

シリーズ「超伝導・超流動研究の接点」

内部自由度を持ったボース・アインシュタイン凝縮体

— スピノル BEC におけるトポロジカル励起 —

東京大学 大学院理学系研究科 川口 由紀¹

(2010 年 12 月 24 日受理)

1 はじめに

ボース・アインシュタイン凝縮体 (Bose-Einstein condensation, BEC) とは、ボース粒子の対称性によって巨視的な数の粒子がある一粒子状態に凝縮した状態である。低温で粒子は低エネルギー状態を占有するが、ボース粒子はその統計性から互いに同じ状態を占有したが、有限温度で巨視的な数の粒子が最低エネルギー状態に凝縮する。ここで、粒子が内部自由度を持たない場合には単純に運動量がゼロの状態に粒子が凝縮するのに対し、粒子が内部自由度をもつ場合には、運動量だけでなく内部自由度についても一つの量子状態に凝縮が起こる。本稿ではこのような系である内部自由度をもった冷却原子気体の BEC を考え、どのような内部状態に凝縮が起こるのかを説明する。さらに、凝縮状態における対称性の破れやそれに起因するトポロジカル励起について解説する [1]。

冷却原子気体 BEC とは、磁場やレーザー光を用いて真空中に浮かせた約 100 万個の原子集団がボース凝縮を起こしたもので、温度が数 100 nK、密度が空気よりも 5 桁も希薄という超低温・超低密度の気体である [2, 3, 4]。従来の超伝導・超流動に比べ、相互作用の強さを始めとした様々なパラメータを何桁も変化させることができ、かつ精密に制御・観測ができるという特徴をもつ。特にレーザー光を利用した光トラップを用いると、スピン内部自由度にかかわらず原子を捕獲することができ、スピノル BEC と呼ばれる内部自由度をもった BEC が実現する [5, 6, 7, 8, 9]。これと対比させて、単一のスピン状態からなり内部自由度をもたない BEC はスカラー BEC と呼ばれる。

原子気体 BEC は、同じボース粒子系である超流動 ^4He と比較されることが多いが、スピノル BEC は内部自由度を持つという点で超流動 ^3He や異方的超伝導と類似性があり、実際に p 波や d 波のクーパー対と同じ対称性をもった状態が基底状態で実現する。このように内部自由度を持った系に共通する特徴として、渦、モノポール、スカーミオンといった様々なトポロジカル励起が存在するという点が挙げられる [10, 11, 12]。トポロジカル励起とは、連続変形で一様にできないような秩序変数の空間構造を指す。例えば超流動 ^4He における量子渦は、秩序変数の位相が渦糸のまわりに 2π 変化し、凝縮体密度を有限に保ったままでは位相の空間変化を消すことができない。こ

¹E-mail: yuki@cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp

のため量子渦は突然消えたり現れたりすることはない．超流動 ^4He のように内部自由度を持たない系では凝縮体の位相が空間変化するだけであるが，内部自由度を持った系では内部自由度が空間変化することで様々なトポロジカルに安定な構造をつくることができる．特に，スピノル BEC では磁場やレーザー光を用いて局所的に内部自由度を制御・観測することが可能で [13, 14]，このようなトポロジカル励起の研究には理想的な系となっている．

以下では，まず第2節でスピノル BEC の一般的な性質を紹介し，第3節で平均場近似について説明する．第4節以降は，様々なトポロジカル励起の存在しうるゼロ磁場下の凝縮体に限定して話をすすめる．第4節ではスピン 1, 2 の BEC の基底状態とその対称性の破れについて説明し，第5節でこれらの基底状態におけるトポロジカル励起について具体的な構造を紹介しつつ解説する．

2 ハミルトニアン

2.1 1 原子ハミルトニアン

まず原子の内部自由度について知るために，1 原子ハミルトニアンを考えよう．原子は電子のスピン角運動量 $\mathbf{S}$ ，電子の軌道角運動量 $\mathbf{L}$ ，核スピン $\mathbf{I}$ の内部自由度を持ち，これらの間にスピン軌道結合，および超微細結合の相互作用が働く．ここでは基底状態のアルカリ原子を考え， $S = 1/2$ ， $L = 0$ とする．一様磁場 $\mathbf{B}$ 中における 1 原子ハミルトニアンは次式で与えられる．

$$H_{\text{sp}} = A\mathbf{S} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot (g_e\mu_B\mathbf{S} - g_N\mu_N\mathbf{I}). \quad (1)$$

ここで， A は超微細結合エネルギー， μ_B はボーア磁子， μ_N は核磁子で， g_e, g_N はそれぞれ電子スピン，核スピンに対する g 因子である．アルカリの原子の超微細結合エネルギーは $A \gtrsim k_B \times 100 \text{ mK} \sim \mu_B \times 0.1 \text{ T}$ である．スピノル BEC はこれより十分低温，低磁場で実現し，ハイパーファインスピン $\mathbf{F} = \mathbf{S} + \mathbf{I}$ とその z 成分 F_z がよい量子数となっている． $S = 1/2$ なので原子は $F = I \pm 1/2$ の 2 つの状態を取りうるが，BEC の温度が超微細結合エネルギーよりも十分低温であることから下の準位から上の準位への励起は無視でき，逆に上の準位から下の準位へ遷移した原子は高い運動エネルギーを得て熱源子となり凝縮体から抜け出す．したがって， $F = I \pm 1/2$ のうち一方の状態の原子のみがボース凝縮しているとみなしてよい．本稿で扱う ^{23}Na 原子や ^{87}Rb 原子では核スピンの $I = 3/2$ で，これらの系では $F = 1$ および 2 の BEC が実現されている [7, 8, 9, 15, 16, 17]．

以下では原子のハイパーファインスピンが F の状態に限定して考える．原子の取りうる状態は磁気副準位 $m_F = -F, -F+1, \dots, F$ の $2F+1$ 個で，ゼロ磁場下ではこれらは全て縮退している．外部磁場が十分弱い場合 ($\mu_B B \ll A$) には，1 原子ハミルトニアン (1) の固有エネルギーを $\mu_B B/A$ の 2 次まで展開することで，ゼーマン効果を次のように書くことができる (付録 A 参照)．

$$H_{\text{Ze}} = g_F\mu_B\mathbf{B} \cdot \mathbf{F} \mp \frac{(g_F\mu_B\mathbf{B} \cdot \mathbf{F})^2}{\Delta E_{\text{hf}}}. \quad (2)$$

ここで， $g_F \equiv \pm g_e/(2I+1)$ はハイパーファインスピンに対するランダウの g 因子で，復号は $F = I \pm 1/2$ に対応している．また $\Delta E_{\text{hf}} = (I + 1/2)A$ を超微細分裂エネルギー，すなわち $B = 0$ で

の $F = I \pm 1/2$ の間のエネルギー差とおいた。(2) の右辺第1項を1次ゼーマン効果、第2項を2次ゼーマン効果と呼ぶ。2次ゼーマンエネルギーは1次ゼーマンエネルギーの千分の一以下であるが、スピノル BEC では無視することができない。なぜなら、原子気体 BEC が真空中に浮いた孤立した状態であり、スピンの保存されるためである。凝縮体全体の縦磁化が保存していると、1次ゼーマン項はエネルギーのゼロ点を変えるだけである。ダイナミクスを考える場合でも、1次ゼーマン項の効果はスピンの歳差運動を起こすだけなのでスピン回転系で考えることで1次ゼーマンの効果を取り除くことができる。従って、磁場の効果の最低次は2次となる。

以上より、原子の運動項およびトラップポテンシャルも含めてまとめると、ハイパーファインスピン F の原子の1原子ハミルトニアンは第二量子化の記法で

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{sp}} = \int d\mathbf{r} \sum_m \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + pm + qm^2 \right] \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) \quad (3)$$

と書ける。ここで $\hat{\psi}_m(\mathbf{r})$ は磁気副準位 m の状態に対する場の演算子、 M は原子の質量、 $U_{\text{trap}}(\mathbf{r})$ は光トラップのポテンシャルである。また、磁場の方向を量子化軸 z とし、 $p = g_F \mu_B B$, $q = \pm (g_F \mu_B B)^2 / \Delta E_{\text{hf}}$ とおいた (復号は $F = I \pm 1/2$ に対応)。ただし、 q の値については z 方向に直線偏光したマイクロ波を照射することで調節することが可能で [18]、一般には p, q は独立に操作できる外部パラメータとみなしてよい。

2.2 原子間相互作用：短距離力

原子間相互作用の主要な寄与は、ハードコア斥力とファンデアワールス引力で、遠方では原子間距離の -6 乗で減衰する等方的な力である。ボース凝縮を起こすような超低温では低エネルギー散乱となるため、このようなポテンシャル下での散乱は s 波の散乱振幅で散乱を特徴付けることができる [19]。したがって、具体的な散乱ポテンシャルの代わりに $(4\pi\hbar^2 a/M)\delta(r)$ という δ 関数に置き換えても $r \rightarrow \infty$ での2原子の相対波動関数と散乱振幅を再現することができる。ここで a は s 波散乱長、 r は原子間距離である。このように δ 関数で近似できる相互作用を短距離力と呼ぶ。これに対して、次節で述べる双極子-双極子相互作用は原子間距離の $1/r^3$ に比例し、 s 波散乱長で記述することができないため、長距離力とよばれる。

さて、原子がスピン内部自由度を持つ場合には、相互作用ポテンシャルはスピン状態に依存し、スピン依存した s 波散乱長により記述される。相互作用のスピン依存性の起源は最外殻電子の交換相互作用である。電子の反対称性のために2つの原子の最外殻電子のスピンが反対称であれば引力ポテンシャルが深く、スピンの対称であれば浅くなる。このような相互作用ポテンシャルはスピン空間で回転不変、つまり散乱する2原子の合成ハイパーファインスピン $\mathcal{F}$ を保存するので、 $\mathcal{F}$ ごとに s 波散乱長 $a_{\mathcal{F}}$ が定義できて、次のようなポテンシャルで相互作用を記述することができる [5, 6]。

$$V_{\text{short}}(r) = \delta(r) \sum_{\mathcal{F}=0, \text{even}}^{2F} \frac{4\pi\hbar^2}{M} a_{\mathcal{F}} \mathcal{P}_{\mathcal{F}}. \quad (4)$$

ここで $\mathcal{P}_{\mathcal{F}} = \sum_{\mathcal{M}=-\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} |\mathcal{F}, \mathcal{M}\rangle \langle \mathcal{F}, \mathcal{M}|$ は 2 原子の合成ハイパーファインスピンを $\mathcal{F}$ に射影する演算子である。また、ボース粒子の対称性から、 s 波散乱では散乱する 2 原子のスピンの入れ替えに対して対称でなくてはならないので、 $\mathcal{F}$ が奇数になるような散乱チャンネルは存在しない。これより、ハミルトニアン of 短距離相互作用部分を第二量子化の記法で書くと次のようになる。

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{short}} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{mn m' n'} v_{nn'}^{mm'} \hat{\psi}_m^{mm'}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{m'}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{n'}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}), \quad (5a)$$

$$v_{nn'}^{mm'} \equiv \sum_{\mathcal{F}=0, \text{even}}^{2F} \frac{4\pi\hbar^2}{M} a_{\mathcal{F}} \langle Fm; Fm' | \mathcal{P}_{\mathcal{F}} | Fn'; Fn \rangle. \quad (5b)$$

次に、具体的に $F = 1, 2$ の場合について (5) 式を直感的にわかりやすい物理量を用いて書き換えよう。まず、射影演算子の完全性から $1 = \sum_{\mathcal{F}=0, \text{even}}^{2F} \mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ すなわち、

$$\delta_{mn} \delta_{m' n'} = \sum_{\mathcal{F}=0, \text{even}}^{2F} \langle Fm; Fm' | \mathcal{P}_{\mathcal{F}} | Fn'; Fn \rangle \quad (6)$$

が導かれる。また、スピン演算子の関係式

$$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 = \frac{1}{2} [(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)^2 - \mathbf{F}_1^2 - \mathbf{F}_2^2] \quad (7)$$

を $\langle Fm; Fm' |$ と $|Fn'; Fn \rangle$ で挟むと、

$$(\mathbf{F})_{mn} \cdot (\mathbf{F})_{m' n'} = \sum_{\mathcal{F}=0, \text{even}}^{2F} \frac{\mathcal{F}(\mathcal{F}+1) - 2F(F+1)}{2} \langle Fm; Fm' | \mathcal{P}_{\mathcal{F}} | Fn'; Fn \rangle \quad (8)$$

が得られる。ここで

$$(\mathbf{F})_{mn} \equiv \langle Fm | \mathbf{F} | Fn \rangle \quad (9)$$

はスピン演算子 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ の行列表示である (具体的な行列要素については付録 B 参照)。これらを用いると、 $F = 1, 2$ の場合のポテンシャルはそれぞれ次のように書き直すことができる。

$$\text{spin-1: } v_{m' n'}^{mn} = c_0 \delta_{mn} \delta_{m' n'} + c_1 (\mathbf{F})_{mn} \cdot (\mathbf{F})_{m' n'}, \quad (10a)$$

$$c_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \frac{2a_2 + a_0}{3}, \quad c_1 = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \frac{a_2 - a_0}{3}, \quad (10b)$$

$$\text{spin-2: } v_{m' n'}^{mn} = c_0 \delta_{mn} \delta_{m' n'} + c_1 (\mathbf{F})_{mn} \cdot (\mathbf{F})_{m' n'} + c_2 \langle Fm; Fm' | \mathcal{P}_0 | Fn'; Fn \rangle, \quad (11a)$$

$$c_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \frac{3a_4 + 4a_2}{7}, \quad c_1 = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \frac{a_4 - a_2}{7}, \quad c_2 = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \frac{3(a_4 - a_2) - 7(a_2 - a_0)}{7}. \quad (11b)$$

(10a) 式を (5) 式に代入すると、相互作用ハミルトニアンは

$$\text{spin-1: } \hat{\mathcal{H}}_{\text{short}} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} : [c_0 \hat{n}_{\text{tot}}^2(\mathbf{r}) + c_1 \hat{\mathbf{F}}^2(\mathbf{r})] : \quad (12)$$

と書き直せる．ここで， $::$ はノーマルオーダーを表し，粒子数密度演算子 $\hat{n}_{\text{tot}}(\mathbf{r})$ ，スピン密度演算子 $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r})$ を

$$\hat{n}_{\text{tot}}(\mathbf{r}) \equiv \sum_m \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \equiv \sum_{mn} (\mathbf{F})_{mn} \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}) \quad (14)$$

と定義した．これより c_0 の項は密度-密度相互作用， c_1 の項はスピン交換相互作用になっていることがわかる．

スピン 2 の場合は， $\langle Fm, Fm' | \mathcal{F}, \mathcal{M} \rangle$ をクレブシュ・ゴルダン係数として

$$\hat{A}_{00}(\mathbf{r}) \equiv \sum_{mn} \langle 0, 0 | 2m; 2n \rangle \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{5}} [2\hat{\psi}_2(\mathbf{r})\hat{\psi}_{-2}(\mathbf{r}) - 2\hat{\psi}_1(\mathbf{r})\hat{\psi}_{-1}(\mathbf{r}) + \hat{\psi}_0^2(\mathbf{r})] \quad (15)$$

を定義すると，

$$\text{spin-2: } \hat{\mathcal{H}}_{\text{short}} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} : \left[c_0 \hat{n}_{\text{tot}}^2(\mathbf{r}) + c_1 \hat{\mathbf{F}}^2(\mathbf{r}) + c_2 \hat{A}_{00}^2(\mathbf{r}) \right] : \quad (16)$$

と表すことができる． $\hat{A}_{00}(\mathbf{r})$ は 2 体の合成スピンのゼロ (スピン一重項) となるペアの消滅演算子となっている．

2.3 原子間相互作用：長距離力

短距離力に加えて，原子間には双極子相互作用が働く．これは原子の持つ磁気モーメント間に働く電磁気学的な力であり，次式で与えられる．

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{dd}} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 (g_F \mu_B)^2}{4\pi} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' : \frac{\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{3[(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r})][(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} : \quad (17)$$

$$= \frac{c_{\text{dd}}}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_{\mu, \nu = x, y, z} Q_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') : \hat{F}_\mu(\mathbf{r}) \hat{F}_\nu(\mathbf{r}') : \quad (18)$$

ここで， μ_0 は真空の透磁率で $c_{\text{dd}} \equiv \mu_0 (g_F \mu_B)^2 / (4\pi)$ とおいた．また， $Q_{\mu\nu}(\mathbf{r})$ は $r = |\mathbf{r}|$ ， $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ として

$$Q_{\mu\nu}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\delta_{\mu\nu} - 3\hat{r}_\mu \hat{r}_\nu}{r^3} \quad (19)$$

と定義した．これは d 波の対称性を持った相互作用で，実際に 2 階の球面調和関数 $Y_2^m(\hat{\mathbf{r}})$ を用いて

$$Q_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} Y_2^0(\hat{\mathbf{r}}) - Y_2^2(\hat{\mathbf{r}}) - Y_2^{-2}(\hat{\mathbf{r}}) & iY_2^2(\hat{\mathbf{r}}) - iY_2^{-2}(\hat{\mathbf{r}}) & Y_2^1(\hat{\mathbf{r}}) - Y_2^{-1}(\hat{\mathbf{r}}) \\ iY_2^2(\hat{\mathbf{r}}) - iY_2^{-2}(\hat{\mathbf{r}}) & \sqrt{\frac{2}{3}} Y_2^0(\hat{\mathbf{r}}) + Y_2^2(\hat{\mathbf{r}}) + Y_2^{-2}(\hat{\mathbf{r}}) & -iY_2^1(\hat{\mathbf{r}}) - iY_2^{-1}(\hat{\mathbf{r}}) \\ Y_2^1(\hat{\mathbf{r}}) - Y_2^{-1}(\hat{\mathbf{r}}) & -iY_2^2(\hat{\mathbf{r}}) - iY_2^{-2}(\hat{\mathbf{r}}) & -2\sqrt{\frac{2}{3}} Y_2^0(\hat{\mathbf{r}}) \end{pmatrix} \quad (20)$$

と書き直すことができる。

双極子相互作用の特徴は、異方的な長距離力であるという点である。散乱ポテンシャルが遠方で $1/r^n$ という振る舞いをするとき、 $n > 3$ では低エネルギー極限で s 波の部分波以外は散乱振幅がゼロになるのに対し、 $n = 3$ では全ての部分波で散乱振幅が対数発散するため短距離力のような単純なポテンシャルに置き換えることができない [19]。このため短距離力と分けて取り扱う必要がある。さらに、相互作用が d 波の対称性をもっていることから軌道角運動量が ± 2 だけ異なる部分波の間に結合が起こり、例えば s 波で入射した部分波は s 波と d 波の重ねあわせとなって出ていく [20]。このような性質から、双極子相互作用が支配的な BEC は新しい凝縮体として注目を集めている [21, 22]。

特に、スピン自由度に着目すると、双極子相互作用には散乱する 2 原子のスピンと軌道の角運動量を結合させる役割がある。(17) 式に $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{F}$ という内積が含まれるために $\mathcal{H}_{\text{dd}}$ はスピンのみ、または軌道 (実空間) のみの回転では不変に保たれず、これらを同時に回転させて始めて不変に保たれる。したがって、スピンおよび軌道角運動量は独立には保存されず、これらの合成角運動量のみが保存される。短距離相互作用はスピンを保存するが、双極子相互作用が効く場合には孤立系であってもスピンが保存されず、例えば低磁場中にスピン偏極した BEC を用意すると、双極子相互作用のためにスピン緩和が起こり自発的に回転を始めるという Einstein-de Haas 効果が予言されている [23, 24]。ただし、アルカリ原子の双極子相互作用は非常に小さく、通常の実験状況下ではスピンはほぼ保存される。

2.4 エネルギーの階層構造

以上をまとめると、 $F = 1, 2$ のスピノル BEC のハミルトニアンは次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & \int d\mathbf{r} \sum_m \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + pm + qm^2 \right] \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) \\ & + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} : \left[c_0 \hat{n}_{\text{tot}}^2(\mathbf{r}) + c_1 \hat{\mathbf{F}}^2(\mathbf{r}) + c_2 \hat{A}_{00}^2(\mathbf{r}) \right] : \\ & + \frac{c_{\text{dd}}}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_{\mu, \nu=x, y, z} : Q_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{F}_\mu(\mathbf{r}) \hat{F}_\nu(\mathbf{r}') : \end{aligned} \quad (21)$$

ただし $F = 1$ に対しては $c_2 = 0$ とおいた。

^{87}Rb と ^{23}Na 原子の場合について、特徴的な相互作用エネルギーの値を表 1 にまとめた。(21) 式のハミルトニアンは多くの項から成り非常に複雑であるが、表 1 からわかるように、各項のエネルギースケールが大きく異なるため、様々な近似が有効となる。まずすでに述べたように、 ΔE_{hf} が温度や他のエネルギーよりも十分大きいため、異なるハイパーファイン間の相互作用は無視し、一つの F に限定することができる。次に支配的なのは 1 次ゼーマンエネルギーであるが、凝縮体の磁化が保存されるためこれはラーモア歳差運動を引き起こすだけである。一方、短距離相互作用については、スピン依存する相互作用の係数 $|c_1|, |c_2|$ が密度-密度相関の係数 c_0 に比べて十分小さいので、スピン状態に関係なく粒子の密度分布やフォノンのエネルギーが決まる。逆に、ス

ピンの内部自由度については、局所的な n_{tot} に対して c_1, c_2 および q の 3 つの項の和を最小化するようスピンの内部構造が決まる。これについては第 4 節で詳しく説明する。双極子相互作用は最も弱いため、密度分布やスピンの内部構造を変えるほどの効果はないが、異方的長距離力であることからスピンの内部構造の空間変化を生むことがわかっている [25, 26, 27, 28]。

atom	F	ΔE_{hf}	$ p $	$ q $	$c_0 n_{\text{tot}}$	$c_1 n_{\text{tot}}$	$c_2 n_{\text{tot}}$	$c_{\text{dd}} n_{\text{tot}}$
^{87}Rb	1	6.84×10^9	7.00×10^4	3.01	1.56×10^3	-5.58	—	0.65
	2				1.54×10^3	15.3	8	
^{23}Na	1	1.77×10^9	7.00×10^4	11.1	3.12×10^3	99.3	—	0.65
	2				3.14×10^3	156	-169	

表 1: ^{87}Rb 原子, ^{23}Na 原子における特徴的な相互作用エネルギーの比較。単位は Hz。 p, q については外部磁場 $B = 200$ mG 下での値を記した。原子間相互作用エネルギーは粒子数密度を $n_{\text{tot}} = 2 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ として評価した。 s 波散乱長は ^{87}Rb については文献 [29, 30], ^{87}Na については文献 [31, 32] のデータを用いた。BEC の温度を 100 nK として周波数に換算すると $k_{\text{B}}T/h \simeq 2 \times 10^3$ Hz で $c_0 n_{\text{tot}}$ と同程度になっている。

3 平均場近似

原子気体 BEC は非常に希薄であるために、平均場近似により実験がよく記述できる。この節では、平均場近似のもとでの BEC を記述する方程式 (Gross-Pitaevskii 方程式) を導出する。

場の演算子 $\hat{\psi}_m$ を、ある直交関数 $\varphi_{mi}(\mathbf{r})$ とそれに対応する消滅演算子 $\hat{a}_{mi}$ を用いて

$$\hat{\psi}_m(\mathbf{r}) = \sum_i \hat{a}_{mi} \varphi_{mi}(\mathbf{r}) \quad (22)$$

と展開する。ここで、 $\hat{a}_{mi}$ は交換関係

$$[\hat{a}_{mi}, \hat{a}_{nj}^\dagger] = \delta_{mn} \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_{mi}, \hat{a}_{nj}] = [\hat{a}_{mi}^\dagger, \hat{a}_{nj}^\dagger] = 0, \quad (23)$$

を満たすとし、 $\varphi_{mi}(\mathbf{r})$ は直交性および完全性から以下の式を満たすとする。

$$\int d\mathbf{r} \varphi_{mi}^*(\mathbf{r}) \varphi_{mj}(\mathbf{r}) = \delta_{ij}, \quad (24a)$$

$$\sum_i \varphi_{mi}^*(\mathbf{r}) \varphi_{mi}(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (24b)$$

平均場近似では、全ての粒子が同じ一粒子状態 ($i = 0$) に凝縮していると仮定する。スピン状態に関しては重ね合わせ状態になるとして次のような N 粒子状態を考える。

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\sum_m \zeta_m \hat{a}_{m0}^\dagger \right)^N |\text{vac}\rangle. \quad (25)$$

ここで、 $|\text{vac}\rangle$ は粒子の真空であり、 ζ_m は $\sum_m |\zeta_m|^2 = 1$ に規格化されたスピノルである。この状態 $|\Psi\rangle$ での場の演算子の期待値は、巨視的波動関数 (秩序変数) を

$$\psi_m(\mathbf{r}) = \sqrt{N} \zeta_m \varphi_{m0}(\mathbf{r}) \quad (26)$$

として以下のように計算できる。

$$\langle \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) \rangle = \langle \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \rangle = 0, \quad (27a)$$

$$\langle \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}') \rangle = \psi_m^*(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}'), \quad (27b)$$

$$\langle \hat{\psi}_k^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_l^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}_m(\mathbf{r}'') \hat{\psi}_n(\mathbf{r}''') \rangle = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \psi_k^*(\mathbf{r}) \psi_l^*(\mathbf{r}') \psi_m(\mathbf{r}'') \psi_n(\mathbf{r}'''). \quad (27c)$$

これを用いて状態 $|\Psi\rangle$ でのハミルトニアン $\mathcal{H}$ の期待値を取ると、 $N \gg 1$ で

$$\begin{aligned} E[\psi] &\equiv \langle \mathcal{H} \rangle \\ &= \int d\mathbf{r} \sum_m \psi_m^*(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + pm + qm^2 \right] \psi_m(\mathbf{r}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{mnm'n'} v_{nn'}^{mm'} \psi_m^*(\mathbf{r}) \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi_{n'}(\mathbf{r}) \psi_{m'}(\mathbf{r}) \\ &\quad + \frac{c_{\text{dd}}}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_{mnm'n'} \sum_{\mu,\nu} Q_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (F_\mu)_{mm'} (F_\nu)_{nn'} \psi_m^*(\mathbf{r}) \psi_n^*(\mathbf{r}') \psi_{n'}(\mathbf{r}') \psi_{m'}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (28)$$

となる。これが BEC の平均場エネルギーである。これはハミルトニアン中の場の演算子 $\hat{\psi}_m(\mathbf{r})$ をスカラー量 $\psi_m(\mathbf{r})$ に置き換えたものに一致する。基底状態の波動関数を求める場合には、粒子数保存を考慮するために粒子数演算子 $\hat{N} \equiv \int d\mathbf{r} \sum_m \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) \hat{\psi}_m(\mathbf{r})$ に対するラグランジュ未定定数として化学ポテンシャル μ を導入し、

$$\frac{\delta \langle \hat{\mathcal{H}} - \mu \hat{N} \rangle}{\delta \psi_m^*(\mathbf{r})} = 0 \quad (29)$$

により決定される。すなわち、

$$\begin{aligned} \mu \psi_m(\mathbf{r}) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + pm + qm^2 \right] \psi_m(\mathbf{r}) \\ &\quad + \sum_{nm'n'} v_{nn'}^{mn} \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi_{n'}(\mathbf{r}) \psi_{m'}(\mathbf{r}) \\ &\quad + c_{\text{dd}} \int d\mathbf{r}' \sum_{nm'n'} \sum_{\mu,\nu} Q_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (F_\mu)_{mm'} (F_\nu)_{nn'} \psi_n^*(\mathbf{r}') \psi_{n'}(\mathbf{r}') \psi_{m'}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (30)$$

また、 $E[\Psi]$ の汎関数微分から系のダイナミクスを与える方程式が得られる。

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_m(\mathbf{r})}{\partial t} &= \frac{\delta E[\Psi]}{\delta \psi_m^*(\mathbf{r})} \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + pm + qm^2 \right] \psi_m(\mathbf{r}) \\ &\quad + \sum_{nm'n'} v_{nn'}^{mn} \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi_{n'}(\mathbf{r}) \psi_{m'}(\mathbf{r}) \\ &\quad + c_{\text{dd}} \int d\mathbf{r}' \sum_{nm'n'} \sum_{\mu,\nu} Q_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (F_\mu)_{mm'} (F_\nu)_{nn'} \psi_n^*(\mathbf{r}') \psi_{n'}(\mathbf{r}') \psi_{m'}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (31)$$

(30) 式を Gross-Pitaevskii (GP) 方程式, (31) 式を時間依存する GP 方程式と呼ぶ².

4 基底状態における対称性の破れ

前節までで基本的な道具立てがそろったので, 本節ではこれらを用いて $F = 1, 2$ のスピノル BEC の基底状態について調べる. ここではスピン依存する短距離相互作用に着目し, トラップポテンシャルを無視して粒子数密度が一定の一樣系における基底状態を求める. 粒子数密度の空間変化が十分緩やかであれば, これは良い近似となる. また, ここでは第5節で述べるトポロジカル励起に興味があるため, 理想的に外部磁場ゼロ ($p = q = 0$) を考える. ゼロ磁場下では, 系の対称性が高いため様々なトポロジカル励起が存在しうる. 双極子相互作用はエネルギーが小さくスピンの内部構造を変えることがないのでここでは無視する.

4.1 基底状態

4.1.1 スピン 1

双極子相互作用とトラップポテンシャルを無視すれば, 基底状態の秩序変数は明らかに空間変化しない. そこで, 粒子数密度を $n_{\text{tot}} = \sum_m |\psi_m|^2$ とし秩序変数を $\psi_m = \sqrt{n_{\text{tot}}} \zeta_m$ とおく. ζ_m はノルムが 1 に規格化された 3 成分スピノルである. 基底状態は一粒子あたりのエネルギー密度

$$\epsilon[\zeta] \equiv \frac{E[\psi]}{V n_{\text{tot}}} = \frac{c_0}{2} n_{\text{tot}} + \frac{c_1}{2} n_{\text{tot}} |\mathbf{f}|^2 \quad (32)$$

を最小にする ζ により与えられる. ここで,

$$\mathbf{f} = \sum_{mn} \zeta_m^* \mathbf{F}_{mn} \zeta_n \quad (33)$$

は一粒子あたりのスピン期待値である. n_{tot} が一定なので, 基底状態は $c_1 > 0$ の時 $\mathbf{f} = 0$, $c_1 < 0$ の時 $|\mathbf{f}| = 1$ となることがわかる. これらを満たす秩序変数の具体的な形を求めると次のようになる [5, 6].

[I] $c_1 < 0$: 強磁性相

$|\mathbf{f}| = 1$ より, 全ての原子が同じ方向に偏極した状態が基底状態となる. この偏極方向を z 方向にすれば, 秩序変数は $\zeta = (1, 0, 0)^T$ となる. 偏極方向および秩序変数の位相は任意にとることができるため, 一般的な秩序変数として $(1, 0, 0)^T$ にオイラー回転と位相変換を作用させて

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_0 \\ \zeta_{-1} \end{pmatrix} = e^{i\phi} e^{-iF_z \alpha} e^{-iF_y \beta} e^{-iF_z \gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i(\phi - \gamma)} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha \cos^2 \frac{\beta}{2}} \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \\ e^{i\alpha \sin^2 \frac{\beta}{2}} \end{pmatrix} \quad (34)$$

²双極子相互作用のような長距離相互作用の入った場合は, 非局所 GP 方程式と呼んで区別する場合もある.

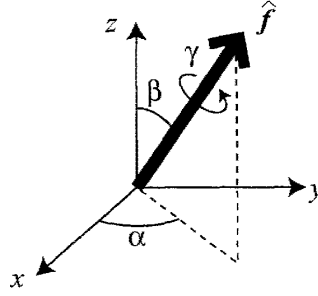


図 1: スピン回転のオイラー角.

と書ける. ここで, α, β, γ は図 1 に示すオイラー角を表し, $e^{-iF_z\alpha}$ 等はスピン回転の演算子である (具体的な表式は付録 B 参照). この状態に対してスピン期待値を計算すれば, $\mathbf{f} = (\sin \beta \cos \alpha, \sin \beta \sin \alpha, \cos \beta)$ となっていることが確認できる.

また, スピンの 2 乗期待値を用いてネマティックテンソルを

$$\mathcal{N}_{\mu\nu} = \sum_{mn} \zeta_m^* \left[\frac{F_\mu F_\nu - F_\nu F_\mu}{2} \right]_{mn} \zeta_n, \quad \mu, \nu = x, y, z \quad (35)$$

と定義すると, 強磁性相に対しては常に

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

と対角化でき, 固有値 1 に対する固有ベクトルが $\mathbf{f}$ となる. このことから, 秩序変数は磁化が生じる方向に一軸異方性をもっていることがわかる.

[II] $c_1 > 0$: ポーラー相

まず, $\sum_m |\zeta_m|^2 = 1$ と $f_z = |\zeta_1|^2 - |\zeta_{-1}|^2 = 0$ より, 秩序変数を

$$\zeta \equiv \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_0 \\ \zeta_{-1} \end{pmatrix} = e^{i\phi} \begin{pmatrix} \frac{e^{i\chi_1}}{\sqrt{2}} \sin \beta \\ \cos \beta \\ \frac{e^{i\chi_{-1}}}{\sqrt{2}} \sin \beta \end{pmatrix} \quad (37)$$

とおくことができる. さらに, $f_+ = f_x + if_y = 0$ より,

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(\zeta_1^* \zeta_0 + \zeta_0^* \zeta_{-1}) &= \sin \beta \cos \beta (e^{-i\chi_1} + e^{i\chi_{-1}}) = 0 \\ \implies \beta &= 0, \pi/2 \quad \text{or} \quad \chi_1 + \chi_{-1} = (2n+1)\pi. \end{aligned}$$

よって, $\chi_{-1} = \alpha, \chi_1 = -\alpha + \pi$ とおきなおすと, 一般解は

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_0 \\ \zeta_{-1} \end{pmatrix} = e^{i\phi} \begin{pmatrix} -e^{-i\alpha} \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \\ \cos \beta \\ e^{i\alpha} \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = e^{i\phi} e^{-iF_z\alpha} e^{-iF_y\beta} e^{-iF_z\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

と書くことができる．(38)式の最右辺から，ポーラー相の一般解は， $(0, 1, 0)^T$ という状態にオイラー回転とゲージ変換を作用させたものであることがわかる．

ポーラー相ではスピン期待値がゼロであるが，スピン空間で等方なわけではない．実際に， $\zeta = (0, 1, 0)^T$ に対してネマティックテンソルを計算すると

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

となり，一軸異方性をもっていることがわかる．(38)式で与えられるポーラー相の一般的な秩序変数に対しても，ネマティックテンソルは対角化すると(39)式と一致し，固有値0の固有ベクトルが $\mathbf{d} = (\sin \beta \cos \alpha, \sin \beta \sin \alpha, \cos \beta)$ になっている． $\mathbf{d}$ が異方軸の方向を表している．

表1より， ^{87}Rb は $c_1 < 0$ で強磁性相， ^{23}Na は $c_1 > 0$ でポーラー相である．これらの基底状態は p 波の超流動である超流動 ^3He と類似した構造になっている． ^3He クーパー対のもつ内部自由度は軌道角運動量 $L = 1$ ，スピン角運動量 $S = 1$ で，A相では $m_L = 1, m_S = 0$ の状態に凝縮が起こる．スピン $F = 1$ のスピノル BEC では強磁性相は $m_F = 1$ ，ポーラー相は $m_F = 0$ に凝縮が起こるので，これらの秩序変数は ^3He A相の秩序変数に対して，それぞれスピンおよび軌道の自由度を無視したものと一致している．

4.1.2 スピン2

スピン2のBECの一粒子エネルギーは次のようになる．

$$\epsilon[\zeta] = \frac{c_0}{2} n_{\text{tot}} + \frac{c_1}{2} n_{\text{tot}} |\mathbf{f}|^2 + \frac{c_2}{2} n_{\text{tot}} |a_{00}|^2 \quad (40)$$

ここで， $\mathbf{f}$ は(33)式で和を $m, n = -2, \dots, 2$ にしたものであり，

$$a_{00} = \sum_{mn} \langle 0, 0 | 2m; 2n \rangle \zeta_m \zeta_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\zeta_2 \zeta_{-2} - 2\zeta_1 \zeta_{-1} + \zeta_0^2) \quad (41)$$

と定義した．スピン1の場合と同様に考えると， $c_1 > 0$ では $\mathbf{f} = 0$ ， $c_1 < 0$ では $|\mathbf{f}| = 2$ の状態が好まれ， $c_2 > 0$ では $a_{00} = 0$ ， $c_2 < 0$ では $|a_{00}|$ が最大の状態が好まれる．しかし $|\mathbf{f}|$ と a_{00} は独立には決められないため，以下では具体的に GP 方程式を解くことで基底状態を求めることにする．GP 方程式はエネルギーの変分がゼロという式なので，得られた定常解の中から一粒子エネルギーを最小にするものが基底状態である．

今はゼロ磁場下での基底状態を考えているので，ここでは自発磁化の方向を z 方向にしても一般

性は失われない．そこで， $f_x = f_y = 0, f_z \geq 0$ において GP 方程式を書き下すと次のようになる．

$$(\mu - c_0 n_{\text{tot}}) \zeta_0 - c_2 n_{\text{tot}} \frac{a_{00}}{\sqrt{5}} \zeta_0^* = 0, \quad (42a)$$

$$(\mu - c_0 n_{\text{tot}} - c_1 n_{\text{tot}} f_z) \zeta_1 + c_2 n_{\text{tot}} \frac{a_{00}}{\sqrt{5}} \zeta_{-1}^* = 0, \quad (42b)$$

$$(\mu - c_0 n_{\text{tot}} + c_1 n_{\text{tot}} f_z) \zeta_{-1}^* + c_2 n_{\text{tot}} \frac{a_{00}^*}{\sqrt{5}} \zeta_1 = 0, \quad (42c)$$

$$(\mu - c_0 n_{\text{tot}} - 2c_1 n_{\text{tot}} f_z) \zeta_2 - c_2 n_{\text{tot}} \frac{a_{00}}{\sqrt{5}} \zeta_{-2}^* = 0, \quad (42d)$$

$$(\mu - c_0 n_{\text{tot}} + 2c_1 n_{\text{tot}} f_z) \zeta_{-2}^* - c_2 n_{\text{tot}} \frac{a_{00}^*}{\sqrt{5}} \zeta_2 = 0. \quad (42e)$$

(42a) 式より，

$$(0-i) \mu = c_0 n_{\text{tot}} \pm \frac{c_2 n_{\text{tot}} |a_{00}|}{5} \quad \text{または} \quad (0-ii) \zeta_0 = 0$$

(42b),(42c) 式より，

$$(1-i) \mu = c_0 n_{\text{tot}} \pm \lambda_1, \quad \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_{-1}^* \end{pmatrix} = \frac{\gamma_1}{\sqrt{2\lambda_1}} \begin{pmatrix} -\text{sgn}(c_2) e^{i\Theta} \sqrt{\lambda_1 \pm c_1 n_{\text{tot}} f_z} \\ \pm \sqrt{\lambda_1 \mp c_1 n_{\text{tot}} f_z} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \equiv \sqrt{(c_1 n_{\text{tot}} f_z)^2 + \frac{(c_2 n_{\text{tot}})^2 |a_{00}|^2}{5}}$$

または

$$(1-ii) \zeta_1 = \zeta_{-1} = 0$$

(42d),(42e) 式より，

$$(2-i) \mu = c_0 n_{\text{tot}} \pm \lambda_2, \quad \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ \zeta_{-2}^* \end{pmatrix} = \frac{\gamma_2}{\sqrt{2\lambda_2}} \begin{pmatrix} \text{sgn}(c_2) e^{i\Theta} \sqrt{\lambda_2 \pm 2c_1 n_{\text{tot}} f_z} \\ \pm \sqrt{\lambda_2 \mp 2c_1 n_{\text{tot}} f_z} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \equiv \sqrt{(2c_1 n_{\text{tot}} f_z)^2 + \frac{(c_2 n_{\text{tot}})^2 |a_{00}|^2}{5}}$$

または

$$(2-ii) \zeta_2 = \zeta_{-2} = 0$$

となる．ただし， $\gamma_{1,2}$ は任意の複素数， $\Theta \equiv \text{Arg } a_{00}$ とおいた．以下，順に場合分けして調べる．

[I] まず， $f_z \neq 0$ のとき，(0-i)，(1-i)，(2-i) で得られる μ は一致しないので，これらのうちどれか一つのみが成立する．

[I-A] (0-ii),(1-ii),(2-i) が成り立つ時，規格化条件より $|\gamma_2| = 1$ ．また， $f_z = 2|\zeta_2|^2 - 2|\zeta_{-2}|^2 = \pm 4c_1 n_{\text{tot}} f_z / \lambda_2$ かつ $f_z > 0, \lambda_2 > 0$ より $\lambda_2 = 4c_1 n_{\text{tot}}$ ．これを満たす秩序変数は $\zeta = (1, 0, 0, 0, 0)^T$ で，このとき $a_{00} = 0$ となるので λ_2 の定義と矛盾はない．このときの一粒あたりのエネルギーは

$$\epsilon[(1, 0, 0, 0, 0)^T] = \frac{c_0}{2} n_{\text{tot}} + 2c_1 n_{\text{tot}} \quad (43)$$

となる.

[I-B] 同様にして (0-ii), (1-i), (2-ii) が成り立つ時, $\zeta = (0, 1, 0, 0, 0)$, $f_z = 1$, $a_{00} = 0$ で

$$\epsilon[(0, 1, 0, 0, 0)^T] = \frac{c_0}{2}n_{\text{tot}} + \frac{c_1}{2}n_{\text{tot}} \quad (44)$$

となる.

[I-C] (0-i), (1-ii), (2-ii) が成り立つ時は $\zeta = (0, 0, 1, 0, 0)$ で $f_z = 0$ となるので, $f_z \neq 0$ の仮定に反する.

[II] $f_z = 0$ の時は, (0-i), (1-i), (2-i) が同時に満たされる.

[II-A] $a_{00} \neq 0$ のとき a_{00} が実数となるように全体の位相を決めることにすると, (0-i), (1-i), (2-i) から求まる秩序変数は

$$\zeta = \left(\frac{\gamma_2}{\sqrt{2}}, -\frac{\gamma_1}{\sqrt{2}}, \text{sgn}(c_2)\gamma_0, \frac{\gamma_1^*}{\sqrt{2}}, \frac{\gamma_2^*}{\sqrt{2}} \right)^T \quad (45)$$

となる. a_{00} が実数なので γ_0 は実数であり, (1-i), (2-i) に現れる復号は $f_x = f_y = 0$ を満たすように決めた. 規格化条件から $|\gamma_2|^2 + |\gamma_1|^2 + \gamma_0^2 = 1$ で, これを用いると $a_{00} = 1/\sqrt{5}$ なる. また, 一粒子エネルギーは

$$\epsilon[(45) \text{ 式}] = \frac{c_0}{2}n_{\text{tot}} + \frac{c_2}{10}n_{\text{tot}} \quad (46)$$

となる.

[II-B] $a_{00} = 0$ のときは (42) 式より, 各 ζ_m は独立になる. したがって,

$$f_z = 2|\zeta_2|^2 + |\zeta_1|^2 - |\zeta_{-1}|^2 - 2|\zeta_{-2}|^2 = 0, \quad (47a)$$

$$f_+ = 2\zeta_2^*\zeta_1 + \sqrt{6}\zeta_1^*\zeta_0 + \sqrt{6}\zeta_0^*\zeta_{-1} + 2\zeta_{-1}^*\zeta_{-2} = 0, \quad (47b)$$

$$\sqrt{5}a_{00} = 2\zeta_2\zeta_{-2} - 2\zeta_1\zeta_{-1} + \zeta_0^2 = 0, \quad (47c)$$

を満たすように ζ が決まる. 例えば, $\zeta = (1/\sqrt{3}, 0, 0, \sqrt{2/3}, 0)^T$ や $\zeta = (1/2, 0, i/\sqrt{2}, 0, 1/2)^T$ がこれを満たす. 一粒子エネルギーは

$$\epsilon[(47) \text{ 式}] = \frac{c_0}{2}n_{\text{tot}} \quad (48)$$

となる.

(43), (44), (46), (48) 式を比較して, 図 2 の相図が得られる. ここで, $\zeta = (1, 0, 0, 0, 0)^T$ で代表される $|\mathbf{f}| = 2$, $a_{00} = 0$ の状態を強磁性相, (45) 式で代表される $|\mathbf{f}| = 0$, $a_{00} = 1/\sqrt{5}$ の状態をネマティック相, $\zeta = (1/\sqrt{3}, 0, 0, \sqrt{2/3}, 0)^T$ で代表される $|\mathbf{f}| = a_{00} = 0$ の状態をサイクリック相と呼ぶ. 代表される, というのはスピン 1 の場合と同様にこれらの秩序変数の全体の位相は任意に選べ, かつ, 秩序変数をスピン空間で回転させても基底状態となるからである. 図 2 には表 1 に従って ^{87}Rb と ^{23}Na の相互作用係数をプロットしており, ^{87}Rb はネマティック相とサイクリック相の境界付近に, ^{23}Na はネマティック相に位置することがわかる [32, 33]. また, ここで得られる相は d 波の超伝導体に対して求まるものと同じである [34].

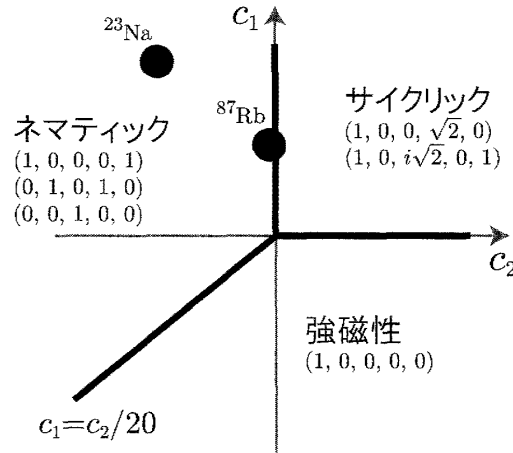


図 2: ゼロ磁場中のスピン 2 BEC の相図. 各相の領域にはその相における代表的な秩序変数を記した. ^{23}Na はネマティック相, ^{87}Rb はネマティック相とサイクリック相の境界に位置する.

4.2 対称性の破れと秩序変数空間

前節でみたように, ある基底状態の秩序変数が求まったときに, それをスピン空間で回転させたものはすべて基底状態となる. これはハミルトニアンがスピン回転とゲージ変換に対して不変であるためである. 具体的に, $p = q = c_{\text{dd}} = 0$ の場合に (21) 式で場の演算子にスピン回転とゲージ変換を施して

$$\hat{\psi} \rightarrow e^{i\phi} e^{-iF_z\alpha} e^{-iF_y\beta} e^{-iF_z\gamma} \hat{\psi} \quad (49)$$

とおいてもハミルトニアンが不変であることが確認できる. ただし, $\phi, \alpha, \beta, \gamma$ は空間に依存しない定数とする.

一般にハミルトニアンは何らかの対称性を持っており, 高温ではハミルトニアンの対称性を持った状態が実現するが, 相転移が起きると対称性が破れる. 例えば, 一成分 BEC の場合には場の演算子 $\hat{\psi}$ を $e^{i\phi}\hat{\psi}$ とおきかえてもハミルトニアンは不変であるが, ボース凝縮が起これと凝縮体の位相が一つに決まり, 位相の異なる状態は別の状態と見なされる. このとき, ハミルトニアンを不変に保つ変換の集合は 1 次元ユニタリー変換群 $U(1) \equiv \{e^{i\phi} | \phi \in \mathbb{R}\}$ を成し, 「ボース凝縮により $U(1)$ 対称性が破れた」と言える.

スピノル BEC の場合, ハミルトニアンの相互作用部分を不変に保つ演算は位相変換と 3 次元スピン回転で, これらの変換の集合は位相変換からくる 1 次元ユニタリー変換 $U(1)$ とスピン回転からくる 3 次元特殊直交群 $SO(3)$ の直積

$$G = U(1)_\phi \times SO(3)_F \quad (50)$$

$$= \{e^{i\phi} e^{-iF_z\alpha} e^{-iF_y\beta} e^{-iF_z\gamma} | 0 \leq \phi, \alpha, \gamma < 2\pi, 0 \leq \beta \leq \pi\} \quad (51)$$

で与えられる. ここで, 添え字 ϕ, F はそれぞれ位相とスピンの自由度を意味している. 凝縮状態ではこの対称性が破れるのだが, スカラー BEC と異なりスピノル BEC では凝縮状態でもハミル

トニアンのもつ対称性が部分的に残っており、その対称性の破れ方の違いにより様々な量子相が出現する。これは超流動ヘリウム3や異方的超伝導など内部自由度を持った系に共通した特徴で、対称性の高い状態が基底状態として現れる傾向にある [11, 35].

ある秩序変数 ψ が与えられたときに、この状態の持っている対称性は次のように定義できる。

$$H_\psi = \{h \in G \mid h\psi = \psi\}. \quad (52)$$

H を ψ の等方部分群 (isotropy group) または小群 (little group) と呼ぶ。例えばスピン1の秩序変数 $(1, 0, 0)^T$ は強磁性相であるが³、この秩序変数は次のようなゲージ変換の結合したスピンの2次元回転に対して不変である [36, 6].

$$e^{i\gamma} e^{-iF_z\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\gamma} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (53)$$

従って、 $(1, 0, 0)^T$ に対する等方部分群は

$$H_{\text{ferro}} = SO(2)_{F_z-\phi} \equiv \{e^{i\gamma} e^{-iF_z\gamma} \mid 0 \leq \gamma < 2\pi\} \quad (54)$$

と書ける。

H が与えられたとき、同じ相に属する秩序変数のとりうる空間 (秩序変数空間) は商空間 (quotient space)

$$R = G/H \quad (55)$$

として定義できる。“ $/H$ ” は G に対して、「 $g, g' \in G$ が $g^{-1}g' \in H$ を満たせばこれらを同一の要素とみなす」という操作を表し、 $R = \{gH \mid g \in G\}$ とも書ける³。具体的に G/H を求めるには秩序変数に G の元を作用させて秩序変数の動きうる空間を考えればよい。 H の元に対しては秩序変数は不変なので、得られる秩序変数空間 $G_\psi = \{g\psi \mid g \in G\}$ は G/H と同型になる。強磁性相の例で考えると、 G_ψ の元は (34) 式、すなわち

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_0 \\ \zeta_{-1} \end{pmatrix} = e^{i\phi} e^{-iF_z\alpha} e^{-iF_y\beta} e^{-iF_z\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i(\phi-\gamma)} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha \cos^2 \frac{\beta}{2}} \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \\ e^{i\alpha \sin^2 \frac{\beta}{2}} \end{pmatrix} \quad (56)$$

で与えられる。この秩序変数は $\phi - \gamma$ を一定にすれば ϕ, γ の個々の値には依存しない。これは、スピンの回転と位相変換が等価であることを意味し、(54) 式にあるスピン・ゲージ結合の $SO(2)$ 対称性の帰結である。秩序変数は $(\alpha, \beta, \gamma - \phi)$ というオイラー角と同じ3つの自由度で構成されるので、秩序変数の取りうる空間は

$$R_{\text{ferro}} = SO(3)_{F, \phi} \quad (57)$$

³ G/H は群になるとは限らないが、 H が G の正規部分群であるとき G/H は群となる。任意の $g \in G, h \in H$ に対して $ghg^{-1} \in H$ を満たす時、 H が G の正規部分群という。

である．任意の秩序変数に対して G の作用はエネルギーを不変に保つので， R は秩序変数のとりうる全空間（ノルムが1の複素 $2F+1$ 次元ベクトル）の中でエネルギーの縮退した空間を形成している．凝縮状態ではこの縮退した空間の中から対称性が自発的に破れて R 上の1点が実現するので， R は「破れた対称性」を表しているとも言える．

同様に，スピン1のポラー相についても考えてみよう．ポラー相の秩序変数 $(0, 1, 0)^T$ は以下の変換に対して不変である．

$$e^{-iF_z\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (58)$$

$$e^{i\pi} e^{-iF_x\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (59)$$

(58) 式はスピンのみの $SO(2)$ 対称性をもつことを示しており，(59) 式はスピンとゲージの結合した離散対称性があることを表している．ここで， $\sigma = e^{i\pi} e^{-iF_x\pi}$ とおくと， $\sigma^2 = 1$ (1 は恒等変換) であることから $\{1, \sigma\}$ は位数2の巡回群 $\mathbb{Z}_2$ をなす⁴．これらをあわせると，ポラー相のもつ対称性は

$$H_{\text{polar}} = SO(2)_{F_z} \rtimes (\mathbb{Z}_2)_{F, \phi} \quad (60)$$

となる．ここで σ と $SO(2)$ の元 $g_\gamma = e^{-iF_z\gamma}$ が非可換 ($\sigma g_\gamma \sigma = g_\gamma^{-1} \neq g_\gamma$) であるため半直積の記号 $\rtimes$ を用いた．(60) 式の右辺をまとめて位数無限次の二面体群 $(D_\infty)_{F, \phi}$ と書く⁵．

H がわかれば数学的に G/H を求めることができるが⁶，ここでは強磁性相の場合と同様に秩序変数に G の元を作用させて得られる空間を考えてみよう．秩序変数に G の元を作用させると，

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_0 \\ \zeta_{-1} \end{pmatrix} = e^{i\phi} e^{-iF_z\alpha} e^{-iF_y\beta} e^{-iF_z\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\phi} \begin{pmatrix} -e^{-i\alpha} \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} \\ \cos\beta \\ e^{i\alpha} \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (61)$$

となる．(61) 式の最右辺が γ に依存せず，また $(\alpha, \beta, \phi) \rightarrow (\alpha + \pi, \pi - \beta, \phi + \pi)$ の変換により不変になっていることからポラー相の等方部分群が (60) 式で記述されることが確認できる．ここでスピン自由度に着目すると，秩序変数は α, β の2変数，すなわち3次元単位ベクトル $\mathbf{d} = (\sin\beta \cos\alpha, \sin\beta \sin\alpha, \cos\beta)$ で表すことができる．このような空間は2次元球面 $S^2 = \{(d_x, d_y, d_z) \mid d_{x,y,z} \in \mathbb{R}, d_x^2 + d_y^2 + d_z^2 = 1\}$ と呼ばれる．これよりポラー相の秩序変数空間は

$$R_{\text{polar}} = [U(1)_\phi \times S^2_F] / (\mathbb{Z}_2)_{\phi, F} \quad (62)$$

となる [37]．

⁴位数 n の巡回群とは $g^n = 1$ を満たす生成元 g によって生成される群で n 個の元からなる． $\mathbb{Z}_n = \{g^k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$ ．特に g がある軸まわりの $2\pi/n$ 回転を表す場合には C_n と書く [19]．

⁵位数 n の二面体群 D_n は巡回群 C_n に対称軸と垂直軸まわりの π 回転を生成元として加えたもので， $D_n \cong C_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ である．

⁶今の場合は $SO(3)/SO(2) \cong S^2$ から直ちに (62) 式が導ける．

4.3 球面調和関数表示

前節で見たように得られた基底状態の秩序変数に対してハミルトニアン G の元を作用させれば、考えている相における対称性や秩序変数空間についての情報を引き出すことができる。しかしもっと簡単に、球面調和関数を用いて秩序変数を図示することで直感的に対称性を理解することができる。ボース粒子はスピンが整数値のみをとるので、スピン F の系に対して球面調和関数 Y_F^m を基底にとることで、次式のように多成分のスピン秩序変数からスカラー波動関数 Ψ を構成できる。

$$\Psi(\theta, \varphi) = \sum_{m=-F}^F \zeta_m Y_F^m(\theta, \varphi) \quad (63)$$

ここで、 (θ, φ) はスピン空間における方位角である。具体的に、スピン 1 の強磁性相、ポーラー相に対しては

$$\Psi_{\text{ferro}}(\theta, \varphi) = Y_1^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta \quad (64)$$

$$\Psi_{\text{polar}}(\theta, \varphi) = Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cos \theta \quad (65)$$

であり、これを図示すると図 3 のようになる。色の濃淡は Ψ の位相を表しており、図 3(a) から確かに、強磁性相は z 軸 (自発磁化の生じる方向) のまわりに回転させると位相が変わることがわかる。これは位相とスピンの結合した $SO(2)$ 対称性を表している。一方、ポーラー相では z 軸まわりに回転させても位相は変わらないが、それと垂直方向を軸として π 回転させると位相が π 変わることがわかる。前者が $SO(2)$ 対称性、後者が $\mathbb{Z}_2$ 対称性に対応する。なお、4.1.1 で定義した d は $SO(2)$ 対称軸の方向となっている。

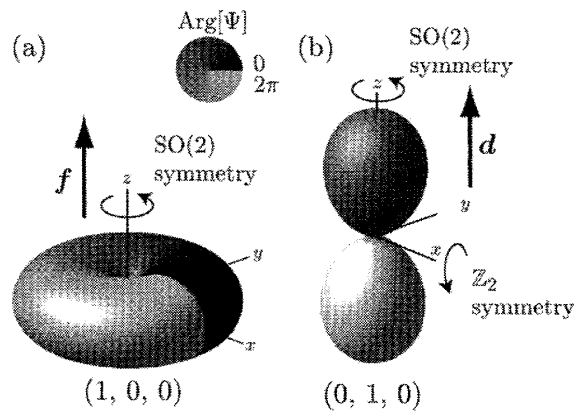


図 3: スピン 1 BEC の基底状態の調和関数表示。

スピン 2 の場合についても同様に図示すると図 4 のようになる。この図から得られる対称性を表 2 にまとめた。まず、強磁性相についてはスピン 1 と同様に位相とスピンの結合した $SO(2)$ 対称性を持つことがわかる。ただし、スピン 1 の場合と異なり、スピン空間での回転 γ に対して位相が 2γ 変化するため、 $H_{\text{ferro}} = SO(2)_{Fz-2\phi}$ と書く。

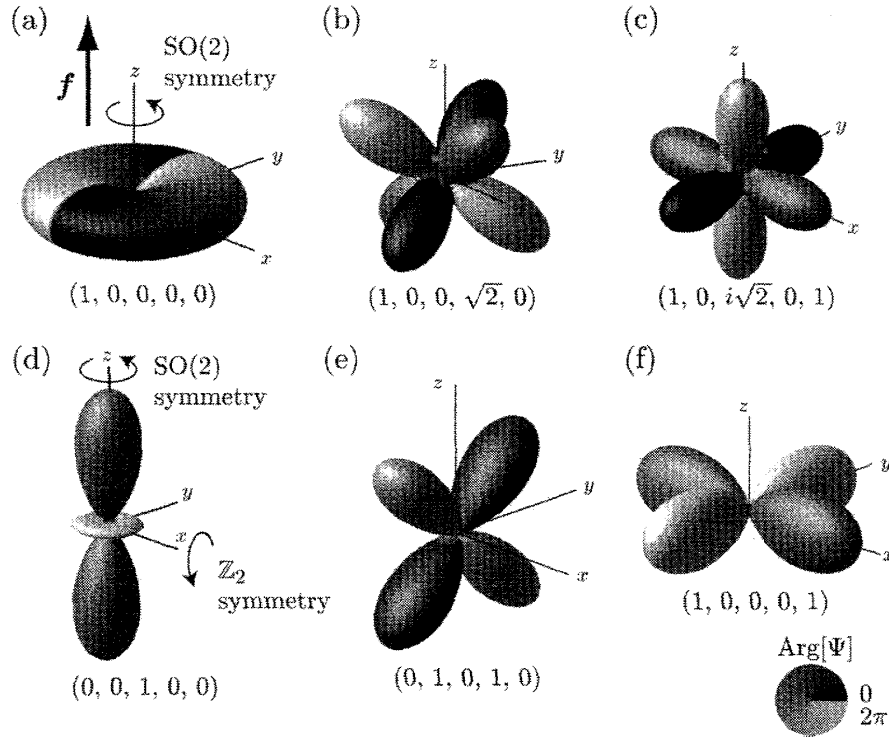


図 4: スピン 2 BEC の基底状態の調和関数表示.

サイクリック相についても同様に図示すると, 図 4 (b), (c) に示すように $(1/\sqrt{3}, 0, 0, \sqrt{2}/3, 0)$ と $(1/2, 0, i/\sqrt{2}, 0, 1/2)$ という秩序変数がどちらも同じ形をし, 回転させた関係にあることがわかる. 図 4(c) を用いてサイクリック相の持つ対称性を調べてみよう. 図 4(c) において, x, y, z 軸方向の「腕」の位相はちょうど $3\pi/2$ ずつ異なる. まず, Ψ は z 軸の周りに対する π 回転に対して不変である. 一見すると z 軸周りの $\pi/2$ 回転に対して不変であるように見えるが, $\pi/2$ 回転では x, y 軸方向の位相が変わるのに対し z 軸方向では位相は変化しない. したがって, 秩序変数全体の位相を変えてももとに戻すことはできない. 一方, $(1, 1, 1)$ 軸方向周りの $2\pi/3$ 回転であれば x, y, z 軸方向の位相がそれぞれ $-2\pi/3$ ずつ変化するので, スピン空間での回転と同時に秩序変数全体に $e^{i2\pi/3}$ を掛けてやれば秩序変数は不変に保たれる. x, y 軸, および $(1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1)$ 方向まわりの回転に対しても同様のことが言える. このような回転操作は正四面体を不変に保つ回転操作に一致し, x, y, z 軸周りの π 回転が正四面体の各辺の中点まわりの π 回転に, $(1, 1, 1)$ 軸などの周りの $2\pi/3$ 回転は正四面体の頂点の周りの $2\pi/3$ 回転に対応する. 従って, サイクリック相は正四面体群の対称性をもつ.

ネマティック相については少し複雑で, 実は対称性の異なる 2 つの状態が縮退している. (45) 式で $(\gamma_1, \gamma_2) = (0, 0), (1, 0)$ および $(0, 1)$ の場合を図 4(d)–(f) に示した. 図 4(d) はスピン 1 のポーラー相と同様に 1 軸対称性 D_∞ を持つ. ただし x 軸周りの π 回転で位相が変わらないのでスピンとゲージの結合はない. これを 1 軸ネマティック (uniaxial nematic) 状態と呼ぶ. 図 4(e)(f) は対称性は同じで互いに回転させた関係にある. 図 4(f) について対称性をみると, 秩序変数は z 軸周

相	秩序変数 ζ^T	H	H の生成元
強磁性	$(1, 0, 0, 0, 0)$	$SO(2)_{F_z-2\phi}$	$e^{i2\phi} e^{-iF_z\phi}$
サイクリック	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2})$	$T_{\phi, \mathbf{F}}$	$e^{i2\pi/3} \exp[-i \frac{F_x+F_y+F_z}{\sqrt{3}} \frac{2\pi}{3}], \exp[-iF_z\pi]$
1 軸ネマティック	$(0, 0, 1, 0, 0)$	$(D_\infty)_{\mathbf{F}}$	$\exp[-iF_z\phi], e^{i\pi} \exp[-iF_x\pi]$
2 軸ネマティック	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$(D_4)_{\phi, \mathbf{F}}$	$e^{i\pi} \exp[-iF_z \frac{\pi}{2}], \exp[-iF_x\pi]$

表 2: スピン 2 のゼロ磁場中における基底状態の秩序変数とその対称性. T は正四面体回転群を表す.

りの $\pi/2$ 回転+位相 π の変換, および x 軸まわりの π 回転に対して不変である. このような対称性は位数 4 の二面体群 D_4 で表される. これを 2 軸ネマティック (biaxial nematic) 状態と呼ぶ. 量子揺らぎまで考慮するとこれらの縮退が破れ, $c_2 > 0$ では 1 軸ネマティック状態, $c_2 < 0$ では 2 軸ネマティック状態が安定になることが知られている [38, 39, 40].

5 トポロジカル励起

第 4 節では一様系の基底状態とその対称性について調べた. ある基底状態の秩序変数が求まったとき, この状態とエネルギー縮退した状態の集合として秩序変数空間 R が定義でき, 自発的対称性の破れによりこの縮退した秩序変数空間 R のうち 1 点に対応する状態が実現する. しかし, 系のサイズが十分大きければ, 低エネルギー状態として秩序変数が R 上を緩やかに空間変化するような状況が考えられる. なぜなら, このような秩序変数の空間変化は凝縮エネルギー (相互作用エネルギー) を最小に保つためエネルギーの増分は運動エネルギーのみで, 空間変化を緩やかにすれば励起エネルギーを抑えることができる. このような内部自由度の空間構造をテクスチャーと呼ぶ. 本節ではこのようなテクスチャーのうち, とくにトポロジカルに安定なものについて議論する.

秩序変数の空間変化が生じる例として, BEC 相転移のダイナミクスを考えてみよう. 相転移点を通じた直後は遠く離れた点ではコヒーレンスがなく実空間の各点で独立に対称性が破れるので, R 上の点が空間的にランダムに出現する. 十分時間がたって, コヒーレンスが十分に発達すると, 凝縮状態はよりエネルギーの低い一様な構造に向かう. しかし, R の幾何学的な構造によっては必ずしも一様な構造に移り変われるわけではなく, 凝縮体の中に欠陥が生じる. このように, 秩序変数の連続変形により一様な構造に移り変わらないものを総じて「トポロジカル励起」と呼ぶ. また上記の相転移ダイナミクスによりトポロジカル励起が生じる機構は Kibble-Zurek 機構として知られている [41, 42].

トポロジカル励起としては, 渦, モノポール, スカームオンなどが存在する. これらは相転移ダイナミクス以外でも, 外部回転や磁場操作などにより生成することができるし [43, 44, 45, 46, 47, 48], 双極子相互作用によって基底状態としてこのような秩序変数の空間構造が生じることも

ある [25, 26, 27]. 以下では秩序変数の空間構造に伴う粒子およびスピンの超流動流について定義したあとに, 具体的にスピン 1 の BEC でどのようなトポロジカル励起が存在するかを説明する.

5.1 超流動, スピン超流動

よく知られたトポロジカル励起として, スカラー BEC における量子渦が挙げられる. これは渦の周りで超流動の速度場の循環が量子化されるというものである. スカラー BEC の秩序変数は $\psi = |\psi|e^{i\phi}$ と書け, 秩序変数の一価性から実空間上のある閉経路に沿った ϕ の変化は 2π の整数倍でなくてはならない. 一方, 秩序変数の空間変化は超流動の流れを生み, その速度場は位相の勾配に比例して

$$\mathbf{v}^{\text{mass}} = \frac{\hbar}{2Mi} [\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi] = \frac{\hbar}{M} \nabla\phi \quad (66)$$

で与えられる. これより, $\mathbf{v}^{\text{mass}}$ の循環は

$$\oint \mathbf{v}^{\text{mass}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{\hbar}{M} \oint \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{\hbar}{M} \int d\phi = \frac{\hbar}{M} N \quad (67)$$

となり, $\hbar/M$ を単位として量子化されることがわかる.

スピノル BEC においても同様に, 秩序変数の空間変化には超流動が伴う. ただし, スピン自由度を反映して, 粒子だけでなくスピンの超流動も生じる. これらの循環が常に量子化されるわけではないが, ここで超流動とスピン超流動の性質を見ておくのは有意義であろう.

スピノル BEC の超流動カレントは各スピン成分の速度場の和として次式で定義される.

$$\mathbf{v}^{\text{mass}} \equiv \frac{\hbar}{2Mi} \sum_m [\zeta_m^*(\nabla\zeta_m) - (\nabla\zeta_m^*)\zeta_m] \quad (68)$$

実際に GP 方程式を用いて粒子数密度の時間微分を計算すれば, $\mathbf{v}^{\text{mass}}$ は粒子数に対する連続の方程式

$$\frac{\partial n_{\text{tot}}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{\text{tot}} \mathbf{v}^{\text{mass}}) = 0 \quad (69)$$

を満たすことが確認できる. ただし, ここでは一般的に n_{tot} は時間的, 空間的に変化してもよいとした. 同様にして, スピン密度の時間微分を計算することでスピンに関しての連続の方程式とスピнкаレントが次のように書けることがわかる [49].

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_{\text{tot}} f_\mu) + \nabla \cdot (n_{\text{tot}} \mathbf{v}_\mu^{\text{spin}}) = 0 \quad (70)$$

$$\mathbf{v}^{\text{spin}} \equiv \frac{\hbar}{2Mi} \sum_{mn} F_{mn} [\zeta_m^*(\nabla\zeta_n) - (\nabla\zeta_m^*)\zeta_n] \quad (71)$$

以下では具体的にスピン 1 の強磁性相, ポーラー相について超流動カレント, スピнкаレントを計算してみよう.

5.1.1 スピン 1 強磁性相

秩序変数の一般形 (56) 式を (68) 式に代入すると、超流動カレントは

$$\mathbf{v}^{\text{mass}} = \frac{\hbar}{M} [\nabla\phi - (\nabla\alpha) \cos\beta] \quad (72)$$

と計算できる．ただし (56) 式中の $\phi - \gamma$ を ϕ と置き直した．スカラー BEC の場合と異なり、 $\mathbf{v}^{\text{mass}}$ がスカラー関数の勾配では書けないため、超流動カレントの循環は量子化されない．ここで、渦度 $\nabla \times \mathbf{v}^{\text{mass}}$ を計算すると、一粒子あたりのスピン期待値を表す単位ベクトル $\mathbf{f} = (\sin\beta \cos\alpha, \sin\beta \sin\alpha, \cos\beta)$ を用いて

$$\nabla \times \mathbf{v}^{\text{mass}} = \frac{\hbar}{M} (\nabla\alpha) \times (\nabla\beta) \sin\beta \quad (73)$$

$$= \frac{\hbar}{2M} \sum_{\mu\nu\lambda=x,y,z} \epsilon_{\mu\nu\lambda} f_\mu (\nabla f_\nu) \times (\nabla f_\lambda) \quad (74)$$

と書くことができる．これより、スカラー BEC の場合には凝縮体中で常に渦度がゼロなのに対し、強磁性相では磁化の空間分布にともなって渦度が凝縮体中に分布していることがわかる．(74) 式の $\mathbf{f}$ をクーパー対の軌道角運動量 ℓ に置き換えれば、超流動 $^3\text{He A}$ 相における渦度の式 (Mermin-Ho 関係式 [50]) となる．なお、(74) 式のようにスピン空間のベクトル $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$ と実空間のベクトル $(\nabla, \mathbf{v}^{\text{mass}}, \mathbf{v}^{\text{spin}})$ の両方が存在するときは、実空間のベクトルを太字でスピン空間のベクトルは添え字 $\mu, \nu, \lambda (= x, y, z)$ をつけて書くことにする．

スピнкаレントについては (56) 式を (71) 式に代入してまとめると、

$$\mathbf{v}_\mu^{\text{spin}} = f_\mu \mathbf{v}^{\text{mass}} - \frac{\hbar}{2M} \sum_{\nu\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda} f_\nu (\nabla f_\lambda) \quad (75)$$

となる．第 1 項が粒子と一緒に運ばれるスピンの流れ、第 2 項がスピンの勾配により生じる流れを表している．スピンの連続の方程式と (75) 式から磁化の絶対値の時間微分を計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_{\text{tot}}^2 |\mathbf{f}|^2) = -2 \sum_{\mu} n_{\text{tot}} f_\mu \nabla (n_{\text{tot}} f_\mu \mathbf{v}^{\text{mass}}) + \frac{\hbar}{M} \sum_{\nu\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda} (n_{\text{tot}} f_\mu) \nabla \cdot [n_{\text{tot}} f_\nu (\nabla f_\lambda)] \quad (76)$$

$$= -2 \left[|\mathbf{f}|^2 n_{\text{tot}} \nabla (n_{\text{tot}} \mathbf{v}^{\text{mass}}) n_{\text{tot}}^2 \left(\sum_{\mu} f_\mu \nabla f_\mu \right) \cdot \mathbf{v}^{\text{mass}} \right] \quad (77)$$

$$= |\mathbf{f}|^2 \frac{\partial n_{\text{tot}}^2}{\partial t} - 2 n_{\text{tot}}^2 \left(\sum_{\mu} f_\mu \nabla f_\mu \right) \cdot \mathbf{v}^{\text{mass}} \quad (78)$$

となる．初期状態が全空間で $|\mathbf{f}(\mathbf{r})|^2 = 1$ を満たすとする $\sum_{\mu} f_\mu \nabla f_\mu = 0$ なので (78) 式の右辺第二項はゼロとなる．これより、 $\partial |\mathbf{f}|^2 / \partial t = 0$ となって 1 粒子あたりのスピン期待値が常に 1 に保たれることがわかる．

5.1.2 スピン 1 ポーラー相

秩序変数の一般形 (61) 式を (68) 式に代入すると、

$$\mathbf{v}^{\text{mass}} = \frac{\hbar}{M} \nabla\phi \quad (79)$$

となり、渦の循環が量子化されることがわかる。ただしポーラー相は $\mathbb{Z}_2$ 対称性を持つために位相を π だけ変えても、同時にスピン空間で π 回転させれば秩序変数は不変に保たれる。したがって、実空間のある閉経路に沿って一周したときに ϕ の変化は π の整数倍であればよく、超流動カレントの循環はスカラー BEC の半分の $\hbar/(2M)$ を単位として量子化される。

スピнкаレントについては (61) 式を (71) 式に代入し、異方軸の方向を表す単位ベクトル $\mathbf{d} = (\sin \beta \cos \alpha, \sin \beta \sin \alpha, \cos \beta)$ を用いて表すと

$$\mathbf{v}_\mu^{\text{spin}} = -\frac{\hbar}{M} \sum_{\nu\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda} d_\nu (\nabla d_\lambda) \quad (80)$$

となる。ここで注意すべき点は、ポーラー相では磁化 $\mathbf{f}$ がゼロであるが、スピンについての連続の方程式を書き下すと

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_{\text{tot}} f_\mu) = -\nabla \cdot (n_{\text{tot}} \mathbf{v}^{\text{spin}}) \quad (81)$$

$$= \frac{\hbar}{M} \left[(\nabla n_{\text{tot}}) \cdot \left(\sum_{\nu\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda} d_\nu \nabla d_\lambda \right) + n_{\text{tot}} \sum_{\nu\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda} d_\nu \nabla^2 d_\lambda \right] \quad (82)$$

となるため、 $\mathbf{d}$ の空間構造によっては $\mathbf{f}$ が時間発展で成長する。これは無理やりスピントクスチャーをつくるとポーラー状態そのものがこわれてしまうことを意味する。粒子数密度 n_{tot} が一定の凝縮体を想定すると、スピントクスチャーが安定であるためには

$$\mathbf{d} \times \nabla^2 \mathbf{d} = 0 \quad (83)$$

を満たす必要がある。

5.2 渦

渦を分類するには実空間で閉経路を考え、それに沿って秩序変数がどのように変わるかを調べる (図 5)。渦の種類は、秩序変数空間におけるトポロジカルに異なる経路に対応する⁷。例によって、まずはスカラー BEC について説明しよう。秩序変数空間は位相の自由度からくる $R_{\text{scalar}} = U(1) \cong S^1$ である。ここで S^n は n 次元球面で $n+1$ 次元空間における単位ベクトルの成す空間であり、 $n=1$ の場合は図 6(a) に示すような二次元平面上の単位円で記述できる。実空間における閉経路がこの秩序変数空間 R_{scalar} に射影された時、 R_{scalar} 空間での経路は単位円を何周まわるかで区別される。例えば、図 6(b) のような経路であれば、連続変形によりこの経路を R_{scalar} 上の一点に縮めること

⁷このように閉経路からある空間 R への写像を分類する手法としてホモトピー論がある。 R 内における閉経路の集合に対して、連続変形で移れる経路をすべて同一視したものを基本群とよび $\pi_1(R)$ と書く。スカラー BEC およびスピン 1 の強磁性相、ポーラー相については、それぞれ、

$$\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}, \quad \pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2, \quad \pi_1([U(1) \times S^2]/\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}$$

となることが数学的に示せる。同様に、閉経路 (1 次元球面 S^1) の代わりに閉曲面 (2 次元球面 S^2) や 3 次元球面 S^3 からの写像を分類するには第二ホモトピー群 $\pi_2(R)$ 、第三ホモトピー群 $\pi_3(R)$ が用いられる。これらはそれぞれモノポールとスカーミオンの分類に用いられる。本稿では数学的な話は省略して直感的にトポロジカル励起の構造が理解できるよう話を進めるので、ホモトピー論については文献 [10, 51] や数学の教科書を参考にいただきたい。

ができるが、図 6(c) のように単位円を一周まわるような経路に対しては連続変形で R_{scalar} 上の一点に縮めることはできないため、これらの 2 つの経路は区別される。同様に、単位円を二周まわる経路と一周まわる経路とは連続変形で移り変われない。このことから、渦は R_{scalar} 上を何回まわったかにより区別される。単位円上をまわる回数は、秩序変数の位相が実空間の閉経路に沿って 2π の何倍変わったか、ということに対応するので、トポロジカル不変量は循環の量子数そのものである。

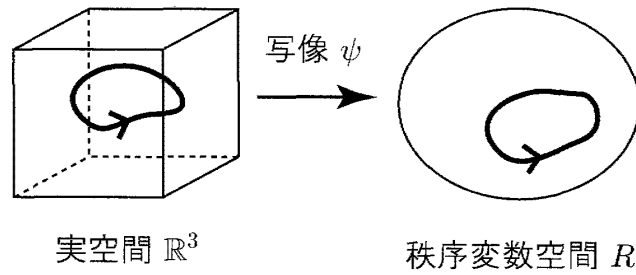


図 5: 実空間から秩序変数空間への写像。実空間における閉経路に沿った秩序変数の空間変化は秩序変数空間における閉経路とみることができる。トポロジカルに異なる空間構造とは、秩序変数空間での対応する経路が連続変形で移りかわれないことを意味する。

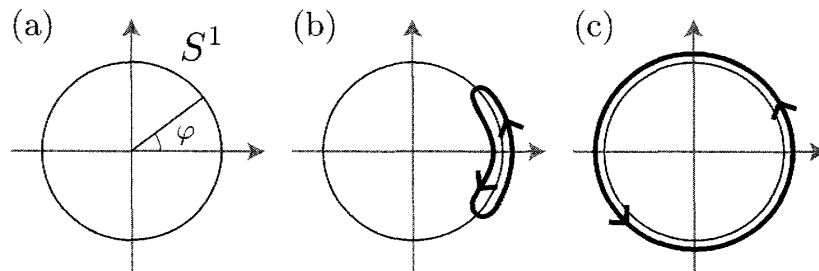


図 6: スカラー BEC における渦の分類。(a) スカラー BEC の秩序変数空間。(b)(c) 実空間における閉経路に沿った秩序変数空間での経路。(b)(c) の経路は連続変形で移り変わることはできない。

5.2.1 スピン 1 強磁性相

強磁性相の秩序変数空間は $R_{\text{ferro}} = SO(3)_{F,\phi}$ であった。 $SO(3)$ の元はある軸 $\mathbf{n}$ まわりの ω 回転により記述できる。これは、原点から $\mathbf{n}$ の方向に距離 ω の点として表現すれば、半径 π の中身の詰まった球体で表すことができる [図 7(a)]。ただし、 $\mathbf{n}$ まわりの π 回転と $-\mathbf{n}$ まわりの π 回転は同じことなので、球体表面の点は原点に関して反対側にある点と同一視される。このような空間において、連続変形できない閉経路がいくつあるか見てよう。まず、明らかに図 7(b) のような経路は一点に縮めることができる。一方、図 7(c) のように球体の表面を通る経路は一点に縮めることができないため、図 7(b) の経路とは区別される。図 7(d) のように、表面を 2 回通る経路については、連続変形により図 7(b) に移せるので 1 点に縮めることができる。結局、表面を偶数回通

るものは一点に縮めることができ、表面を奇数回通るものは図 7(c) の経路まで変形することができるので、経路の種類としては 2 種類あることがわかる。

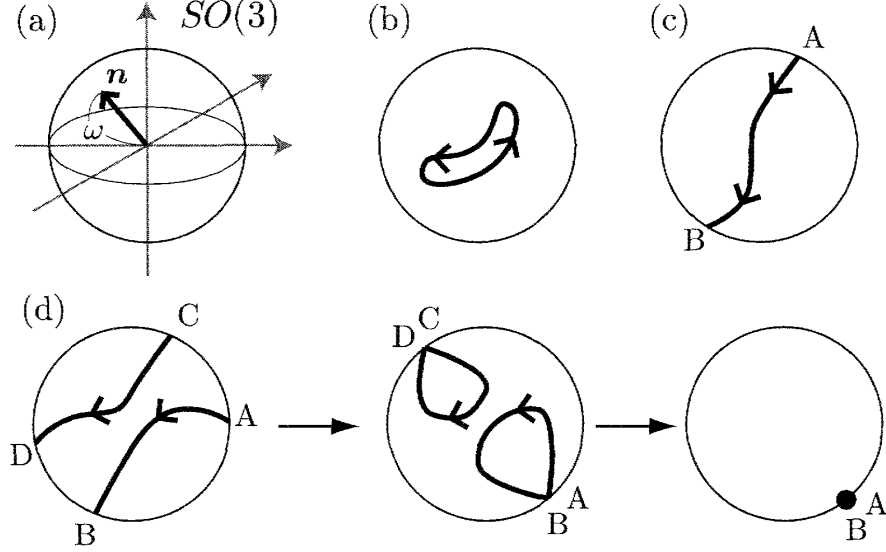


図 7: スピン 1 強磁性 BEC における渦の分類. (a) 秩序変数空間は中身のつまった球体で表現される. (b)(c) 実空間における閉経路に沿った秩序変数空間での経路. (d) 球体表面を偶数回通る経路は連続変形で (b) と等しくなる.

それぞれの場合について具体的な秩序変数の空間分布を考えてみよう. 図 7(b) の経路として回転角が一定で回転軸の方向が変わるようなものをとると, 秩序変数は

$$\zeta(\varphi) = \exp[-i(F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi)\beta] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\beta}{2} \\ e^{i\varphi} \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \\ e^{2i\varphi} \sin^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad (84)$$

と書ける. ただしここではある半径 r の閉経路を考え φ を方位角とした. β は適当な定数である. $\beta = \pi/2$ の場合について図示したのが図 8(a) の一番外側の円周である. R_{ferro} 上で一点に縮めることができることからこれはトポロジカルに安定な構造ではなく, 実際に 8(a) で磁化の方向を上に向けると [すなわち (84) 式で $\beta = 0$ にすると] 一様な構造になることがわかる. β を空間変化させて $r = 0$ で $\beta = 0$ となるようにとったのが図 8(a) で, 中心部分でも強磁性相の状態が保たれていることがわかる. このような構造は (トポロジカルに安定ではないが) Mermin-Ho 渦とよばれる [50]. Mermin-Ho 渦状態は, 渦の中心付近では速度場の循環がゼロであるが, r が大きくなるにつれて循環が連続的に増加する. また, β を空間的に一様として $\beta = 0$ から π へと時間変化させると一様な状態から量子数 2 の渦が生じる. 超流動カレントの循環は量子化されていないのでこれも矛盾はない. 具体的に四重極磁場を用いてスピンの方位を操作することが可能で [52, 53], この方法により渦が生成される様子が実験で観測されている [43, 44, 54, 55].

図 7(c) に対応する秩序変数としては、回転軸が一定で回転角が変わるように変化させればよく、

$$\zeta(\varphi) = e^{-iF_z\varphi} e^{-iF_x\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-iF_z\varphi} \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\beta}{2} \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \cos^2 \frac{\beta}{2} \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \\ e^{i\varphi} \sin^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad (85)$$

という形が得られる．ここで、 $e^{-iF_x\beta}$ は (84) 式と比較しやすいように便宜上入れた．これを図示すると図 8(b) のようになる．図 8(a) の場合と異なり、図 8(b) では磁化の方向を上にもけても各点で位相がそろわず、一様な構造にはなれない．また、位相の特異点を除くためには $r=0$ で $m=\pm 1$ の成分がゼロにならなくてはならないが、(85) 式の形を保ったまま $m=\pm 1$ の成分を同時にゼロにすることはできない．これは渦芯部分で強磁性状態ではなくなっていることを意味する．ただし、スカラー BEC では渦芯部分で凝縮体がゼロとなり密度分布に穴があくのにに対して、今の場合は渦芯部分に $m=0$ の状態がつまっているのでポーラー状態となる．このことから、図 8(b) に示される渦はポーラーコア渦とよばれる．渦芯のサイズはポーラー状態と強磁性状態のエネルギー差、すなわち $|c_1|n_{\text{tot}}$ で決まる．

強磁性 BEC を回転させると Mermin-Ho 渦やポーラーコア渦が生じ、回転の角速度に依存して渦の種類や渦格子の形状が変わることが数値計算により示されている [45]．

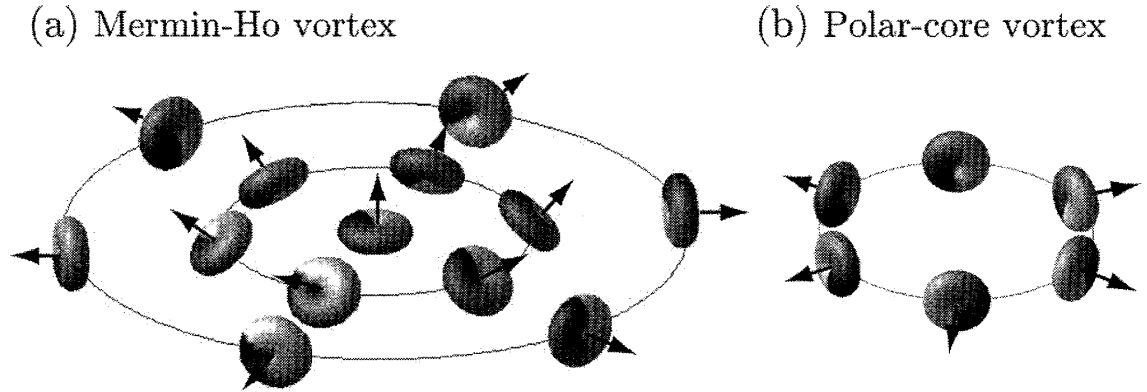


図 8: スピン 1 強磁性 BEC における渦．実空間の各点に、その点における秩序変数の状態を球面調和関数表示で図示した．(a)(b) の構造はそれぞれ図 7(b)(c) の経路に対応する．

5.2.2 スピン 1 ポーラー相

ポーラー相の秩序変数空間は $R_{\text{polar}} = [U(1)_\phi \times S^2_F] / (\mathbb{Z}_2)_{\phi, \mathbf{F}}$ であった．これは ϕ の自由度を表す単位円 S^1 と $\mathbf{d}$ の自由度を表す単位球面 S^2 によって表現される [図 9(a)]．ただし、 $\mathbb{Z}_2$ 対称性があるために、 S^1 および S^2 上の点は原点に対して反対の点と同一視される． S^2 上の閉経路はある点から始まって、同じ点で終わるか、反対点で終わるかの二通りしかない．同じ点で終わる場合は S^1 上でも同じ点で終わらなくてはならないので、経路は S^1 をまわった回数 $N (N \in \mathbb{Z})$ で区別される． S^2 上で反対点で終わる場合は S^1 上でも反対点で終わらなくてはならないので S^1 をまわった回数 $N + 1/2$ で区別される．これらをまとめると π 回転を単位として S^1 上をまわった回数 N

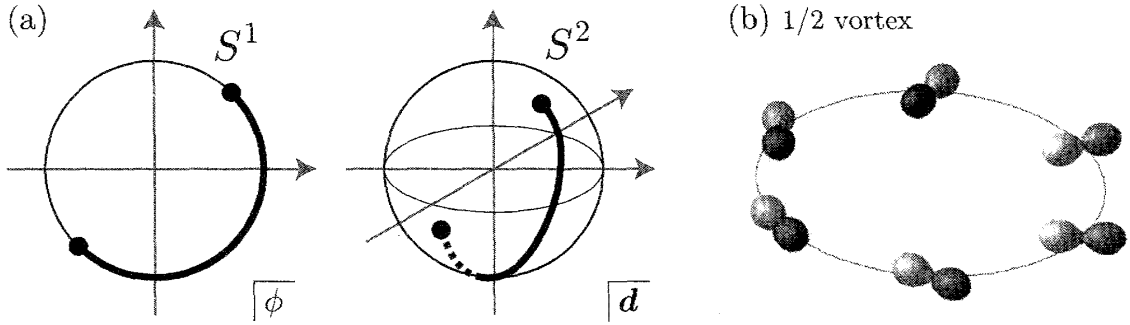


図 9: スピン 1 ポーラー BEC における渦の分類. (a) 秩序変数空間は ϕ を表す S^1 と d の方向を表す S^2 によって表現される. (b) 半整数量子渦の例.

によりすべての渦がラベル付けされる. N が偶数のときは d は連続的に一様な構造に変形でき, N が奇数のときは d は経路に沿って方向が反転する. 超流動カレントの循環は $h/(2M)N$ となり, 先に述べたように循環の単位がスカラー BEC の半分になっている. このことからポーラー相における渦は半整数量子渦と呼ばれる [56, 57, 37, 58]. $N = 1$ の場合に秩序変数の具体例を書くと,

$$\zeta(\varphi) = e^{i\varphi/2} e^{-iF_z\varphi/2} e^{-iF_y\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\varphi/2} e^{-iF_z\varphi/2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (86)$$

となる. ただし, 渦芯から十分離れたある半径 r の閉経路上の秩序変数のみを考えている. これを図示したのが図 9(b) である. $r \rightarrow 0$ では位相の特異点を除くために $m = -1$ 成分がゼロにならなくてはならない. この場合, 一番単純な構造は渦芯上で $\zeta(r=0) = (1, 0, 0)^T$ となればよく, 渦芯は強磁性状態になる. 渦芯の大きさは強磁性相におけるポーラーコア渦と同様に $|c_1|n_{\text{tot}}$ で決まる.

なお, (86) 式で与えられる秩序変数に対して d は

$$d = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 d = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -d \quad (87)$$

となるため (83) 式は満たされ, 半整数量子渦は安定に存在できる. 実際に, ポーラー BEC を回転させると半整数量子渦の渦格子が形成されることが数値計算により示されている [47].

5.2.3 スピン 2 の BEC における渦

スピン 1 で見たように, トポロジカルに安定な渦の種類は秩序変数の持つ対称性により決まる. 秩序変数の一価性から実空間で閉経路を一周すると秩序変数は元に戻らないといけないが, 秩序変数が離散対称性を持つ場合にはこの対称性を利用して「ほどけない」渦をつくることができる. たとえば, 図 4(c) のサイクリック相は $(1, 1, 1)$ 軸の周りにスピンを $2\pi/3$ 回転させ同時に位相を $2\pi/3$ 変えたとともに戻るといふ対称性をもつが, この対称性に対応する渦として, 渦の周りに一周まわるとスピンと位相が同時に $2\pi/3$ 回転するような $1/3$ 量子渦が存在する [58, 59, 60]. スピ

ン1のポーラー相と同様に、サイクリック相の超流動カレントは秩序変数全体の位相の勾配に比例し、 $1/3$ 量子渦のまわりでは超流動カレントの循環が $\hbar/(3M)$ を単位として量子化される。このようにして、秩序変数の対称性を調べることで存在可能な渦を数えあげることができる [58, 61, 1]。特にスピン2のサイクリック相や2軸ネマティック相では等方部分群が非可換群であるため (表2)、対応する渦も非可換となる。非可換量子渦の性質については文献 [62] に詳しい解説があるのでこちらを参照されたい。

5.3 モノポール・2次元スカーミオン

渦は凝縮体における線状の欠陥であったが、モノポールは点状の欠陥である。したがってモノポールを分類するには欠陥を囲むような閉曲面から秩序変数空間への写像を考える必要がある。

スピン1の強磁性相の場合、図7(a)で示される秩序変数空間内の閉曲面は常に一点に縮めることができる。したがってトポロジカルに安定なモノポールは存在しない。ただし、Diracモノポールとよばれる磁気単極子とトポロジカルに同じ構造を作ることは可能である [63]。

一方、ポーラー相ではトポロジカルに安定なモノポールが存在する [64]。図9(a)で示される秩序変数空間において、閉曲面が S^2 をちょうど1回覆うような場合には一点に縮めることができず、非自明な構造となる [図10(a)]。このとき、 S^1 部分における閉曲面は常に一点にすることができるので、 S^1 の自由度、つまり位相の自由度は点欠陥の構造に影響しない。また、一般に $\mathbb{Z}_2$ などの離散対称性は渦以外のトポロジカル励起には影響しない [51]。このようなモノポールは、スカラーBECにおける量子渦の議論と同様に、閉曲面が S^2 を覆う回数 $N_2 (\in \mathbb{Z})$ により、モノポールの種類を区別することができる。 N_2 は巻きつき数 (winding number) とばれ、 $\mathbf{d}$ の空間分布が与えられたとき以下のようにして求めることができる。まず、実空間における閉曲面 Σ として単位球を考え、球面上の座標を極座標 (θ, φ) で表す。秩序変数を $\mathbf{d} = (\sin \beta \cos \alpha, \sin \beta \sin \alpha, \cos \beta)$ とおき、 Σ が $\mathbf{d}$ 空間における領域 $\Sigma_{\mathbf{d}}$ に写されたとすると、巻きつき数は

$$N_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{\mathbf{d}}} \sin \beta d\beta d\alpha = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d\theta d\varphi \sin \beta(\theta, \varphi) \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\theta, \varphi)} \right| \quad (88)$$

で与えられる。最右辺の被積分関数は (α, β) から (θ, φ) への座標変換のヤコビ行列式である。ここで、

$$\partial_i \mathbf{d} = (\partial_i \beta) \mathbf{d}_1 + \sin \beta (\partial_i \alpha) \mathbf{d}_2 \quad (89)$$

$$\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \alpha \\ -\sin \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 \quad (90)$$

を用いると、

$$\mathbf{d} \cdot (\partial_i \mathbf{d} \times \partial_j \mathbf{d}) = \sin \beta [(\partial_i \beta)(\partial_j \alpha) - (\partial_i \alpha)(\partial_j \beta)] \quad (91)$$

となるので, (88) 式は

$$N_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d\theta d\varphi \mathbf{d} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \varphi} \right) \quad (92)$$

と書きかえることができる. さらに, 実空間における任意の閉曲面 Σ として (θ, φ) を媒介変数として $\mathbf{x} = (x_1(\theta, \varphi), x_2(\theta, \varphi), x_3(\theta, \varphi))$ を考えると,

$$N_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d\theta d\varphi \sum_{\mu\nu\lambda} \sum_{ij=1}^3 \epsilon_{\mu\nu\lambda} d_{\mu} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \theta} \frac{\partial d_{\nu}}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial x_j}{\partial \varphi} \frac{\partial d_{\lambda}}{\partial x_j} \right) \quad (93)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} d\theta d\varphi \sum_{ij=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial \theta} \frac{\partial x_j}{\partial \varphi} - \frac{\partial x_j}{\partial \theta} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} \right) \sum_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda} d_{\mu} \frac{\partial d_{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial d_{\lambda}}{\partial x_j} \quad (94)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} dS \sum_{ijk=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{n}_k \sum_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda} d_{\mu} \frac{\partial d_{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial d_{\lambda}}{\partial x_j} \quad (95)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\sum_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda} d_{\mu} (\nabla d_{\nu} \times \nabla d_{\lambda}) \right] \quad (96)$$

となる. ここで $\hat{\mathbf{n}}$ は閉曲面 Σ の法線ベクトル, dS は Σ の面要素で, それぞれ次式で表される.

$$\hat{\mathbf{n}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right) / \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right|, \quad dS = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right| d\theta d\varphi. \quad (97)$$

ポーラー相の場合, (80) 式で定義されるスピнкаレントを用いると巻きつき数は

$$N_z = -\frac{M}{4h} \int_{\Sigma} dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\sum_{\mu} d_{\mu} (\nabla \times \mathbf{v}_{\mu}^{\text{spin}}) \right] = \frac{M}{4h} \int_{\Sigma} dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\sum_{\mu} (\nabla d_{\mu}) \times \mathbf{v}_{\mu}^{\text{spin}} \right] \quad (98)$$

と書くことができる.

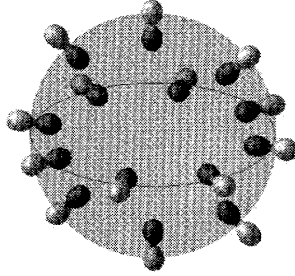
具体的なモノポールの構造として $N_2 = 1$ の場合を図 10(a) に示した. ここでは球対称な構造を仮定して, $\mathbf{d} = \mathbf{r}/r$ とおいた. 原点では秩序変数が定義できないので欠陥となる. ただし, 渦の場合と異なり, 特異点上で秩序変数を連続的に強磁性状態にはできず, 特異点上は秩序変数の密度がゼロとなる.

モノポールは 3 次元空間における点欠陥であるが, 同じトポロジカル不変量により, 2 次元空間における欠陥のない構造を分類することができる. 2 次元平面で境界条件として境界で秩序変数が一定だとすると, 境界上の点を同一視することができ, 2 次元の閉曲面になる [境界が無限遠にある場合の球面から平面への写像を図 10(b) に示した]. したがってこれまでと全く同じ議論によりトポロジカル不変量を定義することができる. ただし, 平面を考えているので

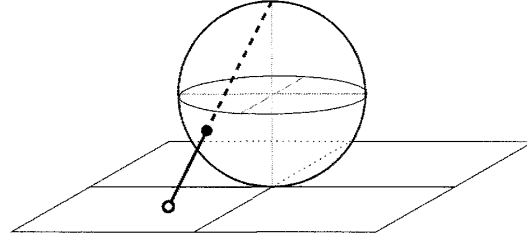
$$N_2 = \frac{1}{8\pi} \iint dx dy \sum_{ij=1}^2 \sum_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{ij} \epsilon_{\mu\nu\lambda} d_{\mu} \frac{\partial d_{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial d_{\lambda}}{\partial x_j} \quad (99)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint dx dy \sum_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda} d_{\mu} \frac{\partial d_{\nu}}{\partial x} \frac{\partial d_{\lambda}}{\partial y} \quad (100)$$

(a) monopole



(b)



(c) 2D skyrmion

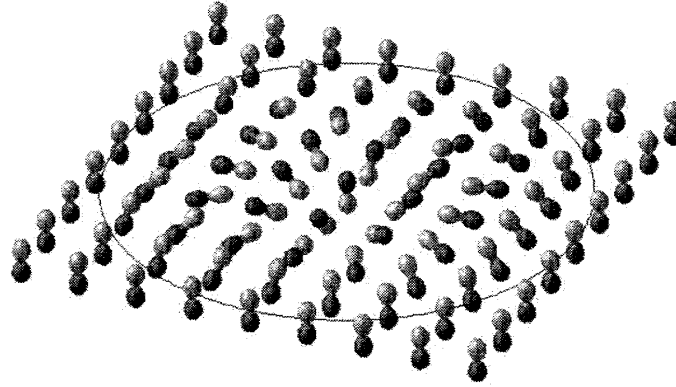


図 10: (a) スピン 1 ポーラー相における $N_2 = 1$ のモノポール構造. (b) 球面 S^2 から平面 $\mathbb{R}^2$ への写像. 球面と南極で接する平面を考え, S^2 上の点を, 北極とこの点を繋ぐ直線と平面の交点に対応させる. (c) 2次元スカーミオン. (b) の写像により (a) のモノポールを 2次元平面に展開すると (c) の 2次元スカーミオンとなる.

という簡単な形に書き換えることができる. ここで $\epsilon_{ijk\dots}$ は Levi-Civita 記号で $ijk\dots$ が $(1, 2, 3, \dots)$ の偶置換であれば $+1$, 奇置換であれば -1 , それ以外では 0 となる. 積分範囲は考えている 2次元空間の全領域である. 具体的な秩序変数の空間構造を図 10(c) に示した. このような構造は 2次元スカーミオン, または単にスカーミオンとよばれ, 境界条件を固定している限りトポロジカルに安定である.

5.4 スカーミオン

2次元スカーミオンの議論と同様にして, 3次元空間においても境界条件として境界で秩序変数が一定だとするとトポロジカルに安定な構造をつくることができる [65, 66]. この場合, 実空間 $\mathbb{R}^3$ は境界条件を加えると 3次元球面 S^3 と同相となり, 写像 $S^3 \rightarrow R$ の分類がトポロジカル励起の分類となる. スピン 1 のスピノル BEC の場合, 強磁性相, ポーラー相ともに, このような 3次元の安定な構造を作ることができる. ただし, ポーラー相の場合はトポロジカル不変量の意味が異なるので区別してノット (knot) と呼び次節で説明する.

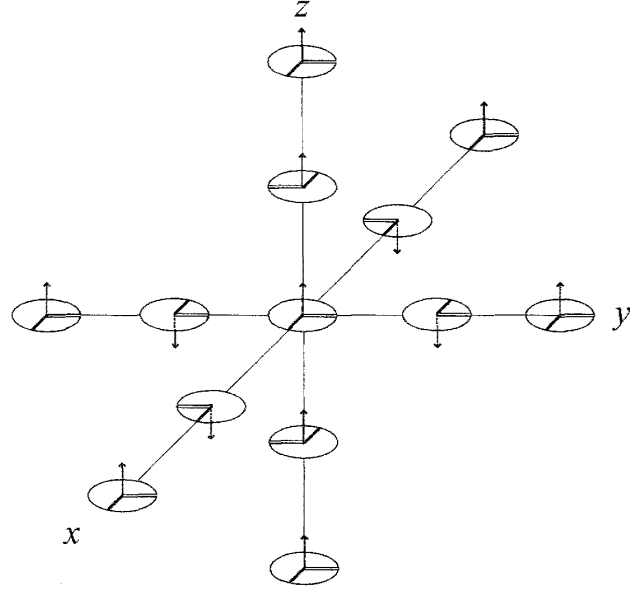


図 11: スピン 1 強磁性相におけるスカーミオン。矢印が磁化 $\mathbf{f}$ の方位を表し円盤とその上の 2 重線が球面調和関数表示 [図 3(a)] の円盤と位相ゼロの方向を表している。無限遠方で秩序変数は揃っているが、原点に向かう間に場所ごとに異なる方向に回転し、原点ではまた同じ方向を向く。

スピン 1 の強磁性相の秩序変数空間は $SO(3)$ で、図 7(a) のように単位ベクトル $\mathbf{n}$ と ω で秩序変数を表現することができる。これより、4 次元単位ベクトル

$$\mathbf{m} = (n_x \cos \frac{\omega}{2}, n_y \cos \frac{\omega}{2}, n_z \cos \frac{\omega}{2}, \sin \frac{\omega}{2}), \quad (101)$$

$$\mathbf{n} \in S^2, 0 \leq \omega < 2\pi \quad (102)$$

を導入すると、 $\mathbf{m}$ の取りうる空間は $S^3/\mathbb{Z}_2$ となり、 $SO(3) \cong S^3/\mathbb{Z}_2$ であることがわかる。 $\mathbb{Z}_2$ 対称性は ω の範囲を 2π まで広げたため、 $(\mathbf{n}, \omega)$ と $(-\mathbf{n}, 2\pi - \omega)$ が同じ回転になることからくる。しかし離散対称性は高次のトポロジカル励起を考える際には効かないので、実質 $S^3 \rightarrow S^3$ の写像を考えることになる。これは、前節の $S^2 \rightarrow S^2$ と全く同様にしてトポロジカル不変量を定義できる。

$$N_3 = \frac{1}{12\pi^2} \iiint dx dy dz \sum_{ijk=1}^3 \sum_{\mu\nu\lambda\sigma=1}^4 \epsilon_{ijk} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} m_\mu \frac{\partial m_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial m_\lambda}{\partial x_j} \frac{\partial m_\sigma}{\partial x_k} \quad (103)$$

具体的に $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r$ とした時の構造を図 11 に図示した。秩序変数は無限遠で $\psi = \sqrt{n_{\text{tot}}}(1, 0, 0)^T$ となるとし、 ω は無限遠で $\omega(\infty) = 0$ 、原点で $\omega(0) = 2\pi$ とした。これは、実空間全体が秩序変数空間 S^3 を 1 回覆っているので不変量 $N_3 = 1$ のスカーミオンである。

5.5 ノット

スカーミオンの一種で、トポロジカルに安定な欠陥をもたない構造がポーラー相においても生成できる [48]。ただし、トポロジカル不変量の定義が通常のスカーミオンとは異なる。ポーラー相

の秩序変数空間のうち、高次元のトポロジカル励起に関与するのは $\mathbf{d}$ の自由度である S^2 で、 S^3 から S^2 への写像によりノットがつくられる。ここで、秩序変数空間 (S^2) の次元が実空間 (S^3) の次元より一つ低い点が前節のスカーミオンとの重要な違いである。実空間の次元の方が大きいため、秩序変数空間のある一点 $\mathbf{d}$ に対する逆像は実空間では閉曲線となる [図 12(a)]。ノットとは、 S^2 上の任意の 2 点に対する逆像がどのように絡んでいるかにより分類されるトポロジカル励起である [67]。

トポロジカル不変量は S^2 上の面要素

$$\mathcal{F}_{ij} = \mathbf{d} \cdot (\partial_i \mathbf{d} \times \partial_j \mathbf{d}) \quad (104)$$

に対して、

$$\mathcal{F}_{ij} = \partial_i \mathcal{A}_j - \partial_j \mathcal{A}_i \quad (105)$$

となる $\mathcal{A}$ を求め、これらの積の積分として

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} \sum_{ijk=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathcal{F}_{ij} \mathcal{A}_k \quad (106)$$

と定義される。これは絡み数 (linking number) または Hopf チャージと呼ばれる。

具体的にはトポロジカル不変量は次のようにして計算できる。まず、 $S^3 \rightarrow S^3$ の写像として 4 次元単位ベクトル $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ 、またはこれと等価な 2 次元の複素単位ベクトル

$$Z \equiv \begin{pmatrix} Z_1(\mathbf{r}) \\ Z_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1(\mathbf{r}) + im_2(\mathbf{r}) \\ m_3(\mathbf{r}) + im_4(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (107)$$

を考える [図 12(b)]。ただし、 $|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = \sum_i m_i^2 = 1$ である。 Z から $\mathbf{d}$ の写像として、Hopf 写像

$$\mathbf{d} = Z^\dagger \boldsymbol{\sigma} Z \quad (108)$$

を考える。 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ はパウリ行列で、具体的に成分を書くと次のようになる。

$$d_x = Z_1^* Z_2 + Z_2^* Z_1, \quad (109a)$$

$$d_y = -i(Z_1^* Z_2 - Z_2^* Z_1), \quad (109b)$$

$$d_z = |Z_1|^2 - |Z_2|^2. \quad (109c)$$

$|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = 1$ なので $|\mathbf{d}|^2 = 1$ となっていることが確認できる。(108) 式を (104) 式に代入して整理すると

$$\mathcal{F}_{ij} = i \left[(\partial_i Z^\dagger)(\partial_j Z) - (\partial_j Z^\dagger)(\partial_i Z) \right] \quad (110)$$

となり、(105) 式を満たすように $\mathcal{A}_i$ を決めると

$$\mathcal{A}_i = \frac{i}{2} \left[Z^\dagger (\partial_i Z) - (\partial_i Z^\dagger) Z \right] \quad (111)$$

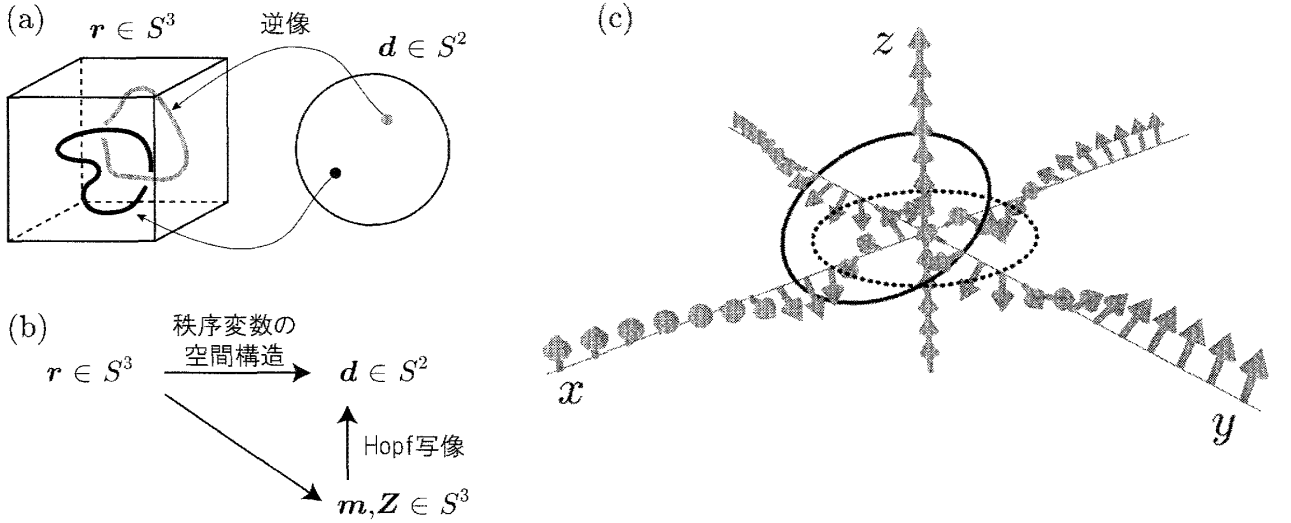


図 12: (a) ノットの絡み数の概念図. (b) トポロジカル不変量の計算. (c) ポーラー相における $Q = 1$ のノット. 矢印は $\mathbf{d}$ の方向を表している.

と求まる. ここで, $\mathbf{d}$ が与えられたとき Z のとり方には $U(1)$ の任意性があり, 実際に $Z \rightarrow e^{i\gamma} Z$ という変換に対して $\mathbf{d}$ は不変であるという点に注意されたい. これは Hopf 写像が $S^3 \rightarrow S^2$ と次元を一つ下げる写像であるためである. この Z の変換に対して $\mathcal{F}_{ij}$ は不変に保たれるが, $\mathcal{A}_i$ は $\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_i + \partial_i \gamma$ と変換され γ 依存性が残る. しかしながら, (106) 式に代入すると i, j, k について和をとることで γ は消えるので, Q は $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ のみで決まる, すなわち $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ の空間構造を分類する不変量となっている. また, (107) 式を用いて Q を $\mathbf{m}$ で書き直すと,

$$Q = \frac{1}{12\pi^2} \int_{R^3} d\mathbf{r} \sum_{ijk=1}^3 \sum_{\mu\nu\lambda\sigma=1}^4 \epsilon_{ijk} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} m_\mu \frac{\partial m_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial m_\lambda}{\partial x_j} \frac{\partial m_\sigma}{\partial x_k} \quad (112)$$

となり, $S^3 \rightarrow S^3$ の写像を特徴付けるトポロジカル不変量に一致する.

具体的な構造としては, 例えば無限遠方で $\zeta = (0, 1, 0)^T$ (すなわち $\mathbf{d} = \hat{z}$) とし強磁性相におけるスカーミオンと同様に, 原点にむかって $\mathbf{r}$ 方向のまわりに 2π ひねれば $Q = 1$ のノットとなる. このときの秩序変数は

$$\zeta(\mathbf{r}) = e^{-i\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}\omega(\mathbf{r})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-i\varphi} \sin \theta \sin \frac{\omega(r)}{2} \left(\sin \frac{\omega(r)}{2} \cos \theta + i \cos \frac{\omega(r)}{2} \right) \\ 1 - 2 \sin^2 \frac{\omega(r)}{2} \sin^2 \theta \\ \sqrt{2}e^{i\varphi} \sin \theta \sin \frac{\omega(r)}{2} \left(\sin \frac{\omega(r)}{2} \cos \theta - i \cos \frac{\omega(r)}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (113)$$

となる. ここで (r, θ, φ) は極座標で $\omega(\infty) = 0, \omega(0) = 2\pi$ とした. これより $\mathbf{d}$ の空間変化は,

$$\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\zeta_1 + \zeta_{-1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\zeta_1 + \zeta_{-1}}{\sqrt{2}i} \\ \zeta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin^2 \frac{\omega(r)}{2} \sin 2\theta + \sin \varphi \sin \omega(r) \sin \theta \\ \sin \varphi \sin^2 \frac{\omega(r)}{2} \sin 2\theta - \cos \varphi \sin \omega(r) \sin \theta \\ 1 - 2 \sin^2 \frac{\omega(r)}{2} \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (114)$$

となる．これを図示すると図 12(c) のようになる．図 12(c) では $\mathbf{d} = \hat{x}$ となる点を実線， $\mathbf{d} = -\hat{x}$ となる点を破線で示した．これらは閉曲線をなし，絡み数 1 の結び目となっている⁸．このような結び目構造は $\mathbf{d} = \hat{x}$ で一様にそろったポーラー BEC に四重極磁場をかけることによりつくることができる．しかしこの構造では (83) 式が満たされないために局所的に磁化が生じポーラー状態が壊れてノットが不安定となる [48]．

6 おわりに

本稿では，スピン内部自由度を持ったボース・アインシュタイン凝縮体 (スピノル BEC) におけるトポロジカル励起について解説した．スピノル BEC では，超流動 ^3He や異方的超伝導と同様に，内部自由度を持った系の特徴として，相互作用パラメータに依存して様々な基底状態が実現する．得られる凝縮相はスピン 1 の BEC では p 波，スピン 2 の BEC では d 波の超伝導・超流動と類似した対称性を持つ．トポロジカル励起はこれらの相における「破れた対称性」を表す秩序変数空間のトポロジーで決まり，スカラー BEC に比べ，分数量子渦，モノポール，スカーミオンなど様々なトポロジカル励起が出現しうる．

最後に，本稿で無視した外部磁場のもたらす効果について補足しておく．本稿では理想的に外部磁場がゼロという状況を考えたが，実際の実験では外部磁場の効果は無視することができない．しかし，真空中で孤立した BEC では (双極子相互作用の効果を無視すれば) スピンを保存するので，1 次ゼーマン効果はラーモア歳差運動を起こすだけである．具体的に GP 方程式中で秩序変数を $\psi_m \rightarrow \psi_m e^{-impt/\hbar}$ と変換すれば 1 次ゼーマン効果を取り除くことができる．スピンを保存するために全体で一様に磁化することはできず，自発磁化が生じる場合はかならずスピントクスターが生じる．一方，2 次ゼーマン効果は，凝縮状態の内部自由度を変える．たとえば，スピン 1 の BEC で相互作用が強磁性的 ($c_1 < 0$) であっても， q が正で十分大きければ， $m = 0$ の状態，すなわちポーラー状態が基底状態となる． q の値を下げれば自発磁化が生じるが，2 次ゼーマン相互作用と強磁性相互作用の競合により自発磁化は外部磁場と垂直方向に生じる [7, 68]．磁化の方向の自由度のみに着目すれば，この系は XY スピンモデルに対応する．秩序変数空間は位相の自由度と磁化の方位の自由度から $R = U(1) \times U(1)$ となり，位相の渦とスピンの渦が独立に存在する． q の値を変えることでスピンについて $U(1)$ の破れる相転移を起こすことができ，実験で自発磁化が生じるダイナミクスが観測されている [14]．実験ではスピン渦が形成される様子も観測され，KZ 機構との関連が議論されている [69, 70, 71]．

また，本稿ではトポロジカルな安定性についてのみ議論したが，これらのトポロジカル励起が実現するかどうかを調べるにはエネルギー的な安定性の議論も必要である．実際に，ノットはトポロジカルには安定であるが，GP 方程式で時間発展を調べると崩壊することがわかっている [48]．また，渦やモノポールの欠陥内部の構造は，これらの欠陥のエネルギーが最小になるように決まる [72]．このようなエネルギー的な安定性の議論やトポロジカル励起のダイナミクスについては，今後の課題となっている．

⁸絡み数が 1 の結び目とは，平面にループを投影したときにループの上下を 1 回入れ替えてほどける結び目を指す．

謝辞

本解説の内容は上田正仁氏(東京大学), 新田宗土氏(慶応義塾大学)との共同研究をもとに書かれたものである。また, 斎藤弘樹氏(電気通信大学), 中原幹夫氏(近畿大学), 小林未知数氏(東京大学), 工藤一恵氏(お茶の水女子大), 小林伸吾氏(東京大学)には有益な議論をいただきました。各氏に厚く感謝申し上げます。

付録

A 一粒子ハミルトニアン(1)の対角化

$[H_{\text{sp}}, F_z] = 0$ よりハミルトニアン H_{sp} は F_z を保存し, その固有値 m が良い量子数である。 $|I, m_I; S, m_S\rangle$ の基底で書いたとき, F_z の固有値が m となるような状態は

$$|m, \uparrow\rangle \equiv |I, m_I = m - \frac{1}{2}; S = \frac{1}{2}, m_S = +\frac{1}{2}\rangle \quad (115)$$

$$|m, \downarrow\rangle \equiv |I, m_I = m + \frac{1}{2}; S = \frac{1}{2}, m_S = -\frac{1}{2}\rangle \quad (116)$$

の2つだけなので, H_{sp} の行列要素のうち $m \neq m'$ となるような非対角項は現れない。したがって, $|m, \uparrow\rangle, |m, \downarrow\rangle$ を基底とした 2×2 行列を対角化すればよい。具体的にこの行列要素を計算すると,

$$\begin{pmatrix} \langle m, \uparrow | H_{\text{sp}} | m, \uparrow \rangle & \langle m, \uparrow | H_{\text{sp}} | m, \downarrow \rangle \\ \langle m, \downarrow | H_{\text{sp}} | m, \uparrow \rangle & \langle m, \downarrow | H_{\text{sp}} | m, \downarrow \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + A_1 & A_2 \\ A_2 & A_0 - A_1 \end{pmatrix} \quad (117)$$

$$A_0 = -\frac{A}{4} - g_N \mu_N m B, \quad (118)$$

$$A_1 = \frac{mA}{2} + \frac{g_e \mu_B + g_N \mu_N}{2} B, \quad (119)$$

$$A_2 = \frac{A}{2} \sqrt{\left(I + \frac{1}{2}\right)^2 - m^2} \quad (120)$$

となるので, 固有エネルギーと対応する固有状態は, 以下のように求まる。

$$E_{m, \pm} = -\frac{A}{4} - g_N \mu_N m B \pm \lambda \quad (121a)$$

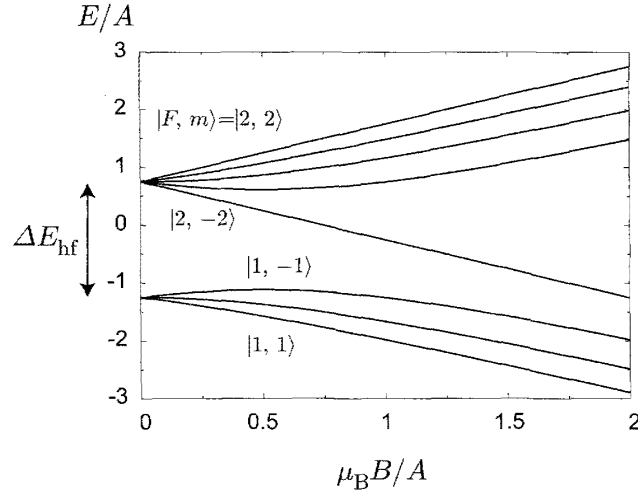
$$|m, \pm\rangle = \sqrt{\frac{\lambda \pm A_1}{2\lambda}} |m, \uparrow\rangle \pm \sqrt{\frac{\lambda \mp A_1}{2\lambda}} |m, \downarrow\rangle \quad (121b)$$

$$\lambda \equiv \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \frac{A(I + \frac{1}{2})}{2} \sqrt{1 + \frac{2(g_e \mu_B + g_N \mu_N)mB}{A(I + \frac{1}{2})^2} + \left[\frac{(g_e \mu_B + g_N \mu_N)B}{A(I + \frac{1}{2})}\right]^2} \quad (121c)$$

ただし $m = \pm(I + 1/2)$ の場合については $|m = I + \frac{1}{2}, \uparrow\rangle$ および $|m = -I - \frac{1}{2}, \downarrow\rangle$ が固有状態で, 固有エネルギーはそれぞれ

$$E_{m=I+\frac{1}{2},+} = \frac{AI}{2} + \left(\frac{g_e \mu_B}{2} - g_N \mu_N I\right) B \quad (122a)$$

$$E_{m=-(I+\frac{1}{2}),+} = \frac{AI}{2} - \left(\frac{g_e \mu_B}{2} - g_N \mu_N I\right) B \quad (122b)$$


 図 13: $I = 3/2$ の場合の 1 粒子スペクトル

となっている. $I = 3/2$ の場合について, 固有エネルギーを磁場の関数として図 13 に示す.

$B = 0$ の時は,

$$E_{m,+}^{(0)} = \frac{AI}{2}, \quad E_{m,-}^{(0)} = -\frac{A(I+1)}{2} \quad (123)$$

となり, それぞれ $F = I + 1/2$ および $F = I - 1/2$ の固有エネルギーに一致する. このことから, $B \neq 0$ では F は良い量子数ではないが, 低磁場 ($\mu_B B \ll A$) では近似的に $E_{m,+}$ のブランチを $F = I + 1/2$, $E_{m,-}$ のブランチを $F = I - 1/2$ と呼ぶことにする. $\mu_B B/A \ll 1$ として (121a) 式を B の 2 次まで展開すると

$$E_{m,+} = \frac{AI}{2} + \frac{g_e \mu_B B}{2I+1} m - \frac{2(g_e \mu_B B)^2}{A(2I+1)^3} m^2 + \frac{(g_e \mu_B B)^2}{2A(2I+1)} \quad (124)$$

$$E_{m,-} = -\frac{A(I+1)}{2} - \frac{g_e \mu_B B}{2I+1} m + \frac{2(g_e \mu_B B)^2}{A(2I+1)^3} m^2 - \frac{(g_e \mu_B B)^2}{2A(2I+1)} \quad (125)$$

となる. ただし, $g_N \mu_N \ll g_e \mu_B$ なので $g_N \mu_N / g_e \mu_B$ は無視した. $F = I \pm 1/2$ で各々 $m = 0$ を基準としてエネルギーを取り直すと, (122) 式まで含めて

$$E_{m,+} - E_{0,+} = \frac{g_e \mu_B B}{2I+1} m - \frac{2(g_e \mu_B B)^2}{A(2I+1)^3} m^2 = g_F \mu_B m B - \frac{(g_F \mu_B B)^2}{\Delta E_{\text{hf}}} \quad (126)$$

$$E_{m,-} - E_{0,-} = -\frac{g_e \mu_B B}{2I+1} m + \frac{2(g_e \mu_B B)^2}{A(2I+1)^3} m^2 = g_F \mu_B m B + \frac{(g_F \mu_B B)^2}{\Delta E_{\text{hf}}} \quad (127)$$

と書ける. ここで, ΔE_{hf} は超微細分裂エネルギー

$$\Delta E_{\text{hf}} \equiv E_{m,+}^{(0)} - E_{m,-}^{(0)} = \frac{A(2I+1)}{2}, \quad (128)$$

g_F はハイパーファインスピンに対するランデの g 因子で,

$$g_F \equiv \begin{cases} \frac{g_e}{2I+1} & \text{for } F = I + \frac{1}{2} \\ -\frac{g_e}{2I+1} & \text{for } F = I - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (129)$$

と定義した. $F = I - 1/2$ では電子スピンとハイパーファインスピンが反平行になっているために g 因子が負で, 磁場に対する応答が電子と逆になっている (図 13 参照).

B スピン行列

B.1 スピン 1

スピン 1 のスピン行列は

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, F_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, F_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (130)$$

となる. これを用いてスピンのオイラー回転に対する行列は次のように計算できる.

$$g = e^{-iF_z\alpha} e^{-iF_y\beta} e^{-iF_z\gamma} \quad (131)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\beta}{2} & -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \sin^2 \frac{\beta}{2} \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \cos \beta & -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2 \frac{\beta}{2} & \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \cos^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} \quad (132)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)} \cos^2 \frac{\beta}{2} & -e^{-i\alpha} \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & e^{-i(\alpha-\gamma)} \sin^2 \frac{\beta}{2} \\ e^{-i\gamma} \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \cos \beta & -e^{i\gamma} \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \\ e^{i(\alpha-\gamma)} \sin^2 \frac{\beta}{2} & e^{i\alpha} \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & e^{i(\alpha+\gamma)} \cos^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad (133)$$

B.2 スピン 2

スピン 2 のスピン行列は

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, F_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, F_z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (134)$$

となる. これを用いてスピンのオイラー回転に対する行列は次のように計算できる.

$$g = e^{-iF_z\alpha} e^{-iF_y\beta} e^{-iF_z\gamma} \quad (135)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i(2\alpha+2\gamma)} C^4 & -2e^{-i(2\alpha+\gamma)} C^3 S & \sqrt{6} e^{-2i\alpha} C^2 S^2 & -2e^{-i(2\alpha-\gamma)} C S^3 & e^{-i(2\alpha-2\gamma)} S^4 \\ 2e^{-i(\alpha+2\gamma)} C^3 S & -2e^{-i(\alpha+\gamma)} C^2 S^2 & -\sqrt{\frac{3}{8}} e^{-i\alpha} \sin 2\beta & 2e^{-i(\alpha-\gamma)} C^2 S^2 & -2e^{-i(\alpha-2\gamma)} C S^3 \\ \sqrt{6} e^{-2i\gamma} C^2 S^2 & \sqrt{\frac{3}{8}} e^{-i\gamma} \sin 2\beta & \frac{1}{4} (1 + 3 \cos 2\beta) & -\sqrt{\frac{3}{8}} e^{i\gamma} \sin 2\beta & \sqrt{6} e^{2i\gamma} C^2 S^2 \\ 2e^{i(\alpha-2\gamma)} C S^3 & 2e^{i(\alpha-\gamma)} C^2 S^2 & \sqrt{\frac{3}{8}} e^{i\alpha} \sin 2\beta & -2e^{i(\alpha+\gamma)} C^2 S^2 & -2e^{i(\alpha+2\gamma)} C^3 S \\ e^{i(2\alpha-2\gamma)} S^4 & 2e^{i(2\alpha-\gamma)} C S^3 & \sqrt{6} e^{2i\alpha} C^2 S^2 & 2e^{i(2\alpha+\gamma)} C S^3 & e^{i(2\alpha+2\gamma)} S^4 \end{pmatrix} \quad (136)$$

ただし, $C = \cos \frac{\beta}{2}, S = \sin \frac{\beta}{2}$ とおいた.

参考文献

- [1] M. Ueda and Y. Kawaguchi: arXiv:1001.2072 (2010) .
- [2] C. J. Pethick and H. Smith: *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, 2nd edition, Cambridge, U.K., 2008)
- [3] M. Ueda: *Fundamentals and new frontiers of Bose-Einstein condensation* (World Scientific, Singapore, 2010)
- [4] 大見哲巨: 物性研究 **78** (2002) 80.
- [5] T. Ohmi and K. Machida: J. Phys. Soc. Jpn. **67** (1998) 1822.
- [6] T.-L. Ho: Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 742.
- [7] J. Stenger, S. Inouye, D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle: Nature **396** (1998) 345.
- [8] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, and W. Ketterle: Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 2027.
- [9] H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle: Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 2228.
- [10] N. D. Mermin: Reviews of Modern Physics **51** (1979) 591.
- [11] L. Michel: Reviews of Modern Physics **52** (1980) 617.
- [12] D. Vollhardt and P. Wölfle: *The Superfluid Phases of Helium 3* (Taylor & Francis, London, New York, 1990)
- [13] J. M. Higbie, L. E. Sadler, S. Inouye, A. P. Chikkatur, S. R. Leslie, K. L. Moore, V. Savalli, and D. M. Stamper-Kurn: Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 050401.
- [14] L. E. Sadler, J. M. Higbie, S. R. Leslie, M. Vengalattore, and D. M. Stamper-Kurn: Nature **443** (2006) 312.
- [15] H. Schmaljohann, M. Erhard, J. Kronjäger, M. Kottke, S. van Staa, L. Cacciapuoti, J. J. Arlt, K. Bongs, and K. Sengstock: Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 040402.
- [16] M.-S. Chang, C. D. Hamley, M. D. Barrett, J. A. Sauer, K. M. Fortier, W. Zhang, L. You, and M. S. Chapman: Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 140403.
- [17] T. Kuwamoto, K. Araki, T. Eno, and T. Hirano: Phys. Rev. A **69** (2004) 063604.

- [18] F. Gerbier, A. Widera, S. Fölling, O. Mandel, and I. Bloch: Phys. Rev. A **73** (2006) 041602.
- [19] L. D. Landau and E. M. Lifshitz: *Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory) 3rd edition* (Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 1981)
- [20] S. Yi and L. You: Phys. Rev. A **63** (2001) 053607.
- [21] M. A. Baranov: Physics Reports **464** (2008) 71.
- [22] T. Lahaye, C. Menotti, L. Santos, M. Lewenstein, and T. Pfau: Rep. Prog. Phys. **72** (2009) 126401.
- [23] Y. Kawaguchi, H. Saito, and M. Ueda: Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 080405.
- [24] L. Santos and T. Pfau: Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 190404.
- [25] Y. Kawaguchi, H. Saito, and M. Ueda: Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 130404.
- [26] S. Yi and H. Pu: Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 020401.
- [27] M. Takahashi, S. Ghosh, T. Mizushima, and K. Machida: Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 260403.
- [28] Y. Kawaguchi, H. Saito, and M. Ueda: Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 110406.
- [29] A. Widera, F. Gerbier, S. Fölling, T. Gericke, O. Mandel, and I. Bloch: New Journal of Physics **8** (2006) 152.
- [30] E. G. M. van Kempen, S. J. J. M. F. Kokkelmans, D. J. Heinzen, and B. J. Verhaar: Phys. Rev. A **88** (2002) 093201.
- [31] A. Crubellier, O. Dulieu, F. Masnou-Seeuws, M. E. H. Knockel, and E. Tiemann: European Physical Journal D **6** (1999) 211.
- [32] C. V. Ciobanu, S.-K. Yip, and T.-L. Ho: Phys. Rev. A **61** (2000) 033607.
- [33] M. Ueda and M. Koashi: Phys. Rev. A **65** (2002) 063602.
- [34] N. D. Mermin: Phys. Rev. A **9** (1974) 868.
- [35] C. Bruder and D. Vollhardt: Phys. Rev. B **34** (1986) 131.
- [36] T.-L. Ho and V. B. Shenoy: Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 2595.
- [37] F. Zhou: Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 080401.

- [38] A. M. Turner, R. Barnett, E. Demler, and A. Vishwanath: Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 190404.
- [39] J. L. Song, G. W. Semenoff, and F. Zhou: Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 160408.
- [40] S. Uchino, M. Kobayashi, and M. Ueda: Phys. Rev. A **81** (2010) 063632.
- [41] T. W. B. Kibble: J. Phys. A **9** (1976) 1387.
- [42] W. H. Zurek: Nature **317** (1985) 505.
- [43] A. E. Leanhardt, A. Görlitz, A. P. Chikkatur, D. Kielpinski, Y. Shin, D. E. Pritchard, and W. Ketterle: Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 190403.
- [44] A. E. Leanhardt, Y. Shin, D. Kielpinski, D. E. Pritchard, and W. Ketterle: Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 140403.
- [45] T. Mizushima, N. Kobayashi, and K. Machida: Phys. Rev. A **70** (2004) 043613.
- [46] W. V. Pogosov, R. Kawate, T. Mizushima, and K. Machida: Phys. Rev. A **72** (2005) 063605.
- [47] A.-C. Ji, W. M. Liu, J. L. Song, and F. Zhou: Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 010402.
- [48] Y. Kawaguchi, M. Nitta, and M. Ueda: Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 180403.
- [49] K. Kudo and Y. Kawaguchi: Phys. Rev. A **82** (2010) 053614.
- [50] N. D. Mermin and T.-L. Ho: Phys. Rev. Lett. **36** (1976) 594.
- [51] M. Nakahara: *Geometry, Topology and Physics, 2nd edition* (Taylor & Francis, New York, 2003)
- [52] M. Nakahara, T. Isoshima, K. Machida, S.-i. Ogawa, and T. Ohmi: Physica B: Condensed Matter **284–288** (2000) 17.
- [53] T. Isoshima, M. Nakahara, T. Ohmi, and K. Machida: Phys. Rev. A **61** (2000) 063610.
- [54] M. Kumakura, T. Hirokuni, M. Okano, Y. Takahashi, and T. Yabuzaki: Phys. Rev. A **73** (2006) 063605.
- [55] T. Kuwamoto, H. Usuda, S. Tojo, and T. Hirano: Journal of the Physical Society of Japan **79** (2010) 034004.
- [56] U. Leonhardt and G. E. Volovik: JETP Lett. **72** (2000) 46.

- [57] T. Isoshima, K. Machida, and T. Ohmi: J. Phys. Soc. Jpn. **70** (2001) 1604.
- [58] H. Mäkelä, Y. Zhang, and K.-A. Suominen: J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 8555.
- [59] G. W. Semenoff and F. Zhou: Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 100401.
- [60] M. Kobayashi, Y. Kawaguchi, M. Nitta, and M. Ueda: Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 115301.
- [61] R. Barnett, A. Turner, and E. Demler: Phys. Rev. A **76** (2007) 013605.
- [62] 小林未知数: 物性研究 **94** (2010) 53.
- [63] C. M. Savage and J. Ruostekoski: Phys. Rev. A **68** (2003) 043604.
- [64] H. T. C. Stoof, E. Vliegen, and U. A. Khawaja: Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 120407.
- [65] U. A. Khawaja and H. Stoof: Nature **411** (2001) 918.
- [66] U. A. Khawaja and H. Stoof: Phys. Rev. A **64** (2001) 043612.
- [67] L. Faddeev and A. J. Niemi: Nature **387** (1997) 58.
- [68] K. Murata, H. Saito, and M. Ueda: Phys. Rev. A **75** (2007) 013607.
- [69] A. Lamacraft: Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 160404.
- [70] M. Uhlmann, R. Schützhold, and U. R. Fischer: Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 120407.
- [71] H. Saito, Y. Kawaguchi, and M. Ueda: Phys. Rev. A **76** (2007) 043617.
- [72] M. Kobayashi, Y. Kawaguchi, and M. Ueda: arXiv:0907.3716v1 (2009) .