

クライニ群のエルゴード性に関する

諸予想と Sullivan の諸定理

京大理 谷口雅彦
(Masahiko Taniguchi)

§1. 準備と背景. — Ahlfors 予想

$(n+1)$ 次元の hyperbolic space H^{n+1} とは $(n+1)$ 次元単位球 $B^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 < 1\}$ 上に Poincaré 計量 $ds = \frac{2|dx|}{1-|x|^2}$ ($|dx|$: 2 -形式ノルム要素) を入れた complete manifold である. 本稿では H^{n+1} の isometry のなす discrete group Γ についての Sullivan による最近の結果のいくつかを紹介する.

$n=1$, または 2 の場合には, かかる Γ はリーマン環面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の一次分岐変換の群と見なせ. クライニ群と呼ばれている. ($n=1$ の場合には特にフックス群とも呼ばれる) クライニ群は Poincaré 以来, 函数論における重要な研究課題であったが, 近年, 3 -manifold の研究との関連で Thurston により, とも注目されるようになった (cf. [9]). なお一般に H^{n+1} の isometry は $\hat{\mathbb{R}}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$ の Möbius 変換に拡張できる. かかる変換の基本的な性質については [2] を参照.

簡単のため、 Γ を torsion free とすると、 $M_\Gamma = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$ は complete hyperbolic manifold である。 $\partial\mathbb{H}^{n+1} \cong \partial B^{n+1} = S^n$ と考えることに対して、自然な“境界”を考えることができる。 Γ は $\mathbb{H}^{n+1}$ の“境界” S^n 上にも作用していると考え、 Γ の limit set $L(\Gamma)$ は、一点 $x \in \mathbb{H}^{n+1} (= B^{n+1})$ の Γ による orbit の $\mathbb{R}^{n+1}$ 内での集積点全体とする（これは x のとり方に依らない）。このとき、 $S^n - L(\Gamma)$ 上では Γ は properly discontinuous に作用し、 $\partial M_\Gamma = (S^n - L(\Gamma))/\Gamma$ は M_Γ の自然な境界と考えることができる。

群 Γ の研究と $M_\Gamma \cup \partial M_\Gamma$ の研究とは、ほぼ相互に移行し合うことができるが、その際に障害となるものが $L(\Gamma)$ である。この方面の未解決の予想として、次のものがある。

Ahlfors 予想 有限生成の n -群 Γ に対しては、

$$m(L(\Gamma)) = 0, \text{ または } m(S^n - L(\Gamma)) = 0$$

(ただし、 m は球面測度)

注) Γ が有限生成でなければ上の主張が成り立たないことは容易にわかる。また Γ が Fuchs 群 ($n=1$) の場合には、Ahlfors 予想が成立することは古くから知られている。本来の n -群については近年 Thurston により重要な結果が

あ、たものの、今だに未解決である。(cf. [10] 定理 8.12.3
及び系 8.12.4. なお、Sullivan も異なる形で Ahlfors予想の
解決に重要な寄与をした。これについては補足 I) を参照)

なお測度論的には、 $L(P)$ よりも、一点 $x \in \mathbb{H}^{n+1}$ の P による
orbit の non-tangential な集積点全体の集合 $\Lambda_r(P)$ の方が有用
であろう。かかる集合 $\Lambda_r(P)$ を conical (または radial) limit
set と呼ぶ。 $\Lambda_r(P)$ は $L(P)$ の P 不変な可測部分集合となるが
一方、 $L(P) - \Lambda_r(P)$ の量は一般には無視できない。

§2. geodesic flow のエルゴード性.

M_P 上の geodesic flow のエルゴード性と $\Lambda_r(P)$ の量によ
り判定できる。それは次の通り。

定理 1 ([5] §II. III) 以下の条件はすべて同値

- (i) M_P 上の geodesic flow が ergodic
- (ii) $m(\Lambda_r(P)) > 0$
- (iii) $m(S^n - \Lambda_r(P)) = 0$
- (iv) M_P 上 (hyperbolic な) Brown 運動が recurrent
- (v) $\sum_{\delta \in P} \exp \{-n \cdot d(x, \delta y)\} = +\infty$

($x, y \in H^{n+1}$, d は hyperbolic distance)

注) $n=1$ の場合が古典的な Hopf の結果である。なお [5] では Sullivan は Garnett による手法を用いてゐる (cf. [3] Appendix V, VI).

かかる定理の一般化として, M_P 上の Brown 運動が transient の場合にも, volume form 等と Γ に付随する自然な他の測度で置きかえて geodesic flow のエルゴード性を論じることが出来る。以下, まず必要な概念を導入する。

1°) 考えべき次元。

$x, y \in H^{n+1}$ を固定して, 絶対 Poincaré 級数

$$g_s(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp \{-s \cdot d(x, \gamma y)\}$$

を考え, 収束指数 (critical exponent) と

$$\delta(\Gamma) = \inf \{s : g_s(x, y) < +\infty\}$$

で定義する。 $\delta(\Gamma)$ は x, y のとり方に依らず一般に $\delta(\Gamma) \leq n$ で巡回群 (の有限拡大) を除けば $\delta(\Gamma) > 0$ となる。

2°) S^n 上の環面測度にかかるとの。

今, 簡単のため $g_{\delta(\Gamma)}(x, y) = +\infty$ とする (こうでなるときは [4] §1 参照)。このとき測度の後

$$\mu_s = \frac{1}{g_s(x, y)} \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp \{-s \cdot d(x, \gamma y)\} \cdot \delta(\gamma y)$$

(ただし, $\delta(y)$ は y での point mass (Dirac measure)) は,
 $s \mapsto \delta(r)$ のとき weak 収束点をもつが, γ の一方向として
 固定する. 明らかなに μ は $L(r)$ 上の確率測度で, Patterson
 measure とも呼ばれる.

3°) 相空間 (unit tangent vector bundle) $T_1(M_P)$ 上の測度

上述の μ を $T_1(\mathbb{H}^{n+1}) \simeq (S^n \times S^n - \{\text{diagonal}\}) \times \mathbb{R}$ 上の Γ 不変な
 測度 $dm_\mu = |\xi - \eta|^{-2\delta(P)} d\mu(\xi) d\mu(\eta) dt$
 が定義できる. ただし, 上の同一視は, $(x, v) \in T_1(\mathbb{H}^{n+1})$ i.e.
 $x \in \mathbb{H}^{n+1}$, $v \in T_x \mathbb{H}^{n+1}$ に対し, x を通る v 方向の有向 geodesic
 l の両端点 $(\xi, \eta) \in S^n \times S^n - \{\text{diagonal}\}$ と, l のユークリッド
 の意味での中点が x の非ユークリッド的 (hyperbolic) な
 移動距離 t と対応を対応させる. dm_μ は Γ 不変より M_P の
 相空間 $T_1(M_P)$ 上の測度とも包摂できるが, これも dm_μ で表わ
 す.

なお, $\mathbb{H}^{n+1}$ 上の geodesic 全体の集合は上同一視で $S^n \times S^n -$
 $\{\text{diagonal}\}$ と包摂できるが, γ 上の測度としては (Γ 不変で
 はたして簡単なため) $\mu \times \mu$ を考えることになる.

4°) M_P 上の volume form に代わるもの

$$\Phi(x) = \int_{S^n} \left(\frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^2} \right)^{\delta(P)} d\mu(\xi) \quad x \in \mathbb{H}^{n+1}$$

とおくと, $\Phi(x)$ は Γ 不変で $\mathbb{H}^{n+1}$ 上の (hyperbolic な) Laplacian

Δ の固有値 $-\lambda = S(P)(S(P)-n)$ に対する固有函数である. dx は π の H^{n+1} 上の (hyperbolic) volume form とおくと

$$dx^H = \Phi^2(x) dx$$

とすると, dx^H は P 不変な M_P 上の測度とも見做せる. π は π に付随する M_P 上の volume form として用いる.

5°) π に付随する Markov process.

$P_t(x, y)$ は H^{n+1} 上の (heat equation $(\Delta - \frac{\partial}{\partial t})u = 0$ に対応する) Brown 運動の推移確率の density とする. volume form dx^H と新しい density

$$P_t^H(x, y) = e^{\lambda t} \frac{P_t(x, y)}{\Phi(x) \Phi(y)}$$

から定まる H^{n+1} 上の Markov process を π -process と呼ぶ.

(すなわち, π -process の推移確率は

$$P_t(x, E) = \int_E P_t^H(x, y) dy^H = \int_E e^{\lambda t \frac{\Phi(y)}{\Phi(x)}} P_t(x, y) dy$$

で与えられる) π -process は density を

$$\bar{P}_t^H(x, y) = \sum_{\delta \in P} P_t^H(x, \delta y)$$

で定まる: ことによって M_P 上に与えられる. π の $\bar{\pi}$ -process を $\bar{\pi}$ -process と呼ぶことになる.

以上の準備の下に Sullivan は次の同値性を示した. $S(P)$ が n となる場合が定理 1 に対応する.

定理 2 ([4] 系. 20, 定理 21, 32, 系. 33)

$\delta(P) > \frac{n}{2}$ とするとき次の条件は同値である.

- (i) M_P 上 geodesic flow の dm_μ に関して ergodic
- (i') $S^n \times S^n - \{\text{diag.}\}$ 上 P の作用の $\mu \times \mu$ に関して ergodic
- (ii) $\mu(\Lambda_r(P)) > 0$
- (iii) $\mu(S^n - \Lambda_r(P)) = 0$
- (iv) M_P 上 $\bar{\mu}$ -process が recurrent
- (v) $f_{\delta(P)}(x, y) = +\infty$

注) 定理 2 の証明は §4 でその概略を述べるが, [6] 62p によれば, [7] (未入手) の仕事に関連して, $\delta(P)$ の値に制限なしに定理 2 の証明ができたとの announce がある.

§3 $\delta = D$ を想と幾何学的有限なグループ.

定理 2 に関連して, $\delta(P) \in P$ に伴う他の基本量で決定できることが望ましい. Sullivan は geodesic flow のエントロピー等の基本量との関連を調べているが, そのような基本量として以前から問題にされていたものに $L(P)$ や $\Lambda_r(P)$ の Hausdorff 次元がある. 一般に集合 E の Hausdorff 次元を

$$D(E) = \inf \{d : E \text{ の } d\text{-次元 Hausdorff 測度 } 0\}$$

と定義するとき、次の予想がある。

$S = D$ 予想 Γ を有限生成 Γ ライニ群とするとき

$$S(\Gamma) = D(L(\Gamma))$$

$S = D'$ 予想 任意の Γ ライニ群 Γ に対し、

$$S(\Gamma) = D(\Lambda_r(\Gamma))$$

注) $n=1$ 、すなわち Γ ... Γ 群の場合には両予想とも、

Sullivan により 肯定的に解決された。 ([4] 系 26.27) 一方

(任意の n の) 任意の Γ に対し、 $S(\Gamma) \geq D(\Lambda_r(\Gamma))$ であるこ

とは容易にわかる ([4] 定理 24) が逆向きの不等号は一般に

はわからない。 Sullivan は次のような定理を示した。

定理 3 ([4] 定理 25) $T_1(M_\Gamma)$ が dm_Γ 測度有限、すなわち $\int_{T_1(M_\Gamma)} dm_\Gamma < +\infty$ ならば

$$S(\Gamma) = D(\Lambda_r(\Gamma))$$

$T_1(M_\Gamma)$ が dm_Γ 測度有限ならば当然 geodesic flow は dm_Γ に関して ergodic となる。従って定理 3 の仮定を定理 2 の同値な条件の一つに弱められたいかという問題が生じる。これに

については補足Ⅱ)を参照せよ.

なお, $T_1(M_P)$ が $\dim_P$ 測度有限か否かを決定することは一般に困難である. Sullivan は有限生成 Γ ライニ群の内 M_P が幾何学的に簡単な場合に, この問題を解決した.

まず $H(L(P)) \subset L(P)$ の hyperbolic な閉凸包 (S^2 に適交する内面による閉凸包) とし, $H(L(P))/P$ の M_P 内での 1-近傍を N_P とする. このとき, P が幾何学的有限とは, N_P の hyperbolic volume が有限であることとする.

注) 歴史的には, P が幾何学的有限とは, 境界面 (side) が有限個 (有限な基本 (Dirichlet) 多面体をもつという性質で定義された. この定義は Thurston による. (同値性や他の定義については [10] 8 章 §8.4 を参照).

幾何学的有限な Γ ライニ群に対しては Ahlfors 予想が成り立つことと Ahlfors 自身を示した. また, $L(P) - \Lambda_r(P)$ が可算個の点からなり, 特に $D(L(P)) = D(\Lambda_r(P))$ であることも知られている (Beardon-Maskit の定理).

定理 4 ([7] §4) 幾何学的有限な Γ ライニ群 P に対し,

$$\int_{N_P} dx^H = \int_{N_P} \Phi(x) dx < +\infty$$

更に $\delta(P) > 1$ の場合には

$$\int_{M_P} dx^H < +\infty$$

(ちなみに χ は Laplacian の固有値 $S(P)(S(P)-2)$ に対応する M_P 上二乗可積分な固有函数である)。

更に Sullivan は $\int_{T_1(M_P)} d\mu_\mu$ を $\int_{N_P} dx^M$ により評価できることも示した ([7] §5)。従って定理 3.4 と上の注を合わせれば次の結果を得る。

定理 5 ([7] §5 系) 幾何学的有限な Γ 子群 P に対し

$$S(P) = D(L(P)) = D(\Lambda_r(P))$$

最後に、幾何学的有限な Γ 子群 P に対しては $m(S^2 - L(P))$ が正 (i.e. $S^2 \neq L(P)$) ならば $S(P) < 2$ となる。(上述のよう
に $\int_{T_1(M_P)} d\mu_\mu < +\infty$ からは geodesic flow の $d\mu_\mu$ 測度に関する ergodicity が出るが、これは定理 2 より $g_{S(P)}(x, y) = +\infty$ と同値であった。今、 $S(P) = 2$ とすれば定理 1 より $m(S^2 - L(P)) \leq m(S^2 - \Lambda_r(P)) = 0$ となり仮定に反する)

これは一般の有限生成 Γ 子群に対しては成り立たない。実際、Sullivan は [8] で $D(L(P)) = 2$ となる有限生成第二種 Γ 子群 P (i.e. $L(P) \neq S^2$) の存在を示した。ただし、この Sullivan の例は $m(L(P)) = 0$ で Ahlfors 予想の反例にはなっていない。

§4. 定理2の証明の概略

1. (i) $\Leftrightarrow$ (i)' はほぼ自明より省略

2. (i) $\Rightarrow$ (iii)

$\mu(S^n - \Lambda_r(P)) > 0$ ならば, $\mu \times \mu$ -a.e. geodesic $l \in (S^n - \Lambda_r(P)) \times (S^n - \Lambda_r(P)) - \{\text{diag.}\}$ に対し, $\Lambda_r(P)$ の定義を使えば, 一点 $x \in H^m$ の orbit 中, l に最も近い点の集合は有限集合 E_l となることわかる. この E_l による $(S^n - \Lambda_r(P)) \times (S^n - \Lambda_r(P)) - \{\text{diag.}\}$ の可算分割 $\bigcup_{j=1}^{\infty} L_j$ とすると, 各 L_j は一つの l の P による orbit と高々有限回 (が交わり) 得る. 一方仮定より $\mu \times \mu$ 測度正の L_j が存在するから, $S^n \times S^n - \{\text{diag.}\}$ 上の P の作用は ergodic であり得る.

3. (iii) $\Rightarrow$ (ii) は明らか.

注) 実は更に次の定理が成り立つ.

定理 ([4] 定理 21) $\mu = \mu_a + \mu_c$ は μ の atomic part と non-atomic part とへの分解とすると, $\mu_c(\Lambda_r) = 0$ または $\mu_c(S^n - \Lambda_r) = 0$ となる.

後者の場合, $S^n \times S^n - \{\text{diag.}\}$ 上の P の作用は $\mu_c \times \mu_c$ に関して ergodic である. 逆に, P の作用が $\mu \times \mu$ に関して ergodic ならば $\mu = \mu_c$ で $\mu(S^n - \Lambda_r) = 0$ となる.

4. (iii) $\Rightarrow$ (iv) (cf. [4] 系 20)

仮定より適当に部分集合 $A \subset \Lambda_r(\Gamma)$ をとって, $\mu(A) > 0$ の十分大きな (隣) 球 $B \subset \mathbb{H}^{n+1}$ に対し, $\delta(B)$ ($\delta \in \Gamma$) の一点 $x \in \mathbb{H}^{n+1}$ からの S^n への "radial" projection による影を $\delta(B)'$ とするとき, $\{\delta(B)' : \delta \in \Gamma\}$ は A の半径が任意に小さな球による covering を含むようにできることがわかる.

一方作りかえ $\mu(\delta(B)')$ は $\exp\{-\delta(\Gamma) \cdot d(x, \Gamma x)\}$ で評価できることが示せ, $g_{\delta(\Gamma)}(x, x) = +\infty$ を得る.

5. (iv) $\Rightarrow$ (iv) (cf. [4] 200-201 page)

$$\text{まず, } g(x, y) = \int_0^\infty e^{\lambda s} P_s(x, y) ds$$

とすると, $g(x, y)$ は $\Delta + \lambda$ に対する Green 函数で $r = d(x, y)$ により依存する: これは明らかである ($T \equiv T^2$ 且 $\lambda = \delta(r)(n - \delta(r))$ である). 更に境界での "決定方程式" $g_{rr} + n g_r + \lambda g = 0$ を解くことにより $g(x, y)$ の評価ができる.

$$g(x, y) \geq \exp\{-\delta_+ \cdot d(x, y)\}$$

$$(T \equiv T^2 \text{ 且 } \delta_+ = \frac{n}{2} + \sqrt{(\frac{n}{2})^2 - \lambda})$$

と得る. 従って, $\delta(\Gamma) > \frac{n}{2}$ ならば $\delta(\Gamma) = \delta_+$ となり, 仮定の $g_{\delta(\Gamma)}(x, y) = +\infty$ である.

$$\sum_{\delta \in \Gamma} g(x, \delta y) = +\infty \quad \dots (*)$$

を得る. ($\delta(\Gamma) > \frac{n}{2}$ の仮定はここでの必要)

$\Phi(x)$ が P 不変であることを用い、(*) の右辺に

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{P}_s^M(x, y) ds \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \sum_{\delta \in P} P_s^M(x, \delta y) ds = \sum_{\delta \in P} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T P_s^M(x, \delta y) ds \right) \\ &= \frac{1}{\Phi(x)\Phi(y)} \sum_{\delta \in P} q(x, \delta y) = +\infty \quad \dots (**) \end{aligned}$$

を得る。

∴ $\bar{P}$ -process の基本的性質を確認 (7.4 命題 28)

(i) $f(y) \equiv 1$ は P_t^M -harmonic. $\bar{P}$ は $\bar{P}$ operator

$$P_t^M f = \int_{M_{t+1}} P_t^M(x, y) f(y) dy^M$$

で不変

(ii) $v = dx^M$ は dual operator $v \mapsto v \cdot P_t^M$ で不変

(iii) 対称性: $P_t^M(x, y) = P_t^M(y, x)$

(iv) semi-group 性: $\int_{M_{t+1}} P_t^M(x, y) P_s^M(y, z) dy^M = P_{t+s}^M(x, z)$

なお, M_P 上の $\bar{P}$ -process の (適-) operator は $\bar{P}_t^M$ で表わす。

さて, $\pi_B(x)$ は x から出る path の小環 $B \subset M_P$ に対する確率とすると, B 上 $\pi_B(x) \equiv 1$ かつ, $M_P - B$ 上 $\bar{P}_t^M$ -harmonic.

また十分小さい t を固定するとき,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\int_{M_P} \bar{P}_s^M(x, y) (\bar{P}_t^M \pi_B - \pi_B)(y) dy^M \right) ds \\ &= \left(\int_T^{T+t} - \int_0^t \right) \left(\int_{M_P} \bar{P}_s^M(x, y) \pi_B(y) dy^M \right) ds \end{aligned}$$

よって, (iv) が残り立たないことからは測度正な集合上 $\bar{P}_t^M \pi_B < \pi_B$

となり (**) の左辺の絶対値 $\rightarrow +\infty$ ($T \rightarrow +\infty$) だが右辺は常に

絶対値は $2t$ 以下だから矛盾となる。

6. (iv) $\Rightarrow$ (ii) (cf. [4], 197-200 page)

まず state space H^{n+1} 上の process 不変正測度 dx^t を用いて, biinfinite paths の空間 $L = (H^{n+1})^{\mathbb{R}}$ 上に, cylinder set (A, t) ($A \subset H^{n+1}$, $t \in \mathbb{R}$) の測度が $\int_A dx^t$ とおけるような σ -有限正測度 $d\sigma$ を, Kolmogoroff 型の拡張定理を用いて構成することはできる.

今, (ii) が成り立たないことを示すと, $S^n \times S^n - \{\text{diag}\}$ の P 不変な部分集合 W で $\mu \times \mu(W) > 0$, $\mu \times \mu(W^c) > 0$ なるものが存在する. ことが示される.

$$h(x, x') = \frac{1}{\Phi(x)\Phi(x')} \int_{S^n \times S^n - \{\text{diag}\}} \chi_W(\xi, \xi') \left(\frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^2} \right)^{g(p)} \left(\frac{1-|x'|^2}{|x'-\xi'|^2} \right)^{g(p)} d\mu(\xi) d\mu(\xi')$$

は各 x, x' に関して, P_t^H -harmonic で, 仮定より P 不変非定数である. 更に $h(x, x')$ は L 上の函数へ, Martingale の理論を用いて移しおける. したがって, 任意の $w \in L$ に対し,

$$f(w) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} h(w(s), w(t)) \right\}$$

と表えられ, かつ $s \in \mathbb{R}$ が固定するとき, $w(t) = w(s + t)$ による収束定理より, a.e. $w \in L$ に対し $\lim_{t \rightarrow \infty} h(w(s), w(t))$ が存在することはわかる. 次に process の対称性より, $s \rightarrow -\infty$ のときも a.e. $w \in L$ で $f(w)$ の値が確定することはわかる. 従って $f(w)$ は L 上 a.e. で定義され, 定義より time shift に対しても不変な P 不変非定数函数を与えらる.

以上から, $\bar{\mu}$ -process が recurrent のとき, $L \in \mathcal{A}$, T の元
及び time shift で生成される作用が ergodic である: ことを示
せば証明が終わる.

このため, まず "rectangle" (集合 $\bigcap_{i=1}^n (A_i, t_i) : A_i \text{ は ball}$)
の任意の pair に対し, 小さな ϵ の mass をもつものが常に他方
の部分集合に shift isomorphic であるならばエルゴード性が従う
ことに注意 (証明は rectangle による近似を用いられる). なる
が, 逆にエルゴード性から容易に任意の同じ mass をもつ集合
の pair が shift isomorphic であることがわかる.)

そこでまず単 rectangle $A = (A, t_1)$ と $B = (B, t_2)$ を考えたと
仮定より可算個の $A \cap (B, s_i)$ が a.e. に A を cover できる.
 B についても同様で $\bigcup_j B \cap (A, t_j) \supset B$ (a.e.). そこで t_i と
 s_j をこれらの和 $\{A \cap (B, s_i), B \cap (A, t_j)\}$ とすると, shift
surjections $A \leftarrow \rightarrow B$ が得られる. したがって A または B の他方
の部分 subset への shift isomorphism が作れる.

一般の rectangles $A = \bigcap_i (A_i, t_i)$ と $B = \bigcap_j (B_j, t_j)$ に対して
は, $\{r_k\} \supset \bigcup_k ((A_n, t_n) \cap (B_1, r_k)) \supset (A_n, t_n)$ (a.e.) とおきよ
うにとり, $B_{r_k} \subset B$ の $(r_k - s_1)$ -time shift とすると

$$\sigma\left(\bigcup_k A \cap B_{r_k}\right) \geq b \cdot \sigma(A)$$

ただし, $b = \sup_{x \in B_1} \{x \text{ が Time } 0 \text{ で出さず path } \sigma \bigcap_{j=2}^m (B_j, s_j - s_1)$
に属する確率\} (> 0) とする. ところで A が与えられた部分を除く

き、残り Σ rectangle に近似して上議論をくり返すこととを繰り返せば $A \subset B$ の部分集合の shift の可算和で cover できることをわかる。 B の covering も同様に作り、前段と同じように shift isomorphism を作れる。

q.e.d.

補足 I) Ahlfors 予想に関する Sullivan の定理.

境界 $S^2 = \hat{\mathbb{C}}$ 上の Γ の Γ 群 P の作用を考えると、 S^2 は recurrent part と wandering part (i.e. 基本集合に分けられる部分、dissipative part ともいう) に分割される。これに関して、次の結果が成り立つ。

定理 6 ([5], 定理 I) 任意の Γ 群 P に対し、 R_P を S^2 上の recurrent part とするとき、 R_P 上の非自明な P 不変可測接ベクトル場は存在しない。

一方、 R_P は幾何学的には、horospherical limit set $\Lambda_h(P) = \{ \xi \in S^2 : \exists \text{ 点 } x \in \mathbb{H}^3 \text{ の } P \text{ による orbit が } \xi \text{ で接する任意の horosphere と交わる} \}$ と一致する ([5] 定理 III)。従って、明かには $\Lambda_h(P) \subset R_P = \Lambda_h(P) \subset L(P)$ であるが、更に、

定理 7 ([5] 定理 II) 有限生成 Γ の群 Γ に対し.

$$m(L(\Gamma) - \Lambda_R(\Gamma)) = 0.$$

従って, $L(\Gamma)$ 上の非自明な Γ 不変可測接ベクトル場は存在しない.

この定理の一つの帰結として, 有限生成 Γ の群 Γ の擬等角変形類全体は, $1-2$ 次元 $(S^2 - L(\Gamma)) / \Gamma$ の Teichmüller 空間と一致することがわかる. すなわち, 変形理論において, 今の場合 $L(\Gamma)$ の存在は無視できることになり, Ahlfors 予想の一つの解決と言えよう.

なお, 特に $L(\Gamma) = S^2$ となる有限生成 Γ の群 Γ は rigid となり, いわゆる Mostow の rigidity 定理 (cf. [10], 5 章 7 節) の拡張と与える.

補足 II) Sullivan 予想

定理 3 の証明には, 次の主張が示せばよい.

主張 $T_1(M_\Gamma)$ の dm_Γ -a.e. の点 (x, v) に対し.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \cdot d(x_0, g_t((x, v))) = 0$$

が成り立つ. これは $g_t((x, v))$ は x を通る v 方向の有限 geodesic

上、 x から距離が t の点 x_t は M_P 上の固定点とし、 d は M_P 上の hyperbolic distance とする。

Sullivan は $T_1(M_P)$ が dm_μ 測度有限の場合に、エルゴード定理を用いて上記主張を示した ([4] 系. 19) が、同時に次の予想を述べている。

Sullivan 予想 M_P 上 geodesic flow が dm_μ に関して ergodic ならば、上記主張が成り立つ。

付記

以上は 3 月 1 日までに筆者が知り得た範囲での解説であるが、Sullivan の添結果については、既に Sullivan 自身によって、より包括的な解説がなされている ([6])

なお、講演の準備中に、 $\delta = 0$ 予想の研究の、日本での第一人者であった赤座暢先生 (金沢大理教授) の訃報を聞いた。心から御冥福と御祈り致します。

References

- [1] J. Aaronson and D. Sullivan, Rational ergodicity of the geodesic flow on infinite volume hyperbolic manifolds.
(3月1日現在未入手)
- [2] L. Ahlfors, Möbius transformations in several dimensions, Ordway Prof. Lectures in Math. (1981).
- [3] L. Garnett, Functions and measures harmonic along the leaves of a foliation (preprint).
- [4] D. Sullivan, The density at infinity of discrete group of hyperbolic motions, I.H.E.S. Publ. Math. 50 (1979) 171-209.
- [5] _____, On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions, Ann. Math. Stu. 97, Princeton (1981) 465-496.
- [6] _____, Discrete conformal groups and measure dynamics, Bull. A.M.S. 6 (1982) 57-73.
- [7] _____, Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups (preprint).
- [8] _____, Growth of positive harmonic functions and Kleinian group limit sets of planar measure zero and hausdorff dimension two (preprint).
- [9] B. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. A.M.S. 6 (1982) 357-381.
- [10] _____, Geometry and topology of three manifolds (lecture at Princeton Univ.)