

「数学をどう使うか」をどう教えるべきか —情報科学とデータ科学の視点から

徳山 豪

TAKESHI TOKUYAMA

東北大学大学情報科学研究科

GSIS TOHOKU UNIVERSITY *

Abstract

数学者は科学技術全般の基盤であり、科学を説明し、自然や技術を解明する言葉でもある。数学なしに現代文明を語ることはできない。一方で、数学が実生活でどのように使われているかを実感できる市民は少ない。また、現代数学の最先端を研究する数学者には、時として、そのような数学の利活用教育を軽視する傾向もあると考えている。特に高度情報化社会では、数学の利活用教育は重要であり、米国の CS for ALL プロジェクトをはじめ、数学及びそれを生かしたコンピュータサイエンスの早期教育が、子供たちが未来にきちんとした職業に就くための必須条件であるとして教育システム改革が世界中で行われている。このような状況下で、日本の数学教育にも大きな変革が必要であり、特に情報科学の専門家としての観点で話題提供する。

1 数学に対する人々や学生の意識

“The most painful thing about mathematics is how far away you are from being able to use it after you have learned it.” 数学史家の James Newman の至言である。日本では数年前に鹿児島県の知事（東大卒）が「女の子にサイン・コサインを教えて何になる」と発言して、女性蔑視という批判に対して「サイン・コサインは私も使っていない」と弁解している。彼も交流の電気は毎日使っているとは思うのだが、エンジンの仕組みがわからなくても車が運転できるのと同じで、「数学を使っている実感」がないのだろう。

一方で、数学という学問が人材育成にとって要であり、数学を学ぶ学生に、その実用性や、自分の将来にとっての必要性を実感してもらうことは非常に重要である。筆者が所属する日本学会の情報学教育分科会では、現在「情報教育の参照基準」を作成中であるが、そこでも、知識体系としての情報の原理や情報の表現・認識・分析、計算とアルゴリズムなどはもちろん、ジェネリックスキルとしての

- 創造性・想像力、構想力、想像力
- 論理的・計算論的思考—論理的思考能力、論理的緻密さ、演繹能力、概念化・モデル化・形式化・抽象化を行う能力
- 課題解決・問題解決—問題発見能力、問題解決能力、システム思考、クリティカルシンキング

などの教育の多くの部分は、数学教科で教えることが想定される。また、数学のタレントを集める米国の情報産業などに太刀打ちするためにも必要であるし、米国の CS for All プロジェクトのように、「計算機科学とデータ科学を早期教育することが、将来子供たちが良い職に就くには必須」という近未来予測に対応

*tokuyama@dais.is.tohoku.ac.jp

するためにも重要であると考えており、ぜひ数学に早くから学生が興味を持つような教育の構築を希望している。

では、現状はどうだろうか。最近6年ほど、東北地区から選抜した60名ほどの高校生に向けた「科学者の卵養成講座」で「理論計算機科学への招待—数学を使った実社会の問題解決」というタイトルで2時間の講義をしている。担当者によると、「数学専門の先生に頼むと話が硬すぎる」ということで(これ自体、数学の先生方に苦言を申し上げたいのだが)、参加者の評判は良いらしい。この講座のレポートの選択問題で、「あなたの好きな数学の公式(数学以外の科学でもよい)で好きなものをあげて、それが社会の役に立っているかどうかを述べなさい」という設問を出している。

それを見ると、「高校生だと、数学がどう役に立っているかは全く意識しない」というのが判る。一番人気はピタゴラスの定理だが、「役に立っているとは思わがわからない」というのがほとんど。余弦定理を含めた三角関数という答えも多いが、「ピラミッドの高さを測るのに使えるらしい」「建築に使えると思う」など。オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ をあげる学生もいるが「美しいが世の中の役に立っているとは思えない」という感想である。ニュートンの運動方程式、ボイル・シャルルの公式やアインシュタインの $E = mc^2$ などをあげる学生はさすがに「役立つ」ということは判るのだが、それでも「〇〇を計算するのに役立つ」というように、受験問題を解くのに役立つというメンタリティーが多い。これで良いのかしら、というのが筆者の悩みで、「自分の夢を実現するために数学を学ぶ」という教育はできないかというのが問題提起である。

でも、高校までの間に、どうすれば数学の利用を教えられるだろうか? 先に書いた「ピラミッドの高さを測る」というのは、これは古代ギリシャのタレスの逸話として学校で教わるからこういう答えになる。もちろん科学史としては素敵な話なのだが、現代の生活では実感がないのではないだろうか。また、小学校で教わった鶴亀算、旅人算、流水算などは、「問題をどのように定式化するか」という訓練にはなるのだが、どうも「こんなことができて何が嬉しいの?」という逆効果を(特に父兄に)与えるだけのように思う。「数学を使って何ができるか」ということを教えるには、やはり驚くようなこと、夢のあること、実生活に直結することが数学でできることを示さないといけないと考えている。

では、どんなテーマで、ということになる。テレビにしても飛行機にしても電子レンジにしても、さらにはスマホにしても、最先端技術には必ず数学の関与はあるのだが、電磁気や物性について高校の数学で説明するのは至難の業であり、さらに実験なしに数理のみで説明できるものでは到底ない。また、若者が一生を懸けたいと思うような自然の神秘の解明、例えば、物質とは何か、宇宙はどうなっているか、生命とは何か、感情や意識は何か、生体の仕組みはどうやってできたか、脳の仕組みや知性とはなにか、社会とは何か、といった謎と数理の関係を示すのも、これも大作業で、どうやっていいか皆目わからない。

実際、筆者が最初に数学の必要性を実感したのは、大学に入って、一年生から物理の講義でハミルトニアン、電磁気ではマクスウェル方程式、化学では軌道のエネルギー計算が出てきて、これは数学ができないと何もできないぞと構え直した時である。ところが、当時の体験だと、物理でハミルトニアンが出てくるころにはまだ線形代数の講義は行列式の定義くらいまでしか行っていないので、基底やスペクトル分解を学ぶ前に固有方程式を物理で解かされるのが実情であり、クラスのほとんどが落ちこぼれる現状であった。筆者は現状を良くは知らないのだが、大学になったら、他の学問に先行して、重要な科学の神秘に「数学がどう使われるか」をまず教えることは可能であるし、非常に重要だと思う。

さて、話を戻して、高校生でも実感できる夢のある「数学の利用」を示さない限り、大概の学生は「受験のための数学」に嫌気がさすというのが筆者の懸念である。そういう観点で考えると、情報科学、特に最近はやりのデータ科学は非常に魅力のある対象である。数学を使う局面は非常に多く、また、通常の科学で必要な実験や観測をフィールドで行う必要はないので、説明はしやすいのかなと思っている。そして、21世紀に入ってから、情報科学技術はすべての若者に身近になるとともに、数学とアイデアだけで実現が可能なITドリームは魅力がある。特に、筆者の専門とするアルゴリズム理論は、ほとんど数学そのもので

あり、そのエッセンスは高校生にも、あるいは中学生にも説明できるものである。なぜなら、高校までの数学は、すべてアルゴリズムの説明であるか、そのための道具とっていいからである。一方で、その社会への影響は大きく魅力的で、若い年代に実感が持てるものである。たとえば、J. MacCormick の「未来を変えた 9 つのアルゴリズム」には、下記の 9 つのトピックがあり、四則演算以外の数式は全く使わずに解説されている。

1. サーチエンジン: Finding needles in the world 's biggest haystack
2. ページランク: Technology that launched GOOGLE
3. 公開鍵暗号: Sending secrets on a postcard
4. 誤り訂正符号 : Mistakes that fix themselves
5. パターン照合 : Learning from experiences
6. データ圧縮 : Something from Nothing
7. データベース: The quest for consistency
8. デジタル認証 : Who really wrote this software?
9. 計算可能性 : What is computable?

このようなテーマを用いて数学の魅力を語るのは、日本の未来を託す人材の育成に重要である。これは情報科学であり、数学でないと数学者の皆さんはおっしゃるかもしれない。筆者自身、大学の数学科の学生だった頃にはこのようなことには無関心であった。

でも、例えばページランクは、線形方程式を解く（ただし、巨大なので効率よく近似的に）だけのアルゴリズムである。これが世界最大の IT 企業を生み出す。公開鍵暗号は、フェルマーの小定理のような数論の知識を暗号に使い、皆さんがアマゾンや楽天でお買い物をする、必ず使っている。誤り訂正符号も、線形代数の応用が基本になっている。例えば大学の教養課程で数学を教えるときに、これらの応用について少しでも触れるだけで、数学に対する学生の認知や理解は大きく変わるはずである。

2 科学者の卵の内容

科学者の卵養成講座での講演の内容の一部に触れてみよう。まず計算と数学の関係で、古代ギリシャの「定規とコンパスによる計算」とユークリッド幾何学の関係を紹介し、「正方形の面積を 2 倍、3 倍にすること」を学生にやらせてみる。ピタゴラスの定理を実際どう使うのかがテーマで、2 倍はできるが、3 倍ができる学生は少ない。少し高等な言い方だと、二次拡大体が扱える計算体系であり、ある意味で通常の計算システムよりも高度なことができる。一方で立方体の倍積問題は解けないこともちょっと話す。

それから、天文学の情報処理と数学の関係で、日本の渋川春海、ニュートン、ガウスなどの話をする。ニュートンの微積分、ガウスの統計（ガウス分布、偏差値、最小二乗法）がどのように生まれたのかを、小惑星探索などと絡めて話す。

次に、データの表現で、両手の指を用いていくつまで数が数えられるかを問う（標準的な解は 2 の 10 乗で 1024 だが、手話を考えるともっといろいろな可能性がある）。点字やモールス信号、バーコード、QR コードなど、2 進表現の利用を見せた後で、「カード当て」ゲームをやる。大きいトランプを持ってきて、一枚隠し、これを学生に当てさせる。Yes-No で答えられる質問を何回かさせてトランプを当てるのだ

が、二分探索という手法の実践である。過去に最も早くあてられたのは、「クラブですか (YES)」 「絵札ですか (YES)」 「ジャックですか (YES)」 の3回なのだが、最悪でも6回の質問でカードが特定できることを納得させる。

これが、前述の9つのアルゴリズムの冒頭のサーチエンジン (昔の *Altavista* エンジン) の基本であり、数兆あるWEBページも、索引を作っておけば同様に数十回の操作で検索ができることを納得させる。

この後、情報の重要性を歴史を用いて話し、特に第二次世界大戦におけるドイツ軍のエニグマ暗号を破ったチューリングの話と、暗号解読の仕組みを話す。暗号解読においてはポーの黄金虫に出てくる有名な暗号解読をまず説明するのだが、残念なことに最近の学生はこの小説をほとんど知らない。コンピュータサイエンスの父といわれるチューリングの暗号解読は、ドイツ軍が定時に気象情報を流していたという些細なセキュリティーホールについて、1京、つまり10の16乗の可能性をアルゴリズム (つまりは数学) だけで100万通りくらいに絞る。計算の効率として10億倍の効率化を行う。でも、残った100万通りを処理するのに、電気回路を用いたBombeという専用計算機を作り、これが今のコンピュータの原型の一つになっている。一般にこの部分は学生にとって結構難しらしい。

次にいくつかパズルを用いる。ネタ本は、Peter Winkler の *Mathematical Puzzles* という本である。まず、「9つのアルゴリズム」の4番目の誤り訂正符号に関連して、帽子パズルの話をする。

「100人の生徒が縦一列に並び、赤または青の帽子をかぶせられる。生徒は自分の前の生徒たちの帽子は全部見えるが、自分の帽子や自分より後ろの生徒の帽子は見えない。生徒たちは自分が後ろから何番目にいるかは知っている。後ろから順に「赤」または「青」と発言していき、自分の帽子の色を正しくあてた生徒はお菓子をもらえる。自分の発言の前の生徒たちの発言は、覚えておける。事前に生徒たちは打ち合わせをして、全体でできるだけたくさんのお菓子をもらえる (そして皆で分ける) ように作戦を立てられる。どんな作戦で、一体いくつお菓子をもらえるだろうか？」

単純に考えると50個を大きく上回る数のお菓子はもらえそうもないが、実は99個は確実にもらえる戦略がある (もちろん講義では種明かしするが、インターネット等で解答は調べられるので、ここには書かない)。これは学生にはインパクトが強い。

次に、金融工学に関連して、「カードゲームで確実に儲ける」話をする。52枚のトランプ全部を用いて、ディーラーが次々にカードを開けていき、あなたはカードが赤か黒かを当てる。1万円をもって、任意の金額 (0でもいい) を賭けるのだが、どうすればいいのだろうか？ 重要なのは、トランプは26枚が赤、26枚が青なので、のこりのカードのカウントができることで、この情報を如何に使うかがテーマである。これは実は数学者にも簡単な問題ではない。

カードをカウントして、今残っている赤いカードの数を r 、青いカードの数を b とし、 $r \geq b$ としよう。その時、持っているお金 $\frac{r-b}{r+b}$ の割合 (小数部分は切り下げて) を赤に賭ける。

この方法で、1万円の元手を9万円に確実に増やせることを話し、実際に金融取引商品でのリスクヘッジとの関係話す。

こんな感じで、数学を使う使い方を話している。

3 終わりに

科学者の卵養成講座の学生たちは、授業の感想を全員レポートで出すが、それ以外にSNS上でいろいろとコメントをする。下記はその一例である。

「正直にいます。私は数学が苦手です。そして、あまり好きではありません。なぜなら、学習する意味を見出せなかったからです。だから、始めは今回の講義はあまり楽しみではありませんでした。しかし、その不満は講義が始まった瞬間に解決されました。」 The most painful thing about mathematics is how far

away you are from being able to use it after you have learned it. ”私の心に何かがストンと落ちました。講義の本題にあまり関係がなくて申し訳ないのですが、これが今回の講義での私の1番の収穫です。非常にレベルの低い話ですが、この言葉を紹介してくださったおかげで数学を頑張りたいと思うことができました。また、講義での「数当てゲーム」というものでは、質問の仕方がいろいろあるのだなと思いました。そして、私にはまだ多角的な視点が不足しているなど実感させられました。さらに、「誤り訂正符号」というものに感嘆しました。どこかに間違いがあったとき、その間違いがどこなのかが相手にわかってしまうというものです。賢い方法だなと思いました。音楽CDや情報通信に用いられているそうです。今回の講義以来、私の数学への姿勢が変わりました。この姿勢を続けるために、今回の講義で学んだことを忘れないようにします。また、詳しいことを知るために、イミテーション・ゲームを見ようと思っています。」

イミテーションゲームは、チューリングの伝記で、アカデミー賞をとった映画である。こんな感想が毎年複数寄せられている。ご興味のある方は、「科学者の卵養成講座」で検索して、その活動ブログをご覧ください。

最期になるが、学生たちのレポート課題の別の設問で、「人工知能やビッグデータ技術の開発が進んでいます。人工知能やビッグデータを活用してあなたがベンチャービジネスを起業するとしたら、どのようなサービスや事業をやりたいとおもいますか？」という問いを出してみたところ、最も多い回答は何だったかというと「ロボット先生を作る」であった。ロボット先生は、どんなときにも怒ることがなく、学生が質問をしてもニコニコ答えてくれる。学生に合わせて課題やVRを用いた教材を調べてくれて、わかるまで根気よく教えてくれる。 などなど。

我々教師としては、大いに反省すべきではないかと考えるところである。