

加法数論における
一つの確率論的方法について

信州大 理 鹿野 健

§ 1: 問題の起りと諸定理.

まず, 以下で用いる記号の定義から.

(def. 1) 自然数全体を $\mathcal{N}$ で表わし, $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ とする.

(def. 2) $n \in \mathcal{N}$ を

$$n = a + a'$$

$$(a < a', \quad a, a' \in \mathcal{A})$$

と表わす「表わし方の個数」を $r_n(\mathcal{A})$ と書く.

(def. 3) $n \in \mathcal{N}$ を

$$n = a + a'$$

$$(a \leq a', \quad a, a' \in \mathcal{A})$$

と表わす「表わし方の個数」を $r'_n(\mathcal{A})$ と書く.

すると, 明かに次の関係がある.

$$r'_n(\mathcal{A}) = \begin{cases} r_n(\mathcal{A}) + 1, & \dots\dots \frac{n}{2} \in \mathcal{A}. \\ r_n(\mathcal{A}), & \dots\dots \frac{n}{2} \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

(def. 4) 十分大きいすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$r'_n(A) > 0 \quad \text{となるならば, } A \text{ を 次数2の}$$

「漸近基」 (asymptotic basis of order 2) とよぶ。

(def. 5) A が $B_2[g]$ のクラスに属する, あるいは $B_2[g]$ 数列である, というのは, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$r'_n(A) \leq g$$

となることという。

(def. 6) 上の定義で, 特に $g=1$ のとき, 即ち $B_2[1]$ 数列を簡単のために B_2 数列とよぶことにする。

def. 3 と def. 5 より,

$$r_n(A) \leq g \quad \text{ならば} \quad A \in B_2[g+1]$$

であることは明かであるが, 以下で用いる確率論的方法においては $r'_n(A)$ よりも $r_n(A)$ の方が扱い易いので, 以下では $r'_n(A)$ は登場して来ないが, 我々の証明する結果 ($\rightarrow$ 定理 B) には何の影響も与えない。

S. Sidon (Szidon と書く) は Math. Ann.

106 (1932) 536~539 の論文

“Ein Satz über trigonometrische Polynome und seine Anwendungen in der Theorie der Fourier-

Reihen. "

なる論文において, 我々の記号を用いて表現すれば, 結局次のような2つの問題を提起している。

[Sidon の第1問題]

$\forall \varepsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n(A)}{n^\varepsilon} = 0$$

となるような 次数2の漸近基 は存在するか?

[Sidon の第2問題]

$A \in B_2[g]$, $A = \{a_j\}$, $(a_j \in \mathbb{N}$:

$j = 1, 2, 3, \dots)$

ならば, a_j は j の函数としてどういう大きさをもつか?

第1問題は P. Erdős によって,

" Problems and results in additive number theory. "

(Colloque sur la théorie des nombres :

Bruxelles , 1956)

において次の形で解決された。

[定理 A] (P. Erdős)

$$\log n \ll r_n(A) \ll \log n$$

であるような 次数2の漸近基 A が存在する。

一方, 第2問題に対しては未だに十分な解答が得られていない。
 g_2 数列に限れば, 現在得られている結果は次の様なものである。

(a) 任意の $A = \{a_j\} \in B_2$ に対して,

i) $\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{a_j}{j^2} = +\infty$ (Erdős-Turán: 1941)

ii) $\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{a_j}{j^2 \log j} > 0$ (Erdős: 1955 頃)

明らかに ii) より i) が従う。

(b) 次のような $A = \{a_j\} \in B_2$ が存在する。

i) $\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{a_j}{j^2} < +\infty$ (Erdős: 1955 頃)

あるいは

ii) $a_j \ll j^3$ (Mian-Chowla: 1944)

[Erdős の予想]

$\forall \varepsilon > 0$ に対して, $a_j \ll j^{2+\varepsilon}$

であるような $A \in B_2$ が存在する。

[Erdős - Turán の予想]

$$A = \{a_j\}, \quad a_j \ll j^2$$

ならば, $\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n(A) = +\infty$,

あるいはこれよりも弱く,

A が 次数 2 の漸近基ならば,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n(A) = +\infty.$$

以上はいずれも未解決であるが, Erdős の予想に関して,

Erdős と Rényi は次の結果を得た。

(Erdős - Rényi : Additive properties of random sequences of positive integers. Acta Arith. 6 (1960) 83~110)

[定理 B] (Erdős - Rényi)

$\forall \varepsilon > 0$ に対応して, $g = g(\varepsilon)$ と $B_2[g]$ 数列 A が存在して,

$$a_j \ll j^{2+\varepsilon}.$$

(def. 7) 与えられた数列 A に対して, 数列 B が A の

「補数列」(complementary sequence) であるとは,

十分大きいすべての $n \in \mathbb{N}$ が

$$n = a + b \quad (a \in A, b \in B)$$

と表わされることを言う。

(def. 8) A の要素で $n \in \mathbb{N}$ をこえないものの個数を「計数」(counting number) とよび, $A(n)$ で表わす。

def. 7 における B に対しても同様に $B(n)$ を定義する。

[定理 C] (P. Erdős : Proc. Am. Math. Soc. (1954)
847~853)

$\mathcal{P}$ でもって素数全体を表わすことにすると, $\mathcal{P}$ の補数列

B で,

$$B(n) \sim c(\log n)^2,$$

となるものが存在する。

以上の定理 A ~ C を証明するのが目的であるが, それらは主として Erdős によって考えられ, Erdős - Rényi の前出の論文において発表された, 一つの確率論的な方法で統一的に証明できるのである。ここでは, それを更に整理して formulation を完全にした, Halberstam と Roth の著書 "Sequences" vol. I (Oxford: 1966) の第三章に従って述べることにする。

§2: 確率論からの準備.

我々は Kolmogorov によって建てられた測度論的確率論の基本定理の上に立つが, 定理 A~C の証明にはそれほど多くの定理を確率論から要する訳ではない. 確率論の構成が目的ではないから, 以下ではすべての定理に証明を与えることはしないで, 必要なものを並べる, という程度にする. 測度論的確率論における基本的な用語の定義や概念を仮定する.

理
[定 1] (Wiener-Kolmogorov-Kakutani)

$(X_j, \mathcal{F}_j, \mu)$ を確率空間の列とし, X_j の直積を $\prod_{j=1}^{\infty} X_j$ で表わし,

$$X = \prod_{j=1}^{\infty} X_j$$

とする. そして, $\mathcal{F}$ を $\{\mathcal{F}_j\}$ に関する任意の矩形集合を含むような最小の σ -代数であるような, X の部分集合体とすると, この $\mathcal{F}$ 上に定義される, 次のような測度 μ が unique に定まる. 即ち, 任意の矩形集合 E

$= \prod_{j=1}^{\infty} E_j$ に対して

$$\mu(E) = \prod_{j=1}^{\infty} \mu_j(E_j) \quad \text{と存在するのである.}$$

ここに, $E_j \in \mathcal{F}_j$ ($j \geq 1$), $E_j = X_j$ ($j \geq j_0$).

(def. 9) 自然数から成る数列を ω とし, そのような
すべての ω から成る「空間」を Ω とする。

すると, 定理 1 の系として次の定理を得る。

[定理 2]

$$\{\alpha_j\}; \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots)$$

なる実数列に対応して, 次のような性質をもつ確率空間

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が存在する。

i) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, 事象

$$B_n = \{\omega : n \in \omega\}$$

は可測で, $\mu(B_n) = \alpha_n$.

ii) 事象 $B_1, B_2, \dots$ は独立。

(証明) Y を, $Y = \{y^{(0)}, y^{(1)}\}$ なる空間とする。

$$\text{次に, } x_j = \begin{cases} y^{(1)} & \dots\dots j \in \omega \\ y^{(0)} & \dots\dots j \notin \omega \end{cases}$$

とし, $x = \{x_j\}$ なるすべての数列から成る空間を X

とすれば, X は明かに

$$X = \prod_{j=1}^{\infty} X_j, \quad X_j = Y \quad (j \geq 1)$$

で与えられる。そして, X_j の 4 つの部分集合から

成る σ -代数を $\mathcal{F}_j$ とし, $\mathcal{F}_j$ 上の確率測度で,

$y^{(1)}$ だけからなるような X_j の部分集合の上で α_j なる

値をとるものを μ_j とする。

このようにして定められた確率空間の列 $(X_j, \mathcal{F}_j, \mu_j)$ に対して 定理 1 を適用すると, X と Ω の間に 1 対 1 対応が成立することに注意すれば, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ なる確率空間が存在して, i), ii) が成立すること明かである。

(def. 10) 確率変数 f の期待値 (一次モーメント) を

$$M(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f d\mu,$$

分散 (variance) を

$$D^2(f) \stackrel{\text{def}}{=} M(\{f - M(f)\}^2)$$

と書く。

[定理 3] $\{g_i\}$ を独立な確率変数とし, $M(g_i) = 0$

($j \geq 1$) とする。もし

$$\sum_{j=1}^{\infty} D^2(g_j) < +\infty$$

ならば, 確率 1 で

$$\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) < +\infty.$$

[定理 4] $\{f_i\}$ を独立な確率変数の列とする。

$$S_i = \sum_{j=1}^i f_j \quad (i \geq 1)$$

とし,

$$M(f_j) > 0, \quad (j \geq 1)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M(S_i) = +\infty,$$

$$\text{かつ} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D^2(f_i)}{\{M(s_i)\}^2} < +\infty,$$

とすると、確率 1 で

$$S_i(x) \sim M(s_i) \quad (i \rightarrow \infty)$$

(証明)

$$g_i(x) = \frac{f_i(x) - M(f_i)}{M(s_i)} \quad (i \geq 1)$$

とすると、

$$\begin{aligned} M(g_i) &= M\left(\frac{f_i(x)}{M(s_i)} - \frac{M(f_i)}{M(s_i)}\right) = \frac{M(f_i)}{M(s_i)} - \frac{M(f_i)}{M(s_i)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また、} \quad D^2(g_i) &= M(g_i^2) - \{M(g_i)\}^2 = M(g_i^2) \\ &= M\left(\left\{\frac{f_i(x) - M(f_i)}{M(s_i)}\right\}^2\right) \\ &= \frac{M(\{f_i - M(f_i)\}^2)}{M(s_i)^2} = \frac{D^2(f_i)}{M(s_i)^2}. \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D^2(f_i)}{M(s_i)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} D^2(g_i) < +\infty.$$

そして明かに $\{g_i\}$ は独立であるから、この $\{g_i\}$ は定理 3 の (g_i) の条件を満足する。従って、確率 1 で

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\{f_i(x) - M(f_i)\}}{M(s_i)} < +\infty$$

となる。

そこで、次の良く知られた lemma を用いる。

(Lemma) $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ が収束するとき、 $\{m_j\}$ ($j \geq 1$)

を任意の単調に増大して $+\infty$ に発散する正数列とすると、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^i a_j m_j = 0.$$

この Lemma において, $a_j = \frac{f_j(x) - M(f_j)}{M(s_j)},$

$$m_j = M(s_j),$$

と置けば, Lemma より

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{M(s_i)} \sum_{j=1}^i \{f_j(x) - M(f_j)\} = 0.$$

所が,

$$\begin{aligned} \frac{1}{M(s_i)} \sum_{j=1}^i \{f_j(x) - M(f_j)\} &= \frac{\sum_{j=1}^i f_j(x) - \sum_{j=1}^i M(f_j)}{M(s_i)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^i f_j(x) - M(\sum_{j=1}^i f_j)}{M(s_i)} = \frac{s_i - M(s_i)}{M(s_i)} = \frac{s_i}{M(s_i)} - 1 \end{aligned}$$

であるから, 証明すべき.

$$\text{a.s.} \quad \frac{s_i}{M(s_i)} \rightarrow 1 \quad \text{を得た。}$$

[定理 5] (Borel - Cantelli)

$\{E_j\} \quad (j \geq 1)$ を可測事象の列とする。

もし

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) < +\infty$$

ならば, 確率 1 で, 高々有限個の E_j の事象が起る。

§ 3 : 定理 A, B, C の証明のための準備.

以下では定理 2 に現われた確率空間 $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ を取る.

(def. 11) $f_n(\omega)$ を事象 B_n の特性函数, 即ち

$$f_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \dots\dots n \in \omega \\ 0 & \dots\dots n \notin \omega \end{cases}$$

とする.

(def. 12) $s_n^* = s_n^*(\omega)$ を ω の計数, 即ち, $n \in \mathcal{N}$

を越えないような ω の要素の個数とする.

以上の定義より,

$$s_n^*(\omega) = \sum_{j=1}^n f_j(\omega),$$

$$r_n(\omega) = \sum_{1 \leq j < \frac{n}{2}} f_j(\omega) f_{n-j}(\omega),$$

を得る.

$$(def. 13) \quad m_n^* \stackrel{\text{df}}{=} M\{s_n^*(\omega)\} = \sum_{j=1}^n \alpha_j,$$

$$\lambda_n \stackrel{\text{df}}{=} M\{r_n(\omega)\} = \sum_{1 \leq j < \frac{n}{2}} \alpha_j \alpha_{n-j},$$

$$\lambda_n' \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{1 \leq j < \frac{n}{2}} \frac{\alpha_j \alpha_{n-j}}{1 - \alpha_j \alpha_{n-j}}.$$

$\{\alpha_j\}$ は定理 2 における数列である.

我々はこの $\{\alpha_j\}$ について, 次の仮定を考える.

[仮定 A] $0 < \alpha_j < 1 \quad (j \geq 1)$ であって, ある

番号 j_0 から先は単調に減少して 0 に収束する. 即ち,

$$\alpha_j \downarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty).$$

定理4において $f_i = p_i$ とおくと,

$$D^2(p_j) = \alpha_j - \alpha_j^2$$

であることに注意すると次の lemma を得る。

(Lemma 1) 仮定Aが成立していて,

$$m_n^* \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(m_n^*)^2} < +\infty$$

であるならば, 確率 1 で

$$S_n^*(\omega) \sim m_n^* \quad (n \rightarrow \infty)$$

(注意) 上の lemma で, n の代りに a_j ($\omega = \{a_j\}$) を入れれば, 定義から $S_{a_j}^*(\omega) = j$ であるから,

$$j \sim m_{a_j}^*$$

を得る。従って, m_n^* が n の函数としてその大きさが分れば, それから a_j の (j の函数としての) 大きさが分る。

(Lemma 2) $\{\alpha_j\}$ を, 仮定Aを満たす次のような数列とする。

$$\alpha_j = \alpha \frac{(\log j)^{c'}}{j^c} \quad (j \geq j_0).$$

ここに, j_0, α, c, c' は定数で, 仮定Aが成立するようなものであり, 更に

$$\alpha > 0, \quad 0 < c < 1, \quad c' \geq 0,$$

とする。

すると, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{cases} \lambda_n \sim \frac{\alpha^2}{2} \frac{\{\Gamma(1-c)\}^2}{\Gamma(2-2c)} (\log n)^{2c'} n^{1-2c}, \\ m_n^* \sim \frac{\alpha}{1-c} (\log n)^{c'} n^{1-c}. \end{cases}$$

これより, 特に $c' = 0$ のとき, 確率1で,

$$a_j \sim \left(\frac{1-c}{\alpha} j\right)^{\frac{1}{1-c}}, \quad (j \rightarrow \infty)$$

となる。そこで更に $\alpha = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$ とすれば,

$$a_j \sim j^2 \quad (j \rightarrow \infty),$$

即ち a_j は pseudo-square である。

(証明) n は十分大で, $\circ(1)$ はすべて n に関わるものとし,

1. $\delta_n = \frac{1}{\log n}$ とする。すると,

$$\sum_{j \leq n\delta_n} \frac{1}{\{j(n-j)\}^c} \ll \frac{1}{n^c} \sum_{j \leq n\delta_n} \frac{1}{j^c} = o(n^{1-2c}).$$

であり, $1 \leq j \leq j_0$ では, $0 < \alpha_j < 1$ であるから,

$$\alpha_j \alpha_{n-j} \ll \alpha_{n-j} \ll (\log n)^{c'} n^{-c} = o(n^{1-2c})$$

であるから,

$$\lambda_n = \alpha^2 \sum_{n\delta_n < j < \frac{n}{2}} \frac{\{(\log j)(\log(n-j))\}^{c'}}{(j(n-j))^c} + o\{(\log n)^{2c'} n^{1-2c}\}.$$

所が, $n\delta_n < j < \frac{n}{2}$ のとき

$$(\log j)(\log(n-j)) = \{1 + o(1)\} (\log n)^2$$

であるから, 結局

$$\lambda_n = \alpha^2 \{1 + o(1)\} (\log n)^{2c'} \sum_{1 \leq j < \frac{n}{2}} \frac{1}{\{j(n-j)\}^c} + o\{(\log n)^{2c'} n^{1-2c}\}.$$

$$\text{そこで, } \phi(t) = \{t(1-c)\}^{-c}, \quad t_j = \frac{j}{n} \quad \text{とすると,}$$

$$\begin{aligned} n^{2c-1} \sum_{1 \leq j < \frac{n}{2}} \frac{1}{\{j(n-j)\}^c} &= \sum_{1 \leq j < \frac{n}{2}} \phi(t_j) \cdot (t_j - t_{j-1}) \\ &= \{1 + o(1)\} \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \{1 + o(1)\} B(1-c, 1-c) \\ &= \frac{1}{2} \{1 + o(1)\} \frac{\{\Gamma(1-c)\}^2}{\Gamma(2-2c)}. \end{aligned}$$

$$\text{従って, } m_n^* = \sum_{j=1}^n \alpha \frac{(\log j)^{c'}}{j^c} + o(1)$$

$$= \{1 + o(1)\} \frac{\alpha}{1-c} (\log n)^{c'} n^{1-c},$$

を得る。

g.e.d.

(注意) 上の m_n^* は明らかに Lemma 1 の仮定を満たしている。

(Lemma 3) $\{\alpha_j\}$ は定理 2 におけるもので,

$$\alpha_j = \alpha \frac{\log j}{j} \quad (j \geq j_0),$$

j_0, α は正の定数で,

$$0 < \alpha_j < 1 \quad (j \geq 1)$$

となるようなものとする。このとき, $n \rightarrow \infty$ に対して,

$$m_n^* \sim \frac{\alpha}{2} (\log n)^2,$$

であり, 確率 1 で

$$S_n^*(\omega) \sim \frac{\alpha}{2} (\log n)^2.$$

(Lemma 4) $n \in \mathcal{N}$, d は非負の整数とすると,

$$\mu(\{\omega; r_n(\omega) = d\}) = \left(\prod_{1 \leq k < \frac{n}{2}} (1 - \alpha_k \alpha_{n-k}) \right) \sigma_d^{(n)},$$

ここに, $\sigma_0^{(n)} = 1$ で, $d \geq 1$ のときは

$$\sigma_d^{(n)} = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_d < \frac{n}{2}} \prod_{j=1}^d \frac{\alpha_{k_j} \alpha_{n-k_j}}{1 - \alpha_{k_j} \alpha_{n-k_j}}.$$

(証明) $d = 0$ のときは明らかに成立する。 $d \geq 1$ のとき,

$$\mu(\{\omega; r_n(\omega) = d\}) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_d < \frac{n}{2}} \mu\{E(k_1, \dots, k_d)\},$$

ここに, $E(k_1, \dots, k_d)$ は,

$$\{\omega: \rho_k \rho_{n-k} = 1 \Leftrightarrow k \in \{k_j\} \ (j=1, 2, \dots, d)\}$$

なる事象とする。明らかに

$$\begin{aligned} \mu\{E(k_1, \dots, k_d)\} &= \left\{ \prod_{j=1}^d \alpha_{k_j} \alpha_{n-k_j} \right\} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq k < \frac{n}{2} \\ k \neq k_j \\ (1 \leq j \leq d)}} (1 - \alpha_k \alpha_{n-k}) \right\} \\ &= \left\{ \prod_{1 \leq k < \frac{n}{2}} (1 - \alpha_k \alpha_{n-k}) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^d \frac{\alpha_{k_j} \alpha_{n-k_j}}{1 - \alpha_{k_j} \alpha_{n-k_j}} \right\}. \end{aligned}$$

であるから証明された。

(注意) $d \geq \frac{n}{2}$ のときは, $\sigma_d^{(n)}$ の和は空であって, やはり

Lemma 4 は成立する。

(Lemma 5) y_j ($1 \leq j \leq N$) を非負の整数とする。

各 $d \in \mathcal{N}$ に対応して ($d \leq N$),

$$\sigma_d = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_d \leq N} y_{k_1} y_{k_2} \dots y_{k_d},$$

即ち, σ_d を d 次の基本対称式とすると,

$$\sigma_d \leq \frac{1}{d!} \sigma_1^d.$$

(証明) 明かに

$$\sigma_1 \sigma_d \geq (d+1) \sigma_{d+1}$$

であるから, 帰納法によつて

$$\sigma_d \leq \frac{1}{d!} \sigma_1^d$$

の成立することが分る。

(Lemma 6) $n \in \mathbb{N}$, d は非負の整数とすると,

$$\mu(\{\omega: r_n(\omega) = d\}) \leq \frac{(\lambda'_n)^d}{d!} e^{-\lambda_n}.$$

(証明) $d \geq \frac{n}{2}$ の場合は $r_n(\omega) = d$ なる事象は空で

あるから明かに成り立つ。 $d < \frac{n}{2}$ のときは, Lemma

5 において $y_k = \frac{\alpha_k \alpha_{n-k}}{1 - \alpha_k \alpha_{n-k}}$ とおけば,

$$\mu(\{\omega: r_n(\omega) = d\}) \leq P \frac{(\lambda'_n)^d}{d!}.$$

ここには,

$$P = \prod_{1 \leq k < \frac{n}{2}} (1 - \alpha_k \alpha_{n-k}).$$

しかし, $0 < t < 1$ のとき, 不等式

$$1 - t < e^{-t}$$

が成立するから, これより $P < e^{-\lambda_n}$ となり, この

lemma は証明された。

(Lemma 7) 仮定 A が成立していれば, $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\lambda'_n \sim \lambda_n.$$

(証明) $1 \leq k < \frac{n}{2}$ で n が十分大きいとき, 仮定

より $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\alpha_k \alpha_{n-k} \leq \alpha_{n-k} \leq \alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = o(1)$$

であるから, これより明かに Lemma 7 の主張が成立

する。

(Lemma 8)

(i) $0 < \xi \leq U$ ならば,

$$\sum_{d \geq U} \frac{\xi^d}{d!} \leq \left(\frac{e\xi}{U}\right)^U,$$

(ii) $0 < V \leq \xi$ ならば,

$$\sum_{0 \leq d \leq V} \frac{\xi^d}{d!} \leq \left(\frac{e\xi}{V}\right)^V.$$

(証明) (i) $0 < \xi \leq U$ ならば,

$$\sum_{d \geq U} \frac{\xi^d}{d!} = \sum_{d \geq U} \frac{U^d}{d!} \left(\frac{\xi}{U}\right)^d \leq \left(\frac{\xi}{U}\right)^U \sum_{d \geq U} \frac{U^d}{d!} \leq \left(\frac{\xi}{U}\right)^U e^U.$$

(ii) $0 < V \leq \xi$ ならば,

$$\sum_{0 \leq d \leq V} \frac{\xi^d}{d!} = \sum_{0 \leq d \leq V} \frac{V^d}{d!} \left(\frac{\xi}{V}\right)^d \leq \left(\frac{\xi}{V}\right)^V \sum_{0 \leq d \leq V} \frac{V^d}{d!} \leq \left(\frac{\xi}{V}\right)^V e^V.$$

以上の準備の下に いよいよ定理 A ~ C の証明に入る。

§4: 定理 A, B, C の証明.

(定理 A の証明)

$$\alpha = \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{ととると, 明かに}$$

$$(1) \quad 0 < \alpha < 1, \quad \frac{\pi}{2} \alpha^2 > 1,$$

となっているから,

$$(1)' \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_j = \alpha \left(\frac{\log j}{j} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (j \geq 2)$$

とする。仮定 A が成立していることは明かである。

Lemma 2 において $c = c' = \frac{1}{2}$ の場合であるから,

$$\lambda_n \sim \frac{\pi}{2} \alpha^2 \log n.$$

従って, (1) より明かなように,

$$(2) \quad e^{-\lambda_n} \ll n^{-1-\delta},$$

となる $\delta > 0$ が存在する。

定理 A を, 我々は, 確率 1 で

$$\log n \ll \tau_n(\omega) \ll \log n, \quad (n \geq n_0)$$

となるという形で, 即ち, $\lambda'_n \sim \lambda_n \sim \frac{\pi}{2} \alpha^2 \log n$ で

あるから,

$$(3) \quad \lambda'_n \ll \tau_n(\omega) \ll \lambda'_n \quad (n \geq n_0(\omega))$$

となる形で証明する。

そのために, 定理 5 を 2 度用いる。即ち, ある正

の定数 c', c'' に対して,

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{\omega: r_n(\omega) > c' \lambda'_n\}) < +\infty,$$

$$\text{かつ (5)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{\omega: r_n(\omega) < c'' \lambda'_n\}) < +\infty,$$

であることが証明されれば良い訳である。

所が, Lemma 6 と 8 によって,

$$\begin{aligned} \mu(\{\omega: r_n(\omega) > c' \lambda'_n\}) &\leq e^{-\lambda_n} \sum_{d > c' \lambda'_n} \frac{(\lambda'_n)^d}{d!} \\ &\leq e^{-\lambda_n} \left(\frac{e}{c'}\right)^{c' \lambda'_n} \end{aligned}$$

が $c' > 1$ ならば成立するから, 特に $c' = e$ とすれば,

(2) より (4) が成立することが分る。

次に, 再び Lemma 6 と 8 によって,

$$e^{-\lambda_n} \sum_{0 \leq d \leq c'' \lambda'_n} \frac{(\lambda'_n)^d}{d!} \leq e^{-\lambda_n} \left(\frac{e}{c''}\right)^{c'' \lambda'_n}$$

が $0 < c'' < 1$ ならば成立するから, c'' を十分小さく
とすれば,

$$\left(\frac{e}{c''}\right)^{c'' \lambda'_n} \ll n^{\frac{\delta}{2}}$$

となることが分れば, (2) より (5) が成立する事が示される。

所が, $\lambda'_n \leq c^* \log n$ となる正の定数 c^* が存在す

るから,

$$\left(\frac{e}{c''}\right)^{c''} \leq e^{\frac{\delta}{2c^*}}$$

となる正の定数 $c'' < 1$ が存在することを示せば良い。

これは,

$$\left(\frac{e}{t}\right)^t \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow +0)$$

であることより明らかである。従って (3) が証明された。

以上で我々は, (1)' のような確率を与えられた殆んどすべての ω (確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の中で) は定理 A の性質をもっていることが証明できたことになる。

(定理 B の証明)

$\forall \varepsilon > 0$ を与える。Lemma 2 において

$$d = \frac{1}{2}, \quad c = 1 - \frac{1}{2+\varepsilon}, \quad c' = 0$$

とおけば, 仮定 A が成立し, 確率 1 で

$$a_j \sim c^* j^{2+\varepsilon}$$

が成立している。そして

$$(6) \quad \lambda'_n \sim \lambda_n \sim c^{**} n^{-\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}.$$

そこで, もしある数 K に対して

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{\omega: r_n(\omega) \geq K\}) < +\infty$$

となるならば, $\lambda_n \rightarrow 0$, $\lambda'_n \rightarrow 0$ であるから,

Lemma 6 によって,

$$(8) \quad e^{-\lambda_n} \sum_{d \geq K} \frac{(\lambda'_n)^d}{d!} \ll e^{-\lambda_n} \left(\frac{e\lambda'_n}{K}\right)^K \ll (\lambda'_n)^K,$$

が十分大きい n に対して成立する。

従って,

$$K \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} > 1$$

即ち

$$K > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$$

とすれば, (6) (8) より明かに (7) が成立することが読める。

よって, 確率 1 で,

$$r_n(\omega) < 2(1 + \frac{1}{\varepsilon}), \quad (n \geq n_1(\varepsilon, \omega))$$

となる。これは定理 B の主張を含んでいることが明かである。

(定理 C の証明)

$$\alpha_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \dots\dots\dots 1 \leq j < j_0 \\ \alpha \frac{\log j}{j} & \dots\dots\dots j \geq j_0 \end{cases}$$

とする。ここに, α は後に定める正の定数であって,

$j_0 = j_0(\alpha)$ は, $j_0 \geq 3$ であって, $0 < \alpha_j < 1$

($j \geq 1$) となるようにとるものとする。

このとき明かに仮定 A が成立し, Lemma 3 より

$$(9) \quad S_n^*(\omega) \sim \sum_{j=1}^n \alpha_j \sim \frac{\alpha}{2} (\log n)^2.$$

そこで, いま $n \in \mathcal{N}$ を

$$n = p + b \quad (p \in \mathcal{P}, b \in \omega)$$

と表わす表わし方の個数を $R_n(\omega)$ とすると, 明かに

$$R_n(\omega) = \sum_{p < n} f_{n-p}(\omega).$$

そして,

$$\Lambda_n = M\{R_n(\omega)\} = \sum_{p < n} \alpha_{n-p}.$$

Lemma 4, 6 において $d=0$ とすると,

$$\mu(\{\omega: R_n(\omega)=0\}) = \prod_{p < n} (1 - \alpha_{n-p}).$$

$$(5) \therefore \mu(\{\omega: R_n(\omega)=0\}) \leq e^{-\Lambda_n}.$$

そこで, もし

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{\omega: R_n(\omega)=0\}) < +\infty$$

ならば, 定理 5 によって, 確率 1 で

$$R_n(\omega) > 0 \quad (n \geq n_0)$$

となり, (4) が保証される。

(6) の成立には, (5) より,

$$e^{-\Lambda_n} \ll n^{-1-\delta}$$

なる正数 δ が存在することを示せば十分である。

次に我々は, α を選ぶ事によって,

$$\Lambda_n > 2 \log n, \quad (n \geq n_0)$$

となること, 従って $\delta=1$ ととれることを示す。

そのために, 次の Hakeisel の定理 を用いる。

[定理] (Hakeisel: Sitzungsber. Berlin (1930) 580~88)

$$\sum_{\substack{m < p \leq m+m^c \\ p \in \mathcal{P}}} 1 \sim \frac{m^c}{\log m} \quad (m \rightarrow \infty)$$

となるような絶対定数 c ($0 < c < 1$) が

存在する。

従って、特に、

$$\sum_{m < p \leq m+m^c} 1 > \frac{2}{3} \cdot \frac{m^c}{\log m}, \quad (m \geq m_0).$$

いま、 $m < p \leq m+m^c$ ($0 < c < 1$) を満足する自然数 m の個数 M を考えると、

$$p - p^c < p - m^c \leq m \leq p - 1,$$

であるから、 M は

$$p - p^c \leq m \leq p - 1$$

を満足する m の個数 を 越えない。

$$\text{よって、} \sum_{m < p \leq m+m^c} 1 \leq p^c$$

$$\therefore p^{-c} \sum_{m < p \leq m+m^c} 1 < 1.$$

これより、

$$\Lambda_n = \sum_{p < n} \alpha_{n-p} > \sum_{p < n} \alpha_{n-p} p^{-c} \sum_{m < p \leq m+m^c} 1.$$

$$l = l(n) = [n^c] \quad \text{とすると、}$$

$$\Lambda_n \geq \sum_{m=m_0}^{n-2l} \sum_{p \substack{m < p \leq m+m^c}} \alpha_{n-p} p^{-c}.$$

そして, n は十分大じ $n-p \geq j_0$ となるから, α_j の
単調減少性と Hofeisel の定理とによって,

$$\begin{aligned} \Lambda_n &\geq \sum_{m=m_0}^{n-2l} \alpha_{n-m} (2m)^{-c} \sum_{\substack{p \\ m < p \leq m+m^c}} 1 \\ &\geq \sum_{m=m_0}^{n-2l} \alpha_{n-m} (2m)^{-c} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{m^c}{\log m} \right) \\ &> \frac{1}{3 \log m} \sum_{m=m_0}^{n-2l} \alpha_{n-m} = \frac{1}{3 \log m} \sum_{j=2l}^{n-m_0} \alpha_j. \end{aligned}$$

一方, $l = [n^c] \sim n^c \quad (n \rightarrow \infty)$ であるから,

$$\sum_{j=2l}^{n-m_0} \alpha_j \sim \frac{\alpha}{2} (1-c^2) (\log n)^2$$

であり, また $1-c^2 > 1-c$ であるから, 結局

$$\Lambda_n > \frac{\alpha}{6} (1-c) \log n, \quad (n \geq n_0)$$

となる。そこで $\alpha = \frac{12}{1-c}$ とおけば

$$\Lambda_n > 2 \log n \quad (n \geq n_0)$$

となって, 我々の証明すべき結果が得られた。

f. e. d.