonical stratification が果たす。 $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ は §1 の記号で述べた実係数の n 変数の多項式環とし、 $P(n, k) = \{f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \mid \deg f \leq k\}$ とおく。 $P(n, k)$ はある次元のユークリッド空間と同視できる: $P(n, k) = \mathbb{R}^{N(k)}$ 。

次に 次の sequence を考える。

$$(*) \quad P(n, k) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\alpha} P(n, k) \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} P(n, k)$$

但し, α, π は 次式で定義されるものである:

$$\alpha(f, x) = (f, f(x)), \quad \pi(f, y) = f.$$

このとき 次の定理を得る。

定理 3.1 ([2]) $P(n, k) \times \mathbb{R}^n, P(n, k) \times \mathbb{R}$ 及び $P(n, k)$ の stratification $\mathcal{S}_1^k, \mathcal{S}_2^k, \mathcal{S}_3^k$ で次の条件をみたすものが存在する。

(i) α は Thom-map である。

(ii) π は stratified map である。

(iii) $\mathcal{S}_1^k, \mathcal{S}_2^k, \mathcal{S}_3^k$ の strates は 各々, semi-algebraic な submanifold で その数は 有限個である。

Thom-map, stratification の 概念については [2] または [5] を参照のこと。写像の系列 (※) が 条件 (i) (ii) をみたすとき, Thom の 2nd isotopy lemma が使えることを注意しておく。上の定理と 2nd isotopy lemma より 次の系を得る。

系 3.2 (f, x) と (g, y) が $\mathcal{S}_1^k$ の同じ strate に属すならば, f の x における芽と g の y における芽は C^0 -右同値である。従って $P(n, k)$ の元の位相型は 有限個しかない。

注意 3.3 1) $l \geq k > 0$ に対して 写像

$$\pi_k^l: P(n, l) \longrightarrow P(n, k)$$

を l 次の多項式に対して, それから $k+1$ 次以上の項をとりさ
ってできる k 次の多項式を対応させる写像とする。 $P(n, l)$,

$P(n, k)$ を前述の如く Euclid 空間 $\mathbb{R}^{N(l)}$, $\mathbb{R}^{N(k)}$ とみなすと,

π_k^l は $\mathbb{R}^{N(l)}$ から $\mathbb{R}^{N(k)}$ への自然な射影となる。同じ記号で自然

な射影 $\pi_k^l: P(n, l) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow P(n, k) \times \mathbb{R}^n$

をもあらわすものとする。

[2]の方法によると, $f \in P(n, k)$ の $x \in \mathbb{R}^n$ における芽が
 C^0 - k -determinate のとき, (f, x) の $P(n, k) \times \mathbb{R}^n$ における近傍 U
が存在して, $(\pi_k^l)^{-1}(U)$ の $\mathcal{S}_1^l$ による stratification は U の
 $\mathcal{S}_1^k$ による stratification に $\mathbb{R}^{N(l)-N(k)}$ を直積したものにな
っている。

2) $\Sigma_k = \{ (f, x) \in P(n, k) \times \mathbb{R}^n \mid f \text{ の } x \text{ における芽が } C^0\text{-}k\text{-determinate ではない} \}$

とおくと, 上の 1) と補題 2.3 を組み合わせると, Σ_k は
 $P(n, k) \times \mathbb{R}^n$ の closed semi-algebraic set となる。

3). E. Looyenga [3] によると 定理 3.1 の条件をみ
たすもので maximal なもの (すなわち (i) (ii) の性質をもつ他の
stratification は全て $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ の細分となっている) が存在
する。これを canonical stratification という。

組 $(f, x) \in \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n$ に対して (f, x) の属する S_k の strata を $\underline{S}_k(f, x)$ であらゆす。

定義 3.4 $f \in M_n = \{g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \mid g(0) = 0\}$ の topological codimension を次の様に定義する。

$$\text{top. codim } f = \lim_{k \rightarrow \infty} \{ \text{codim } S_k(\pi_k(f), 0) \text{ in } \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n \} - n$$

ここで $\pi_k(f) = \pi_k^l(f)$ if $\deg f = l$ である。

注意 3.3 1) より, f が k -determinate ならば,

$$\text{top. codim } f = \text{top. codim } \pi_k f = \text{codim } S_k(\pi_k(f), 0) \text{ in } \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n - n$$

となる。

以後 多項式とその芽をあまり区別しないで用いる。

定義 3.5 $F \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r]$ を $f \in M_n$ の南折とする。次の式で定義される写像 $T^k F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n$ を F の natural Taylor k -extension とする:

$$T^k F(x, u) = (\pi_k(F_u), x)$$

定義 3.6 $f \in M_n$ の南折 $F \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r]$ が

C^0 - k -横断的であるとは、 F の natural Taylor k -extension が $S_k(\pi_k f, 0)$ に横断的なときにいう。

そのとき、§2 の定理と並行した次の定理を得る。

定理 A' C^0 - k -determinate な $\text{top codim} < \infty$ の $f \in M_n$ の
開折 $F \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_r]$ に対して次の関係が成立つ：

F は C^0 - k -transversal (upto f -isomorphic) $\iff F$ は C^0 -stable
unfolding (upto f -iso) $\iff F$ は C^0 -universal unfolding.

注意 C^0 のカテゴリーでは必ずしも stable unfolding と
universal unfolding が一致しない。(Cf, §2 定理 A)

定理 B' $f \in M_n$ に対して 次の条件は同値である：

- (1) ある $k > 0$ に対して f は C^0 - k -determinate
- (2) $\text{top codim } f < \infty$
- (3) f は C^0 -stable unfolding をもつ。

以上の定理の証明は §5 で与えられる。これらの証明は
Thom の横断性定理と 次の補題 C' にもとづいている。

補題 C' (KEY lemma) $f, g \in M_n$ を C^0 - k -determinate
 で $S_k(\pi_k f, 0) = S_k(\pi_k g, 0)$ とする。そのとき f, g の
 C^0 - k -横断的 な それぞれの n -次元折 $F, G \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_k]$
 は全て折折として C^0 -同値 である。

又ここで使われる Thom の横断性定理とは 次のタイプの
 ものである。

補題 D' (Thom の横断性定理)

(1) $f \in M_n$ が $\text{top codim } f \leq k$ とする。すると f の任意
 の n -次元折折は C^0 - k -transversal なもので ϵ くらゐも近似で
 きる。

(2) $S \subset \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n$ を submanifold とする。そのとき
 $\{F \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_k] \mid T^k F \text{ は } S\text{-transversally}\}$
 は $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_k]$ の中で 稠密 である。

§4. Key lemma C' の証明.

$f, g \in M_n$, $F, G \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_k]$ を Key lemma C'
 におけるものとする。注意 3.3 (2) より, C^0 - k -determinate

という性質が open な性質なので, f, g 及 $u, F_u, G_u, u \in \mathbb{R}^2$ は全て k 次以下の多項式と仮定して一般性を失わない。

又 lemma C' は F と G が充分近いときに証明すれば充分である ([9] 又は [6] 附録 III 参照)。従って, F と G は充分近いと仮定する。そのとき

$$I = (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$$

$$F_t = (1-t)F + tG \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_r], \quad t \in I,$$

とおく。 ε が充分小で, F と G が充分近いならば, 全ての $t \in I$ に対して F_t も k -transversal である。次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times I & \xrightarrow{\iota_1} & \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n \\ \bar{\alpha} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \alpha \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times I & \xrightarrow{\iota_2} & \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^2 \times I & \xrightarrow{\iota_3} & \mathbb{P}(n, k) \end{array}$$

ここに, 右の従の sequence は §3 の最初に定義した (*) である。他の写像は 次の式で定義される。

$$\iota_1(x, u, t) = (F_t)_u, x), \quad \iota_2(y, u, t) = (F_t)_u, y)$$

$$\iota_3(u, t) = (F_t)_u$$

$$\bar{\alpha}(x, u, t) = (F_t(x, u), u, t), \quad \bar{\pi}(y, u, t) = (u, t)$$

各 F_t が k -transversal なので, i_1, i_2, i_3 はそれぞれ右側の縦の列の stratification (定理 3.1 で与えられた) $\mathcal{S}_1^k, \mathcal{S}_2^k, \mathcal{S}_3^k$ に横断図である。従って上の図式の左側の系列に $\mathcal{S}_1^k, \mathcal{S}_2^k, \mathcal{S}_3^k$ から stratification が induce できて

$$(**) \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times I \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times I \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathbb{R}^2 \times I$$

に対しても

(1) $\bar{\alpha}$ は Thom-map

(2) $\bar{\pi}$ は stratified map

となる。更に 各 F_t が k -transversal であることを考慮すると $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$ も (I 自身を strata と考えて) stratified map となり 結局

$$(**) \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times I \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times I \longrightarrow I$$

に Thom の 2nd isotopy lemma が適用できて, F と G は unfolding として同値になる。

key lemma 証明了

§5. 主定理の証明

主定理の証明 定理Bによると $\text{top.codim } f < \infty$ なる

f は ある $k > 0$ に対して C^0 - k -determinate である。定理 3.1 の考察によると, $\text{Top Orb}(f)_\ell = \{g \in P(n, \ell) \mid g \text{ と } f \text{ は } C^0\text{-右同値}\}$ は 任意の $\ell \geq k$ に対して, $P(n, \ell)$ の semi-algebraic set になる。一応明らかに

$$\text{top.codim } f \text{ (def 3.4)} \geq \underset{-n}{\text{codim Top Orb}(f)_\ell \text{ in } P(n, \ell)}$$

である。従って補題 2.3 によると, 各整数 g に対して ある 整数 $k(g)$ が ~~存在して~~ 定まると

$$\text{top.codim } f \leq g \Rightarrow \text{codim of Top Orb}(f)_\ell \text{ in } P(n, \ell) - n \leq g$$

$$\Rightarrow \text{補題 2.3 } f \text{ は } C^0\text{-}k(g)\text{-determinate}$$

となる。従って $\text{top.codim } f \leq g$ の多項式とその stable unfolding を分類するには, $P(n, k(g))$ の多項式で $\text{codim} \leq g$ のものとその stable unfolding を分類するとよい。定理 A'1 によるとそのためには $P(n, k(g))$ の多項式で $\text{codim} \leq g$ のものとその C^0 - k -transversal unfolding を分類するとよい。Key lemma C' によると $\text{codim} \leq g$ なる $P(n, k(g))$ を分類するとよい。所で定理 3.1 及び系 3.2 によるとそれは有限個である。

主定理証明了

定理B'の証明 (1) ある $k > 0$ に対して f は C^0-k -determinate
 と (2) $\text{top codim } f < \infty$ の同値性は 定義と補題2.3より明
 らか。 (1) + (2) $\Rightarrow$ (3) f は C^0 -stable unfolding^(註2) は定理A'より
 明らか

(3) $\Rightarrow$ (2) の証明 背理法を使う。 $\text{top codim } f = \infty$ とする。
 F を f の任意の n 次元開折とすると、 F が C^0 -安定開折で
 ないことを示す。 $\text{top codim } f = \infty$ となるので、ある k が存在し
 て、 $\text{codim } S_k(\pi_k f, 0) \text{ in } \mathbb{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n > n + k$
 となる。補題D'(§3の最後)より、 $S_k(\pi_k f, 0)$ に横断的な、
 (すなわち交わりぬ) $G \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_k]$ で F はいくらで
 も近似できる。このような G に対しては、 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ のどんな点
 (x, u) における G の芽をとっても F と開折として同値には
 ならない。従って F は C^0 -安定開折ではない。

定理A'の証明 C^0 -安定開折 $\iff C^0-k$ -横断開折 (up to f -iso)
 の証明

($\Rightarrow$) 補題Dより、 F を f の安定開折とすると、 F は
 k -横断的な f の開折 G で近似できる。 F は C^0 -stable であるので
 G は F と f -同型である。従って F は C^0-k -transversal (up
 to f -iso) である。

($\Leftarrow$) F を f の C^0-k -横断開折とする。そのとき、

$N(F) = \{ G \in R[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r] \mid T^k G \text{ が } S_k(\pi_k f, 0) \text{ に横断的に交わる} \}$

とあくと, $N(F)$ は F の近傍である. $\forall G \in N(F)$ に対して (x_0, u_0) を $T^k G$ が $S_k(\pi_k f, 0)$ に交わる点とすると, G の (x_0, u_0) における芽は, key lemma C' により, F と同値な芽折である。
従って F は C^0 -stable unfolding である。

C^0 - k -横断芽折 $\Rightarrow$ C^0 -普遍芽折の証明

F を f の C^0 - k -横断芽折とする。 $G \in R[x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_s]$ を他の任意の f の芽折とする。 $G^*, F^* \in R[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s]$

$$\begin{aligned} G^*(x, u, v) &= G(x, v) - f(x) + F(x, u) \\ F^*(x, u, v) &= F(x, u) \end{aligned}$$

とあくと, 次のことがなりたつ。(証明は trivial)

(1) f -芽折図射 $\Phi: G \rightarrow G^*$ が存在する。

(2) F^* と G^* は k -横断的 (⑤ F is so) なので,

f の芽折として同値

(1) f -芽折図射 $\Psi: F^* \rightarrow F$ が存在する。

従って, f -芽折図射: $G \rightarrow F$ が存在し, F は C^0 -universal unfolding となる。

以上.

文 献

- [1] V.I.Arnold: Normal formes of functions near degenerate critical points,
Weyl groups A_k, D_k, E_k and Lagrange singularities, Funct. Annal.
and its Appl. vol. 6, No4, 3-25 (1972).
- [2] T.Fukuda: Types topologiques des polynômes, to appear in Publ. Math.
I.H.E.S.
- [3] E.Looyenga: Structural stability of families of C^∞ functions and the
canonical stratification of $C^\infty(N)$, mimeographed I.H.E.S.
- [4] J.Mather: Stratifications and Mappings, in "Dynamical systems" ed. by
M.Peixoto, proceedings of Salvador symposium on dynamical systems,
Academic Press (1973).
- [5] _____: Notes on topological stability, mimeographed, Harvard Univ.
- [6] 野口広-福田拓生: 初等カタストロフィー, 共立全書, 1976 刊予定
- [7] D.Siersma: The singularities of C^∞ -functions of right-codim. ≤ 8 ,
Indag. Math. 35. No1, 31-37 (1973)
- [8] R.Thom: Local topological properties of differentiable mappings,
Colloquim on Differential Analysis, Oxford Univ. Press. (1964)
- [9] G.Wassermann: Stability of Unfoldings, Springer Lecture notes in
Math, 393, Springer-Verlag, 1974.
- [10] J.Mather: Un published notes on Right-Equivalence

訂正とお詫い, 最終日午後に話した, "関数の位相型は Thom-Boardman
Singularities で分類できる" は 誤りでした。 ・とても貴重な時間をつぶしま
して すみませんでした。