

Wild horseshoe and topological entropy

東海大 情報数理 郡山 杉

東工大 情報科学 永頼輝男

§ 0. 序

この報告で、Wild horseshoe を定義し、その topological entropy を計算する。さらに、一つの応用として、compact mfd. 上の expansive homeo. の class の性質を調べる。

M を compact m -mfd. とし、 $\text{Hom}(M)$ を M 上の homeo. 全体の作る metric space とする。metric は、

$$d(f, g) = \sup \{ d(f(x), g(x)) ; x \in M \}.$$

$E(M)$, $E^k(M)$, $E^{ak}(M)$ によって、それぞれ、expansive homeo. 全体, entropy-expansive homeo. 全体, asymptotically entropy-expansive homeo. 全体の集合とする。この時次の結果を得る。
定理. wild horseshoe は asymptotically entropy-expansive ではない。従って、expansive ではない。

系. M を compact m -mfd ($m > 1$, $m \neq 4$) とする。 $E^k(M)$ も $E^{ak}(M)$ も $\text{Hom}(M)$ で interior point を持たない。

注意. 系に述べた結果は, [YN]の結果からも示せる.

§1. 定義と記法.

エルゴード理論の基本的定理に関しては, [DG S]を参照. また,

PL-Topology に関しては, [HD]を参照.

$X = (X, d)$ を compact metric space, $f: X \rightarrow X$ を homeo. とする.

E および S を X の subset とする. n を正整数, $\delta > 0$ とする.

S が E を (n, δ) -span するとは, 各 $y \in E$ に対して, $x \in S$

が存在し, $d(f^k(x), f^k(y)) \leq \delta$ for all $0 \leq k < n$

を満たすことである. $r_n(E, \delta) = r_n(E, \delta, f)$ を, E を (n, δ) -

span する集合の cardinality の最小値とする. compact set K

に対して, $\bar{r}_f(K, \delta) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(K, \delta)$,

$$h(f, K) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{r}_f(K, \delta)$$

とおく. X が compact であるのとき $h_{\text{top}}(f) = h(f, X)$ である.

ここに, $h_{\text{top}}(f)$ は, f の topological entropy を表す.

各 $x \in X$ および $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\Gamma_\varepsilon(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n} B_\varepsilon(f^n(x)) = \{y \in X; d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$h_f^*(\varepsilon) = \sup \{h(f, \Gamma_\varepsilon(x)); x \in X\}$$

とおく. ここに $B_\varepsilon(\dots)$ は ε -近傍を表す.

f は, $h_f^*(\varepsilon) = 0$ for some $\varepsilon > 0$ のとき, entropy-expansive,

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_f^*(\varepsilon) = 0$ のとき, asymptotically entropy-expansive と呼ばれる.

§2. Wild horseshoe

2.1. 定義. $B = [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbb{R}^2$, $W_k = [-1, 1] \times \{\frac{k}{n}\}$

$k = 0, 1, \dots, n$ とする. $\eta_n: B \rightarrow B$ を次の様な homeo. とする. (1) $\eta_n|_{\partial B} = \text{id}$.

(2) 各 $k = 0, 1, \dots, n$ に対して,

$$\begin{cases} \eta_n(W_k) \subset [-1, 1] \times [-2, -1] & \text{if } k \text{ is even,} \\ \eta_n(W_k) \subset [-1, 1] \times [1, 2] & \text{if } k \text{ is odd.} \end{cases}$$

η_n を type n の horseshoe と呼ぶ ([SS] 参照).

2.2. 補題. C を 2-cell, $g: B \rightarrow C$ を homeo. とすると, $h_{\text{top}}(g \circ \eta_n \circ g^{-1}) \geq \log n$ である.

証明. [YN] 参照.

2.3. 定義. $B_n = [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}] \times [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$ とし,

$\xi_n: B \rightarrow B$ を次の様な affine map とする.

$$\xi_n(-2, 2) = (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}), \quad \xi_n(2, 2) = (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})$$

この時, $\{B_n; n=1, 2, \dots\}$ は, B 内の, 互に交わらない 2-cell の集合となる. $\phi_0: B \rightarrow B$ を次の様な homeo. とする.

$$(1) \phi_0|_{B_n} = \xi_n \circ \eta_n \circ \xi_n^{-1}, \quad (2) \phi_0|_{(B - \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)} = \text{id}.$$

この map ϕ_0 を, B 上の wild horseshoe と呼ぶ.

2.4. 補題. $\theta: B \rightarrow B$ を $\theta(x, y) = (x, -y)$ で定義される reflection とする. $h_{\text{top}}(\theta \circ \phi_0) \geq \log n$, かつ,

$$h_{\text{top}}(\phi_0 \circ \theta) \geq \log n \quad \text{とする.}$$

証明. $h_{\text{top}}(\eta_n \circ \theta) \geq \log n$, $h_{\text{top}}(\theta \cdot \eta_n) \geq \log n$ は易し

い. 一方, B_n は, θ -invariant, かつ, ϕ_0 -invariant だから.

$$h_{\text{top}}(\theta \circ \phi_0) \geq h_{\text{top}}(\theta \circ \phi_0|_{B_n}) = h_{\text{top}}(\theta \cdot \eta_n) \geq \log n.$$

もう一方の式も同様に証明できる.

2.5. 系. 各自然数 k に対して, $C_k = [-1/2k, 1/2k] \times [-1/2k, 1/2k]$

とおくと, $h_{\text{top}}(\phi_0|_{C_k}) = \infty$.

証明. 各 $n \geq k$ に対して, $C_k \supset B_n$ より,

$$h_{\text{top}}(\phi_0|_{C_k}) = h_{\text{top}}(\theta \circ \phi_0|_{C_k}) = h_{\text{top}}(\phi_0 \circ \theta|_{C_k}) = \infty.$$

$S(B)$ を B の suspension, 即ち, $S(B) = B \times [-1, 1] / \{B \times (-1), B \times 1\}$

とする. B と $B \times 0 \subset S(B)$ は自然に同相となるので, B を

$S(B)$ の subspace と考えることにする. 各 n に対して, $S^n(B)$

を $S^{n-1}(B)$ の suspension とする. $B \subset S(B) \subset \cdots \subset S^n(B) \subset \cdots$

である.

2.6. 定義. $\phi_1 = S(\phi_0): S(B) \rightarrow S(B)$ を ϕ_0 の suspension

とする. 以下帰納的に, $\phi_n: S^n(B) \rightarrow S^n(B)$ を

$$\phi_n = S(\phi_{n-1}): S(S^{n-1}(B)) \rightarrow S(S^{n-1}(B)) \quad \text{で定義する.}$$

map ϕ_n を $S^n(B)$ 上の wild horseshoe と呼ぶ.

2.7. 定理. ϕ_n は, asymptotically entropy-expansive ではない.

証明. 0 を原典とする. 任意の $\varepsilon > 0$ および $1/2k < \varepsilon$ なる

自然数 k をとる. B は $S^n(B)$ の subspace であることに注意する. C_k は $B_\varepsilon(0)$ に含まれ, かつ, ϕ_n -invariant であるから, $\Gamma_\varepsilon(0) \supset C_k$ となる. 従って,

$$h(\phi_n, \Gamma_\varepsilon(0)) \geq h(\phi_n, C_k) = h_{\text{top}}(\phi_n|_{C_k}) = h_{\text{top}}(\phi_0|_{C_k}) = \infty.$$

故に, $h_{\phi_n}^*(\varepsilon) = \infty$. よって, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\phi_n}^*(\varepsilon) = \infty$.

§3. 系の証明.

First step. $f: M \rightarrow M$ を任意の asymptotically entropy-expansive homeo. とする. M は compact であるから, 次の様な homeo.

$f_1: M \rightarrow M$ が存在する. (1) f_1 は周期 k の周期点 x_0 を持つ.
(2) $d(f_1, f) < \varepsilon/3$ である.

Second step. 次に f_1 を, f_1^k -invariant な 2-cell D を持つ homeo. f_3 で近似する. そのために, 3つの場合に分ける.

Case 1. $m \geq 6$ の場合. 各 $i = 1, 2, \dots, k-1$ に対して, $x_i = f_1^i(x_0)$ とする. 次の様な $\delta > 0$ がとれる.

(1) $\delta < \varepsilon/3$, かつ (2) $\{f_1^i(B_\delta(x_0)); i = 0, 1, \dots, k-1\}$ は互に交わらない m -cell の集合となる.

さて, m -cell $B_\delta(x_0)$ の interior を N^m とする. 実数 $\gamma < \delta$ が存在し, $f_1^k(B_\gamma(x_0)) \subset N^m$ となる. ここで, $B_\gamma(x_0)$ の interior

を m -dim. Euclidean space と考える. $\tau = f_1^k|_{\text{Int}(B_\gamma(x_0))}$

とおく. Δ を 2-simplex, $\psi: \Delta \rightarrow \text{Int}(B_\gamma(x_0))$ を $x_0 \in \text{Int}(\Delta)$

とする linear embedding とする.

(5)

$\alpha = \frac{1}{2} \cdot d(\zeta \cdot \Psi(\Delta), N - \zeta(\text{Int}(B_\gamma(x_0))))$ とおく.

Homma の定理 ([HM] または [RS] 参照) より、次の様な、

N^m の isotopy $\{h_t\}$ が存在する.

$$\begin{cases} (1) & h_t|_{(N^m - f_1^R(B_\gamma(x_0)))} = \text{id.} \quad \text{かつ} \\ (2) & h_1 \circ f_1^R \circ \Psi \quad \text{は piecewise linear.} \end{cases}$$

$f_2: M \rightarrow M$ を次の様に定義する.

$$f_2(x) = \begin{cases} h_1 \circ f_1(x) & \text{if } x \in f_1^{R-1}(B_\gamma(x_0)) \\ f_1(x) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

明らかに、 f_2 は homeo. また、 $\Psi(\Delta)$, $f_2^R \circ \Psi(\Delta)$ は、PL mfd N^m 内の polyhedra である。従って、次の様な、 M の ambient isotopy $\{j_t\}$ が存在する.

$$(1) \quad j_t|_{(M - N^m)} = \text{id.}, \quad \text{かつ} \quad (2) \quad j_1 \circ f_2^R|_{\Psi(\Delta)} = \text{id.}$$

そこで、 $f_3 = j_1 \circ f_2$ とおく。 $f_3: M \rightarrow M$ は、homeo. で、

$$f_3^R|_{\Psi(\Delta)} = \text{id.} \quad \text{を満たす。}$$

Case 2. $m=3$ 或 5 の場合. d, N, γ を Case 1 と同様にとる。 $m=3$ 或 5 では、Annulus conjecture が成立するから、次の様な、 N^m の ambient isotopy $\{h_t\}$ が存在する.

$$(1) \quad h_t|_{\partial N} = \text{id.}, \quad \text{かつ} \quad (2) \quad h_1 \circ f_1^R(B_\gamma(x_0)) = B_\gamma(x_0).$$

そこで $f_2: M \rightarrow M$ を次の様に定義する.

$$f_2(x) = \begin{cases} h_1 \circ f_1(x) & \text{if } x \in f_1^{R-1}(B_\gamma(x_0)) \\ f_1(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

E^m を m -simplex とし、その重心を v_0 とする。 $\Psi: E^m \rightarrow B_\delta(x_0)$ を、 $\Psi(v_0) = x_0$ なる homeo. とする。 S^1 を ∂E^m 上の、 polygonal simple closed curve とし、 Δ を、 S^1 と v_0 の join とする。 $\Psi^{-1} \circ f_2 \circ \Psi|_{\partial \Delta}: \partial \Delta \rightarrow \partial E^m$ は、 inclusion map $\partial \Delta \hookrightarrow \partial E^m$ と ambient isotopic であるから、この ∂E^m の ambient isotopy を canonical に E^m へ拡張することにより次の様式、 M の ambient isotopy $\{f_t\}$ を得る。

- (1) $f_t|_{(M-B_\delta(x_0))} = \text{id}$, かつ。 (2) $f_1 \circ f_2^R|_{\Psi(\Delta)} = \text{id}$.
 さらに、 $f_3 = f_1 \circ f_2$ とおく。 $f_3: M \rightarrow M$ は homeo. で、 $f_3^R|_{\Psi(\Delta)} = \text{id}$ を満たす。

Case 3. $m=2$ の場合。 この場合も Annulus Conj. の成立する。従って、 f^R の orientation preserving なら、 Case 2 と同じ。 f^R の orientation reversing の場合、 f_2 を次の f_3 で近似する。

- (1) $f_3^R(\Psi(\Delta)) = \Psi(\Delta)$, かつ
 (2) $\exists$ homeo. $\xi: \Psi(\Delta) \rightarrow B$ s.t. $\xi \circ f_3^R \circ \xi^{-1} = \theta$

実際、2-cell 上の2つの orientation reversing homeo. は ambient isotopic であるから、この事は可能である。

以上3つの場合をまとめると、 f は次の様式 f_3 で近似できる。

- (1) $d(f, f_3) < 2\varepsilon/3$,

(7)

(2) $\exists$ flat embedding $\Psi: \Delta \rightarrow B_f(x_0)$, Δ is 2-simplex.

(3) $\exists$ homeo. $\xi: \Psi(\Delta) \rightarrow B$ s.t.

$$\xi \circ f_3^k \circ \xi^{-1} = \begin{cases} \theta & \text{if } m=2 \text{ and } f^k \text{ is orien. rever.} \\ \text{id} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Third step. $\Psi(\Delta)$ is flat 2-cell from, the next step.

embedding $\Phi: S^{m-2}(B) \rightarrow B_f(x_0)$ exists.

(1) $\Phi(B) = \Psi(\Delta)$, iff

(2) $\Phi^{-1} \circ f_3^k \circ \Phi|_B = \begin{cases} \theta & \text{if } m=2 \text{ iff } f^k \text{ is orien. rever.} \\ \text{id} & \text{otherwise.} \end{cases}$

$f_4: M \rightarrow M$ is defined as follows.

$$f_4(x) = \begin{cases} \Phi \circ \phi_n \circ \Phi^{-1} \circ f_3^k(x) & \text{if } x \in f_3^{-1} \circ \Phi(S^{m-2}(B)) \\ f_3(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Obviously, $f_4 \notin E^{ak}(M)$ is true.

Reference

- [DGS] Denker, M., Grillenberger, C., Sigmund, K.:
Ergodic Theory on Compact Spaces, L.N. Math. 527.
Springer 1976.
- [HJ] Hudson, J.F.P.: Piecewise Linear Topology, W. A.
Benjamin Inc. 1969.
- [HM] Homma, T.: On the embedding of polyhedra in
manifolds, Yokohama Math. J. 10 (1962), 5-10.

- [SS] Smale, S. : Differentiable dynamical systems.
Bull. Amer. Math. Soc., 73(1967), 747-817
- [YN] Yano, K. : A remark on the topological entropy
of homeomorphisms. Inv. Math. 59 (1980), 215-220.