

## 位相的な Julia 集合と pinched circle model について

大阪市大 理 吉田雅通 (Masamichi Yoshida)

$T$  を  $S^2$  からそれ自身への連続で有限対 1 の開写像とし、さらにその degree は 2 以上とする。 $d$  で  $S^2$  上の球面距離をあらわすことにする。 $T$  の Fatou 集合  $F_T$  を

$$F_T = \text{int} \{x \in S^2 \mid \{T^n\}_{n \geq 1} \text{ が } x \text{ において同程度連続}\} \quad (\text{ただし, int は } (S^2, d) \text{ での内部})$$

と定義し、Julia 集合を  $F_T$  の補集合と定義する。従って、 $F_T$  は  $T$  の下で完全不変となる。さらに、 $T$  の除外点集合  $\text{Exc}(T)$  を

$$\text{Exc}(T) = \{x \in S^2 \mid \#(\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(x)) < \infty\}$$

で定義すれば、Riemann-Hurwitz の公式より、 $\#\text{Exc}(T) \leq 2$  となる。まず、次の仮定をおく。

**仮定 1.**  $\emptyset \neq J_T \subset S^2 \setminus \text{Exc}(T)$  かつ、 $T$  は位相的な多項式である。

ここで位相的な多項式とは、 $T^{-1}(x_\infty) = \{x_\infty\}$  をみたす  $S^2$  上の点  $x_\infty$  があることとする。従って  $x_\infty$  は  $F_T$  の点となり、さらに  $x_\infty$  を含む  $F_T$  の連結成分を  $X$  とすると  $X$  は  $T$  の下で完全不変となる。さらに、次の仮定をおく。

**仮定 2.**  $\forall x \in S^2 \setminus \text{Exc}(T), \text{cl}(\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(x)) \cap J_T$  (ただし、 $\text{cl}$  は  $(S^2, d)$  での閉包)。

この仮定の下で、 $\partial X = J_T$  がいえる。

ここで、 $X$  上に relative metric  $d_X$  を導入する。各点  $x, y \in X$  に対して、

$$d_X(x, y) = \inf\{\text{diam } C \mid \{x, y\} \subset C \subset X \text{ かつ } C \text{ は連結}\}$$

ただし、 $\text{diam } C$  は  $C$  の  $d$  の下での直径とする。すると、 $d_X$  は  $X$  上の新しい距離となり、明らかに、 $d(x, y) \leq d_X(x, y)$  をみたす。従って、自然な埋め込み  $j_X : (X, d_X) \hookrightarrow (X \cup J_T, d)$  は一様連続となるので、その連続拡張  $w_X : (\overline{X}, \overline{d_X}) \rightarrow (X \cup J_T, d)$  (ただし、 $(\overline{X}, \overline{d_X})$  は  $(X, d_X)$  の完備化) が一意的に定まる。さらに、 $T$  も  $(X, d_X)$  からそれ自身への写像として一様連続であることが示されるので、その連続拡張  $S_X : (\overline{X}, \overline{d_X}) \rightarrow (\overline{X}, \overline{d_X})$  が一意的に定まる。明らかに  $w_X \circ S_X = T \circ w_X$  をみたすので、

$$(*) \quad \forall \bar{x} \in \overline{X}, w_X^{-1} w_X(S_X^{-1} \bar{x}) \subset S_X^{-1}(w_X^{-1} w_X(\bar{x}))$$

となる。 $X$  は自然に  $\overline{X}$  の部分集合とみなせるので、 $\overline{X} \setminus X$  を  $\partial X$  とかけば、力学系  $(\partial X, S_X)$  は  $(J_T, T)$  の canonical extension といえる。

Whyburn の結果 ([1] Chapt.8, theorem 9.1) により、 $w_X$  は  $\overline{X}$  上で light (つまり、 $\overline{X}$  上の各点  $\bar{x}$  に対し、 $w_X^{-1} w_X(\bar{x})$  は完全不連結) となる。従って、 $T$  が有限対 1 であることから、 $S_X : \overline{X} \rightarrow \overline{X}$  も light となる。さらに、次の仮定をおく。

**仮定 3.**  $J_T$  は連結かつ局所連結である。

この仮定により、 $w_X : \partial X \rightarrow J_T$  は全射となる。さらに、Whyburn の定理 ([1] Chapt.8, theorem 9.8) により、 $(\overline{X}, \overline{d_X})$  は単位閉円板  $\overline{\mathbf{D}}$  と同相になる (より正確に、 $\psi(X) = \mathbf{D}$  かつ  $\psi(\partial X) = S^1$  をみたす同相写像  $\psi : \overline{X} \rightarrow \overline{\mathbf{D}}$  がある)。さらに、 $S_X$  の lightness を用いることで、

**補題 1.**  $S_X : \bar{X} \rightarrow \bar{X}$  は開写像となり、さらに  $S_X : \partial X \rightarrow \partial X$  は  $k$  対 1 の写像となる ( $k$  はある自然数)。

が示される。さらに、Whyburn の結果 ([1] Chapt.8, theorem 9.8) より、 $w_X$  は  $\partial X$  上で non-alternating (つまり、 $w_X(\bar{x}) \neq w_X(\bar{y})$  をみたす  $\partial X$  上の点  $\bar{x}, \bar{y}$  に対して、 $w_X^{-1}w_X(\bar{y})$  は  $\bar{y}$  を含む  $\partial X \setminus w_X^{-1}w_X(\bar{x})$  の連結成分に含まれる) である。最後に、次の仮定をおく (See (\*))。

**仮定 4.**

$$\forall \bar{x} \in \partial X, w_X^{-1}w_X(S_X^{-1}\bar{x}) \cap S_X^{-1}(w_X^{-1}w_X(\bar{x}))$$

今までの仮定および  $w_X$  の non-alternating property を用いて、次の結果を得る。

**定理 1.**  $T$  を  $S^2$  からそれ自身への連続で有限対 1 の開写像とし、さらにその degree は 2 以上で仮定 1 から 4 をみたすものとする。もし  $S_X : \partial X \rightarrow \partial X$  が不動点を 1 つしかもたないとする、ある連続、light、non-alternating かつ全射な写像  $\Phi : S^1 \rightarrow J_T$  が存在して、次をみたす。

$$\forall z \in S^1, \Phi(z^2) = T \circ \Phi(z)$$

最後に、補足として、上の (\*) は Thurston の invariant lamination でいうところの forward invariance に対応し、仮定 4 は backward invariance に対応している。

## 参考文献

- [1] G. T. Whyburn. *Analytic topology*. Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., Vol. 28. 1942