

振動物体による量子流体の不安定性と量子渦の運動

大阪市立大学理学研究科 藤本 和也 (Kazuya Fujimoto)

Department of Physics, Osaka City University

1 導入

古典物理学の難問の一つとして、乱流がある。それは渦から構成されており、その生成、消滅が繰り返し行われていると考えられている。しかしながら、古典流体においては、渦度が任意の値をとることが可能であるため、渦を明確に定義することができず、古典乱流の構成要素が何であるかは明確でない。一方、量子力学的効果が色濃く現れた流体、つまり量子流体ではこの状況は一変する。量子力学的効果により流体中に渦度が量子化された量子渦が存在できるため、渦の同定が可能となる。したがって、量子流体における乱流の構成要素は、はっきりとしており、明確に定義できる量子渦となる [1]。このように、二つの流体は異なる性質を有しており、それぞれの乱流もまた異なる性質を示すことが期待される。しかし、古典乱流で確認されているコロモゴロフ則が、量子乱流においても確認されており [2]、これらの間には何かしらの共通点が存在することが示唆されている。

量子乱流はそもそも、量子流体である超流動ヘリウムを用いて、長年、研究され続けている。量子乱流を実現する方法として、物体をヘリウム中で振動させる方法がある [3]。近年、超流動ヘリウムとは異なる性質を持つ量子流体である希薄な冷却原子気体ボース＝アインシュタイン凝縮体 (BEC) を用いて量子乱流が盛んに研究されている。冷却原子気体 BEC において、乱流状態を得る方法として、それを閉じ込めている捕縛ポテンシャルを振動させる方法でのみ、実験的に成功している [4]。我々は、超流動ヘリウムの方法を考慮して、冷却原子気体 BEC において量子乱流を実現する新たな手法として、その中で物体を振動させることを考えている。本研究では、量子乱流そのものではなく、その中で起きている基礎的なダイナミクス、つまり、振動物体により誘起される冷却原子気体 BEC のダイナミクスを調べた。

絶対零度近傍の原子気体 BEC は、グロス＝ピタエフスキー (GP) 方程式によって定量的に記述される。これは、系がボース＝アインシュタイン凝縮を起こし、巨

視的波動関数が出現すること、及び、希薄であることに起因している。量子渦は、この巨視的波動関数の一価性から生じており、その生成、ダイナミクスは、GP 方程式に従う巨視的波動関数の時間発展を追うことで見ることができる。実際、凝縮体中で、物体をある速度以上で直線運動させると量子渦の対が生成され、その後、それは長時間にわたって凝縮体中で回遊運動をすることが、GP 方程式の数値計算と実験で確認されている [5]。また、凝縮体を閉じ込めている捕縛ポテンシャルを回転させることにより、多数の量子渦が生成され、それらが三角格子を組むことが実験的に観測されており、これも GP 方程式の数値計算結果と一致が得られている。

量子渦だけでなくソリトンもまた原子気体 BEC において盛んに研究されている。GP 方程式は非線形項を含んでおり、ソリトン解が存在する。1 次元のソリトン解は安定であるが、2、3 次元のソリトン解は、スネーク不安定性と呼ばれる長波長の揺らぎに対する不安定性を示し、量子渦が生成されることが知られてる [6, 7]。このソリトンの不安定性は、二種類の成分を持った BEC を利用することで実験的に観測されている [8]。

本研究では、GP 方程式を数値的に解くことにより、振動物体が凝縮体中に量子渦とソリトンを生成し、それらが互いに変換しあうダイナミクスが誘起されることを見いだした。本稿では、このダイナミクスの詳細を報告する。

2 モデル

本研究で対象とする原子気体 BEC は、GP 方程式に従う巨視的波動関数 ψ によって記述される。我々は、系を 2 次元的に取り扱うために、凝縮体の形状を、パンケーキ型であることを仮定する。それは以下に示している 2 次元 GP 方程式により系の時間発展を追うことが可能になる。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi + g|\psi|^2\psi, \quad (1)$$

ここで、 m 、 g 、 V はそれぞれ粒子の質量、粒子間相互作用の強さ、凝縮体が受けるポテンシャルを表している。巨視的波動関数は全粒子数 N で規格化されている。ポテンシャル $V(\mathbf{x}, t)$ は二つの項からなっている。ひとつは、凝縮体を閉じ込めるための捕縛ポテンシャル $V_{\text{trap}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2)$ 、もうひとつは、その中で物体として振動するポテンシャル $V_{\text{object}}(\mathbf{x}, t) = V_0 \exp[-((x - x_0(t))^2 + y^2)/d^2]$ である。 $x_0(t)$ 、 d は振動ポテンシャルの中心の x 座標とその大きさを表している。今回、このポテンシャルを振幅 ϵ 、振動数 ω の単振動、つまり $x_0(t) = \epsilon \sin(\omega t)$ で振動させる。

数値計算を行うにあって、用いたパラメータは、 $g = 4.19 \times 10^{-45} \text{ J/m}^2$, $m = 1.42 \times 10^{-25} \text{ kg}$, $N = 6.6 \times 10^4$, $\omega_x = 2\pi \times 5/\text{s}$, $\omega_y = 2\pi \times 25/\text{s}$, $d = 0.6 \mu\text{m}$,

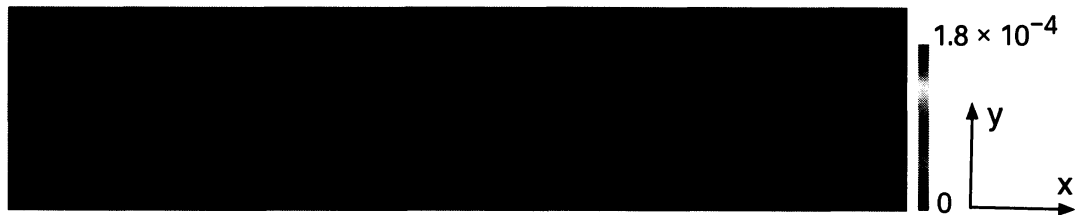


図 1: 凝縮体の初期状態。右の柱は、密度分布の指標であり、図.1~6 で共通である。

$\epsilon = 7\mu\text{m}$, $\omega = 100/\text{s}$ and $V_0 = 60gn_0$ 。ここで、 n_0 は凝縮体の中心付近での密度である。これらは実際の実験で可能なパラメータである。

本研究では、巨視的波動関数の時間発展を追うために GP 方程式をクランク＝ニコルソン法を用いて数値的に解いた。図 1 は、虚時間発展を用いて得た基底状態の密度分布である。中心にある円形の低密度領域は、振動ポテンシャルにより形成された領域であり、これが物体として振動する。ノイズや散逸を数値計算に含めていないため、我々が得た結果には x 軸に関する鏡映対称性を持っている。

ここで、GP 方程式に現れる量子渦、ソリトンの性質について述べる [9]。まず、巨視的波動関数 ψ を振幅 f と位相 θ にわけ、つまり $\psi = fe^{i\theta}$ と変換する。すると、凝縮体の密度と速度場は、それぞれ $|f|^2$ 、 $\frac{\hbar}{m}\nabla\theta$ で与えられる。量子渦とソリトンとともに、低密度領域を形成するため、それらが存在する場所では、 $|f|^2$ が小さな値をとる。この両者の明確な違いは、巨視的波動関数の位相に現れる。量子渦では、巨視的波動関数の一価性のために、渦の中心に位相が $2\pi n$ (n は整数) だけ回るように変化している。ただ、 $n = \pm 1$ 以外の量子渦は、エネルギー的に不安定であるため、ほとんど現れない。実際、我々の結果には、 $n = \pm 1$ の量子渦のみが現れている。一方、ソリトンの位相は、それが形成している低密度領域で位相が π 程度、急激に変化している。これは、量子渦の位相とは異なっており、回るような位相になってはいない。このように、量子渦とソリトンの位相の構造は異なっている。以上より、量子渦が存在するかどうかは、密度が低く、かつ巨視的波動関数の位相が 2π 回るように変化しているかで判断でき、ソリトンの場合は、密度が低く、かつその位相が π 程度、急激に変化しているかで判断できる。さらに量子渦には二種類の渦が存在する。ひとつは、密度を纏った渦である。もうひとつは低密度領域に生じる密度をほとんど纏っていない渦である。本稿では、前者を量子渦、後者を幽霊渦と呼ぶ [10]。

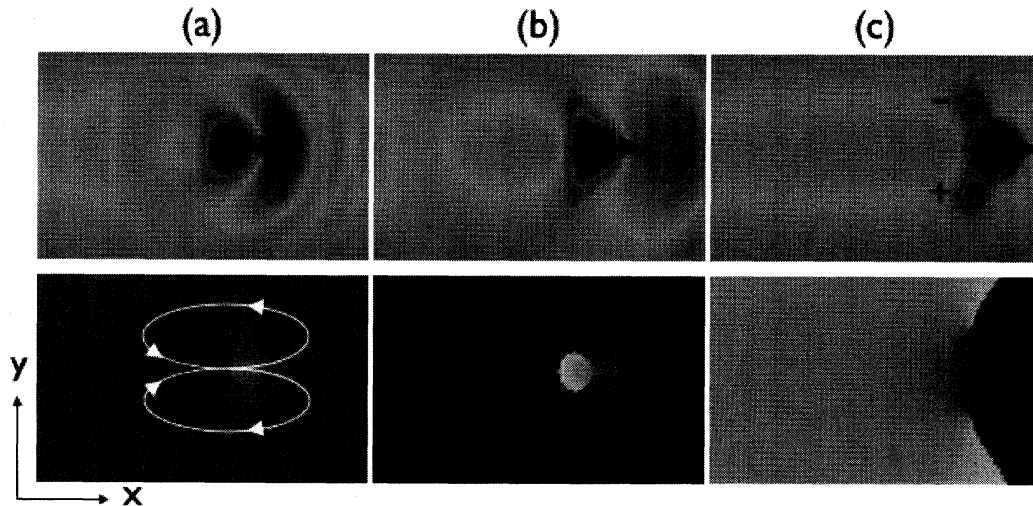


図 2: 振動物体による量子渦生成。(a) $t = 2.53\text{ms}$, (b) $t = 4.90\text{ms}$, (c) $t = 11.8\text{ms}$ である。記号+(-)は、時計回り(反時計回り)の速度場を持つ量子渦を表している。密度分布の矢印は物体の進行方向を表しおり、位相分布の矢印は速度場の方向を表している。これらの記号は図.2~6で共通である。位相の値は π (黒)から $-\pi$ (白)まで変化する。

3 数値計算結果

数値計算結果から我々は、振動物体に特徴的な量子渦のダイナミクス及び、ソリトンの生成とダイナミクスを得た。本章では、これらの詳細について示す。

3.1 振動物体に誘起される量子渦のダイナミクス

本節では、振動物体により引き起こされる凝縮体における量子渦のダイナミクスを示す。最初、凝縮体中で物体が振動した際に生じる量子渦生成の過程に幽霊渦が生じ、それが量子渦になり、その後振動物体に特徴的な量子渦対の組み換えが生じることを示す。最後に、その組み換え後、量子渦がどのような運動を行うかを述べる。

物体が動き始めると、そのまわりに図.2(a)のようなバックフローが生じる。その後、図.2(b)の位相からわかるように、物体内部に、幽霊渦の対が生成される。さらに時間が経過すると、先程生成された幽霊渦が、物体内部から凝縮体中に現れ、図.2(c)のように量子渦の対が生成される。この量子渦は、物体の進行方向と同方向のインパルスを持っているため、それは物体の後を追うように運動する。今、物体は振動しているため、ある時刻に運動方向が変わり、物体を追っている量子渦の対と物体が衝突する。その過程は図.3に示されている。図.3(a)が物体と量子渦の対が衝突する直前の様子を表している。このとき、物体の運動方向は変化し

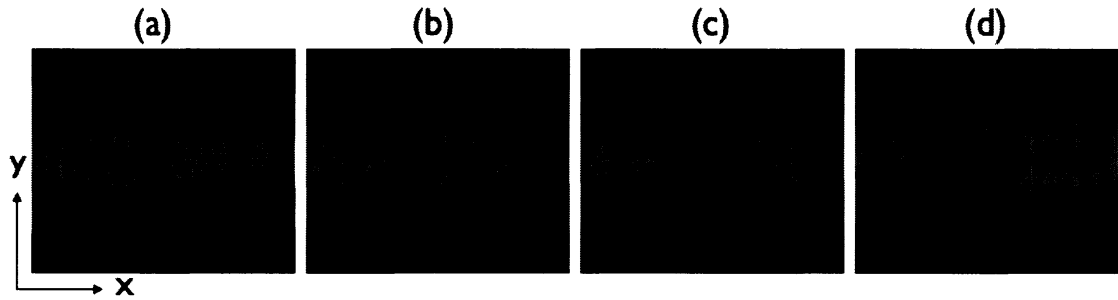


図 3: 量子渦の対の組み換え。(a) $t = 50.7\text{ms}$, (b) $t = 55.1\text{ms}$, (c) $t = 57.1\text{ms}$, (d) $t = 59.6\text{s}$ である。

た後なので、物体内部には最初に生成された量子渦の対が持っているインパルスとは逆向きのそれを持っている幽霊渦が物体内部に生成されている。これらの量子渦と幽霊渦は、物体との衝突を通して、渦の対の組み換えを行う。図.3(b),(c)がそれを示している。図.3(c)をみるとわかるように、この組み換えにより、幽霊渦が凝縮体中に現れ、二組の新たな量子渦の対が生成される。このダイナミクスは、振動物体に特徴的であり、直線運動している物体では起こりえないダイナミクスである。実は、これにより、ソリトン生成がこの系で生じることが後に示される。これらの量子渦の対のインパルスの方向から、図.3(d)のように、それらは物体から離れて凝縮体表面に向かう。表面にたどり着くと、量子渦の対は、互いに離れる様に運動を行う。この様子は、図.4から見て取れる。凝縮体表面は、近似的に固体壁と見なせ、表面付近ではその法線方向の速度が押さえられるため、この運動は鏡像渦を用いることにより、定性的に理解できる。その後、凝縮体の上下にいる量子渦は、その表面にそって、凝縮体の軸先に向い、そこで再び、量子渦の対の組み換えを行い、最終的に凝縮体の中心に戻ってくる。このように、図.3で示されるような振動物体に特徴的な量子渦対の組み換えにより物体から離れた量子渦は、凝縮体中で長時間の回遊運動を行う。

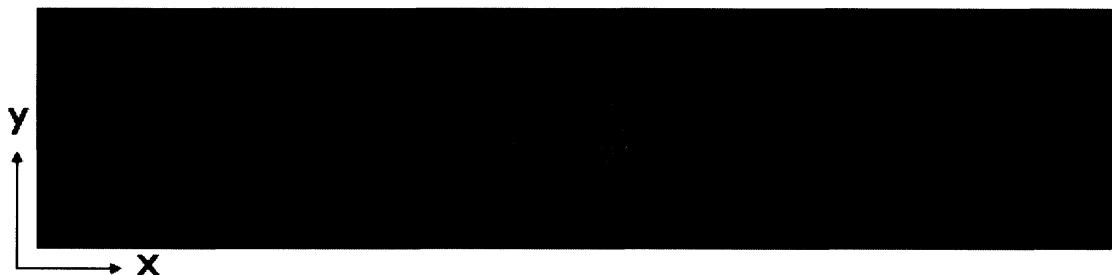


図 4: 量子渦の回遊運動。点線は、量子渦の軌道を表している。

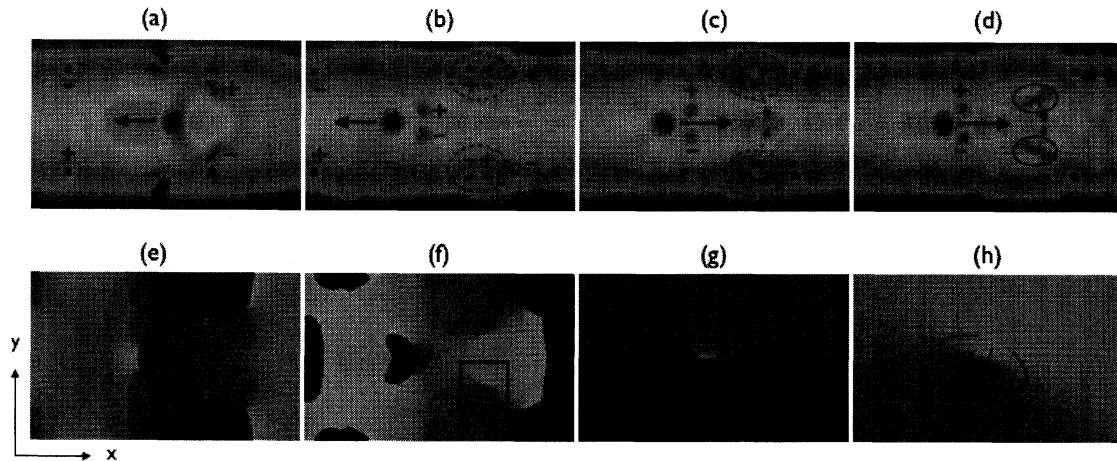


図 5: 量子渦の対消滅によるソリトン生成。(a)~(d)は、凝縮体の密度分布を表しており、(a) $t = 92.9\text{ms}$, (b) $t = 106\text{ms}$, (c) $t = 111\text{ms}$, (d) $t = 114\text{ms}$ である。(e)、(f)は、密度分布(c)、(d)に対応した位相分布を表している。(g)、(h)は(e)、(f)中の四角い箱の拡大図である。位相の値は π (黒)から $-\pi$ (白)まで変化する。

3.2 ソリトンの生成とダイナミクス

この系では、量子渦の対からソリトンが生成され、その逆過程であるソリトンから量子渦の生成もまた生じる。まずはじめに、図.5を用いて前者を示す。前節で示したように、振動物体により生じた量子渦は、それとの衝突を通して、凝縮体表面に向かう渦対となり、そこに達するとそれに沿って運動をする(図.4)。このことと、物体が常に量子渦を生成しつづけることを考慮すると、時計回りの流れ場(+)をもつ量子渦とその逆の流れ場(-)をもつ量子渦がその表面に溜まっていくことがわかる(図.5(a))。その結果、図.5(b)に示されているように、その表面において量子渦の対が形成される。この対は凝縮体の中心方向のインパルスを持っているため、その方向に動き出す(図.5(c))。そして、その中心にさらに近づくと、量子渦の対消滅が起こり、そこに密度の低い領域が図.5(d)の丸印のようにできる。これがソリトンである。我々は、ソリトンであるかどうか判断するにあたって、次の二つの条件に照らし合わせている。一つは密度が周囲よりも低いこと、もうひとつは、波動関数の位相がその低密度付近で急激に変化していることである。一つ目の条件は、図.5(d)から明らかに満たされている。二つ目の条件は、図.5(d)の低密度領域に対応する位相分布である図.5(h)から満たされていることがわかる。このように、量子渦が対消滅することにより、位相が急激に変化するような構造が残るため、ソリトンが生成される。この後、二つのソリトンは互いの形状を変えずに衝突をする。これは、まさにソリトンの性質である。このことは図.5(d)と図.6(a)を見比べると見て取れる。

次に、ソリトンから量子渦の生成を示す。図.6.(a)に現れているソリトンは、互

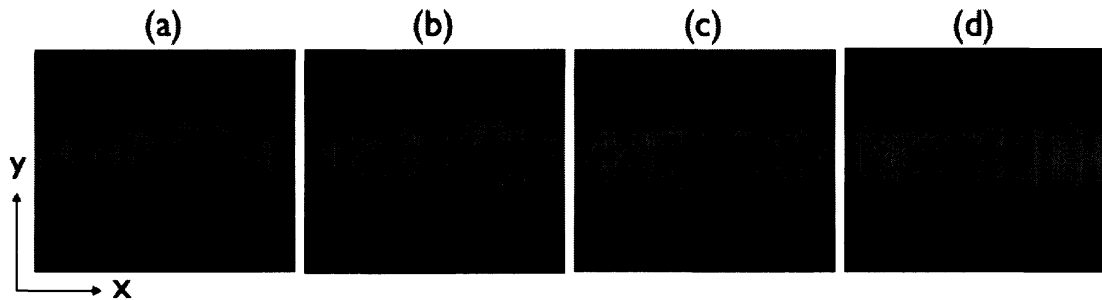


図 6: ソリトンから量子渦への崩壊。(a) $t = 126\text{ms}$, (b) $t = 131\text{ms}$, (c) $t = 136\text{ms}$, (d) $t = 138\text{ms}$ である。

いに衝突した後の密度分布である。この衝突後、ソリトンは凝縮体の表面に向かっていき、その近傍でソリトンが量子渦の対に崩壊する。この崩壊は図.6(b)に示されている。ここで生じた量子渦の対は、前節で示した表面近傍での量子渦の振る舞いと同じように運動する、つまり、表面に沿って対が互いに離れる様に動き出す(図.6(c),(d))。

このように、物体が振動することにより、左右に+と-の量子渦の対が放出され、それらが凝縮体表面に溜まることで量子渦とソリトンの転換が引き起こされることを得た。これは振動物体に特徴的なダイナミクスである。

4 結論

我々は、捕縛された冷却原子気体 BEC 中で振動物体により誘起される量子渦とソリトンのダイナミクスを調べるため、二次元 GP 方程式の数値計算を行った。本研究は、振動物体に特徴的な量子渦とソリトンのダイナミクスを得た。このダイナミクスは、振動物体が左右に異なる循環を持った量子渦対を放出することが本質的であり、これにより、量子渦とソリトンが互いに転換するダイナミクスが引き起こされている。今回、用いたパラメータは、実験的に可能であるので、我々が得たダイナミクスは実験的に観測可能である。今後は、このダイナミクスが、振動物体の振幅、振動数にどのように依存するかを調べていく。

参考文献

- [1] R. J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [2] M. Kobayashi and M. Tsubota, Phys. Rev. A **76**, 045603 (2007).

- [3] W. P. Halperin and M. Tsubota, eds., *Progress in Low Temperature Physics* (Elsevier, Amsterdam, 2009), Vol. 16.
- [4] E. A. L. Henn, J. A. Seman, G. Roati, K. M. F. Magalhaes, and V. S. Bagnato, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 045301 (2009).
- [5] T. W. Neely, E. C. Samson, A. S. Bradley, M. J. Davis, and B. P. Anderson, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 160401 (2010).
- [6] V. E. Zakharov and A. M. Rubenchik, *Sov. Phys.-JETP* **38**, 494 (1974).
- [7] G. Huang, V. A. Makarov, and M. G. Velarde, *Phys. Rev. A* **67**, 023604 (2003).
- [8] B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. A. Regal, D. L. Feder, L. A. Collins, C. W. Clark, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2926 (2001).
- [9] C. J. Pethick and H. Smith, *BOSE-EINSTEIN CONDENSATION IN DILUTE GASES* Second Edition (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [10] M. Tsubota, K. Kasamatsu, and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **65**, 023603 (2002).