

Chameleon-Effect を用いた量子相関の シミュレーション

東京理科大学 情報科学科 入山 聖史 (Satoshi Iriyama),
大矢 雅則 (Masanori Ohya)

Department of Information Science, Science University of Tokyo

ローマ大学 Luigi Accardi
Centro V. Volterra, Università di Roma Torvergata

Abstract

古典論において、観測値の期待値の相関関数は Bell の不等式に従う。量子論ではある場合においてその不等式が破れることが知られている。本研究では、Accardi による Chameleon effect の数学的モデルのシミュレーションを行った。結果として、ある条件では Bell の不等式を破ることを示した。

1 序文

次のような実験を考える。箱の中に赤と白の2つのボールが入っており、そこから1つ取り出し、色を観測する。当然赤である事象も白である事象も確率 $1/2$ で生起する。次に、箱の中に入っているカメレオンに木の枝か葉っぱを差し入れて、そこに乗せて取り出し、カメレオンの色を観測する。このような場合、緑と茶色（木の枝の色）である事象は、もともとカメレオンがその色であったのではなく、観測者がどちらを差し入れたかによる。ここで注意することは、ボールの場合、もともと赤か白に色がついていたのに対し、カメレオンの場合は観測の影響により結果が変わったということである。

さて、ここで2匹のカメレオンを考える。片方は正常な反応をするもので、もう片方はそれと反対な反応、つまり、葉っぱをいれれば茶色に、木の枝を入れれば緑色に変化するカメレオンである。2匹を違う箱に入れ、それぞれ違う観測者 A と B が観測を行う。お互いにどの観測を行ったかは分からない。そのような状況で、自分の観測結果だけをもとに、相手の観測結果は予測できるだろうか、そして、その観測結果の間に何らかの相関はあるだろうか。

本研究は、Accardi の Chameleon effect の研究 [1, 2] を実際にシミュレーションを行い検証した。

2章では Bell の不等式 [3] を説明し、古典論では観測値の期待値についての相関関数はその不等式に従い、量子論ではある場合においてその不等式が破れるということを説明する [4, 5]。3章では、古典論に、局所的な操作で全体に何らかの影響を与えうる力学系を考え、4章でその力学系に具体的な変換の写像を定義し、

その結果 Bell の不等式が破れるということを証明する。5 章では計算機を用いたシミュレーションの手順を説明し、6 章でその結果のグラフを示す。

2 Bell の不等式

相関を持つ 2 つの粒子の離れた場所での観測を考える。

観測者 1 を Alice, 観測者 2 を Bob として, 物理量を $S_a^1 = \pm 1, S_b^2 = \pm 1$ とする。ここで, $a = [0, 2\pi), b = [0, 2\pi)$ は, Alice, Bob がそれぞれ任意に選ぶことができる。このとき, (局所) 古典論では, S_a^1, S_b^2 は「(隠れた) 変数とその確率分布」によって決まる。つまり, σ を隠れた変数, $P(\sigma)$ をその確率分布とすると, 物理量は $S_a^1(\sigma), S_b^2(\sigma)$ となる。

観測値について次の相関関数

$$\langle S_a^1 S_b^2 \rangle = \sum_{\sigma} P(\sigma) S_a^1(\sigma) S_b^2(\sigma) \quad (\text{Kolmogorovian}) \quad (2.1)$$

を考える。Alice と Bob は, a, b のほかにもうひとつの値 $c = [0, 2\pi)$ のどちらかを取れるとすると, S_a, S_b, S_c のあいだに次の恒等式

$$S_a(S_b - S_c) \equiv \pm(1 - S_b S_c) \quad (2.2)$$

が成り立つ。この 3 つの S_a, S_b, S_c のうち任意の 2 つが実現可能である。ここで, この観測を何回も繰り返し行うことを考えて, i 番目の σ の値を σ_i とすると,

$$S_a(\sigma_i)(S_b(\sigma_i) - S_c(\sigma_i)) \equiv \pm(1 - S_b(\sigma_i) S_c(\sigma_i)) \quad (2.3)$$

も成り立っている。 i に関して平均をとると

$$|\langle S_a S_b \rangle - \langle S_a S_c \rangle| \leq 1 - \langle S_b S_c \rangle \quad (\text{Bell の不等式}) \quad (2.4)$$

が成り立つ。これは古典論を仮定した場合に満たすべき不等式となる。

2.1 量子論における Bell の不等式の破れ

つぎに, 一重項状態にあるスピン 1/2 粒子を考える。お互いは十分に離れているものとする。このとき,

$$\begin{aligned} S_a^1(\sigma) &= \text{sgn}(\cos(\sigma - a)) \\ S_b^2(\sigma) &= \text{sgn}(\cos(\sigma - b)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

であるから, 相関関数は

$$\langle S_a^1 S_b^2 \rangle = -\cos(b - a) \quad (2.6)$$

となる. ここで, $a = \frac{1}{3}\pi, b = \frac{2}{3}\pi, c = \pi$ とすると Bell の不等式は

$$|\langle S_a S_b \rangle - \langle S_a S_c \rangle| \geq 1 - \langle S_b S_c \rangle \quad (2.7)$$

となる. これより, 量子論において Bell の不等式は成り立たないことになる. はたして, こういった相関を古典的な力学, 局所的な操作で再現できないであろうか.

3 Bell の不等式を破るような古典的 dynamics

次のような力学系を考える.

- Adaptive dynamics

測定の影響によって, σ の確率分布が global に変わりうる. 但し, あくまでも操作は局所的である. 観測者 Alice, Bob はそれぞれ S_a^1, S_b^2 を測る測定器とカップルしており, それぞれの測定器の状態は, λ_1, λ_2 とする.

送られてくる粒子は観測器の影響を受け, そのうちあるものは外にとんでいってしまう. (どれがとんでいってしまうかは a, b に依存する.) そして, Alice のほうも Bob のほうも飛んでいかなかったもののみが, 測定にかかる.

このような設定では, 相関関数は $P_{a,b}(\sigma)$ となり, a, b に依存する.

$$\langle S_a^1 S_b^2 \rangle = \sum_{\sigma} P_{a,b}(\sigma) S_a^1(\sigma) S_b^2(\sigma) \quad (3.1)$$

これから, Bell の不等式を破るような dynamics を作るができる.

4 Chameleon Effect の数学的モデル

S_1, S_2 をある集合として, 初期状態 $\sigma \in \mathcal{S} = S_1 \times S_2$ とする. ここで, 状態は粒子と観測器の状態に分けられるので, $S_j = S_{j,part} \times S_{j,app}, (j = 1, 2)$ とかける. さらに $\sigma = p_1 \times p_2$ とすると, $p_k = \sigma_k \times \lambda_k, \sigma_k \in S_{k,part}, \lambda_k \in S_{k,app} (k = 1, 2)$ となる.

ここで, 観測器の影響による, ある変換 $T: \sigma \rightarrow T(\sigma)$ を考える. a, b に依存して T が決まるので,

$$T = T_{1,a} \otimes T_{2,b} \quad (4.1)$$

とすると,

$$T(\sigma) = T_{1,a} \otimes T_{2,b}(p_1, p_2) = (T_{1,a}(p_2), T_{2,b}(p_2)) \quad (4.2)$$

となる. これは観測器の影響が, それぞれ局所的に働くことをあらわす. 実際, $a, b \in [0, 2\pi), \sigma_1, \sigma_2 \in [0, 2\pi), \lambda_1, \lambda_2 \in R$ として, つぎの関数

$$T'_{1,a}(\sigma_1) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} |\cos(\sigma_1 - a)| \quad (4.3)$$

$$T'_{2,b}(\sigma_2) = \sqrt{2\pi} \quad (4.4)$$

を定義し, 変換 T を

$$\begin{aligned} T_{1,a}(p_1) &= (s_{1,a}(p_1), m_{1,a}(p_1)) \\ T_{2,b}(p_2) &= (s_{2,b}(p_2), m_{2,b}(p_2)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} s_{1,a}(p_1) &= s_{1,a}(\sigma_1, \lambda_1) = \sigma_1 \\ s_{2,b}(p_2) &= s_{2,b}(\sigma_2, \lambda_2) = \sigma_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} m_{1,a}(p_1) &= m_{1,a}(\sigma_1, \lambda_1) = \lambda_1 \frac{1}{T'_{1,a}(\sigma_1)} \\ m_{2,b}(p_2) &= m_{2,b}(\sigma_2, \lambda_2) = \lambda_2 \frac{1}{T'_{2,b}(\sigma_2)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

このように構成する. ここで次のような測度を定義する.

$$\begin{aligned} p_S(\sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{2\pi} \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \\ p_{1,a}(\sigma_1, \lambda_1) &= \delta(m_{1,a}(\sigma_1, \lambda_1) - m_a) \\ p_{2,b}(\sigma_2, \lambda_2) &= \delta(m_{2,b}(\sigma_2, \lambda_2) - m_b) \end{aligned} \quad (4.8)$$

(m_a, m_b は任意). これらは確率測度にならない.

Lemma 1 $P_{a,b}(\sigma, \lambda)$ を

$$P_{a,b}(\sigma) \equiv p_S(\sigma_1, \sigma_2) p_{1,a}(\sigma_1, \lambda_1) p_{2,b}(\sigma_2, \lambda_2) \quad (4.9)$$

とすると, 測度 $P_{a,b}(\sigma)$ は, $[0, 2\pi)^2 \times R^2$ 上の確率測度となる.

証明は, 確率測度の定義より明らか.

Lemma 2 ± 1 に値をとる写像 $S_a^1(\sigma_1, \mu_1), S_b^2(\sigma_2, \mu_2), (\sigma_j \in [0, 2\pi), \mu_j \in R)$ を以下のように与える.

$$\begin{aligned} S_a^1(\sigma, \mu) &= S_a^1(\sigma) = \operatorname{sgn}(\cos(\sigma - a)), \\ S_x^2 &= -S_x^1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

すると, 次の式

$$\begin{aligned} &\int S_a^1(s_1(\sigma_1, \lambda_1), m_1(\sigma_1, \lambda_2)) S_b^1(s_2(\sigma_2, \lambda_2), m_2(\sigma_2, \lambda_2)) \\ &\times P_{a,b}(\sigma, \lambda) d\sigma_1 d\sigma_2 d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= -\cos(a - b) \end{aligned} \quad (4.11)$$

をみたす.

Proof. 4.11 に 4.9 を代入すると

$$\begin{aligned} & \int S_a^1(s_1(\sigma_1, \lambda_1), m_1(\sigma_1, \lambda_2)) S_b^1(s_2(\sigma_2, \lambda_2), m_2(\sigma_2, \lambda_2)) \\ & \times \delta(m_{1,a}(\sigma_1, \lambda_1) - m_a) \delta(m_{2,b}(\sigma_2, \lambda_2) - m_b) p_S(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

となり, ここで次の変数変換を行う.

$$\begin{aligned} m_{1,a}(\sigma_1, \lambda_1) &= \mu_1 \\ m_{2,b}(\sigma_2, \lambda_2) &= \mu_2 \\ m'_{1,a}(\sigma_1, \lambda_1) d\lambda_1 &= d\mu_1 \\ m'_{2,b}(\sigma_2, \lambda_2) d\lambda_2 &= d\mu_2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

ここで, 4.7 より, $a, b, \sigma_1, \sigma_2 \in [0, 2\pi)$ が与えられたとき, 関数

$$m_{1,a}(\sigma_1, \cdot), m_{2,b}(\sigma_2, \cdot) : R \rightarrow R \quad (4.14)$$

は, 逆関数をもつから

$$\begin{aligned} d\lambda_1 &= \frac{1}{m'_{1,a}(\sigma_1, m_{1,a}^{-1}(\sigma_1, \mu_1))} d\mu_1 \equiv T'_{1,a}(\sigma_1, \mu_1) d\mu_1 \\ d\lambda_2 &= \frac{1}{m'_{2,b}(\sigma_2, m_{2,b}^{-1}(\sigma_2, \mu_2))} d\mu_2 \equiv T'_{2,b}(\sigma_2, \mu_2) d\mu_2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

となる. これを 4.12 に代入すると,

$$\begin{aligned} & \int \int \int \int S_a^1(s_1(\sigma_1, m_{1,a}^{-1}(\sigma_1, \mu_1)), \mu_1) S_b^1(s_2(\sigma_2, m_{2,b}^{-1}(\sigma_2, \mu_2)), \mu_2) \\ & \times T'_{1,a}(\sigma_1, \mu_1) T'_{2,b}(\sigma_2, \mu_2) \delta(\mu_1 - m_a) \delta(\mu_2 - m_b) p_S(\sigma_1, \sigma_2) d\mu_1 d\mu_2 d\sigma_1 d\sigma_2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

となり, ここで $s_{1,a}, s_{2,b}$ と S_a^1, S_b^2 の定義から

$$\begin{aligned} S_a^1(\sigma_1) &= S_a^1(s_1(\sigma_1, m_{1,a}^{-1}(\sigma_1, \mu_1)), \mu_1) \\ S_b^2(\sigma_2) &= S_b^1(s_2(\sigma_2, m_{2,b}^{-1}(\sigma_2, \mu_2)), \mu_2) \end{aligned} \quad (4.17)$$

となり, 左辺は σ_1, σ_2 のみに依存する. したがって, 4.16 は

$$\int \int S_a^1(\sigma_1) S_b^2(\sigma_2) T'_{1,a}(\sigma_1) T'_{2,b}(\sigma_2) p_S(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \quad (4.18)$$

となる.

$$p_S(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi} \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (4.19)$$

より, 4.18 は

$$\begin{aligned} \int S_a^1(\sigma) S_b^2(\sigma) T'_{1,a}(\sigma) T'_{2,b}(\sigma) \frac{d\sigma}{2\pi} &= - \int_0^{2\pi} \cos(\sigma - a) \operatorname{sgn}(\cos(\sigma - b)) d\sigma \\ &= -\cos(b - a) \end{aligned} \quad (4.20)$$

となる. ■

これより, Chameleon effect を用いたモデルでは, 相関関数が $-\cos(a - b)$ となり, ある a, b, c を与えた場合 Bell の不等式を破ることができる.

5 シミュレーション

計算機を用いて Chameleon effect をシミュレーションする. 3 台の計算機を使用して, 粒子の発生と二人の観測者を想定する. ここで, 計算機 A, B をそれぞれ観測者とし, 計算機 C を粒子の発生源とする. シミュレーションは次のような step で行われる.

step 1

C は $\sigma_j \in [0, 2\pi)$ の配列を一様分布に従い発生させ, A と B に送る.

step2

A は送られてきた σ_j に対して $S_a^1(\sigma_j)$ を計算する.

step3

B は送られてきた σ_j に対して $S_b^2(\sigma_j)$ を計算する.

step4

A と B はそれぞれ S_a^1, S_b^2 の配列を C に送る.

step5

C は送られてきた S_a^1, S_b^2 の算術平均を計算する.

step6

同様に S_a^1, S_c^2 と S_b^2, S_c^1 を計算するため step1~5 を 3 回行う.

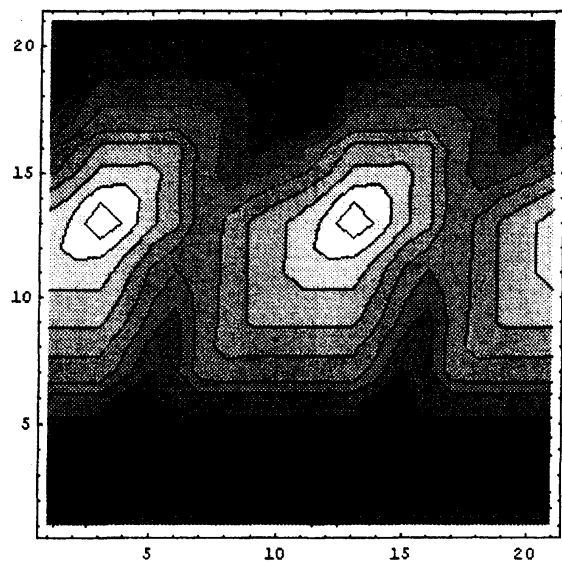
step7

C は $|\langle S_a^1 S_b^2 \rangle - \langle S_a^1 S_c^2 \rangle| - 1 + \langle S_b^2 S_c^1 \rangle$ を計算する.

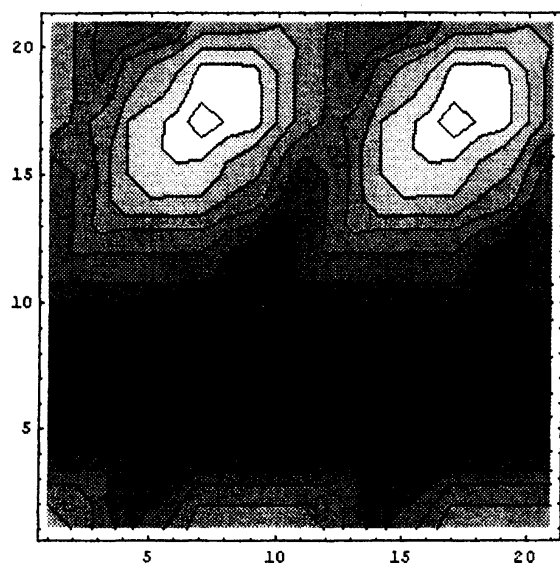
6 結果

c を固定して a, b の値を変化させて計算を行った. 図の横軸が a , 縦軸が b に対応している.

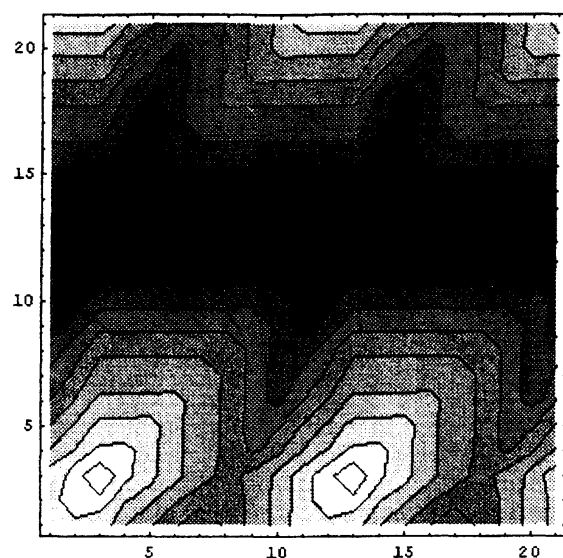
図の白くなっている部分が, より強く破れている部分である.



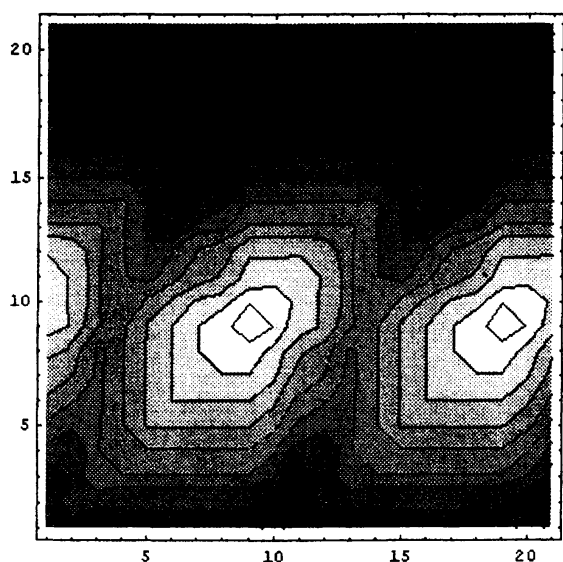
$$C = 0$$



$$C = \frac{2}{5}\pi$$



$$C = \pi$$



$$C = \frac{8}{5}\pi$$

7 まとめ

以上のような Adaptive dynamics を考えることで、古典的力学系と局所的な操作で Bell の不等式を破ることが可能である。

このようなモデルの非古典的な統計的相関を暗号などに用いることはできるだろうかという研究が行われている。

References

- [1] L. Accardi and M. Regoli, Locality and Bell's inequality, Volterra preprint No. 427(2000), quant-ph/007005

- [2] L. Accardi and M. Regoli, The EPR correlations and the chameleon effect, discussed during the Japan-Italy Joint Workshop on Quantum Open Systems and Quantum Measurement, Waseda University, 27-29 September 2001, quant-ph/0110086, Volterra preprint No.487(2001).
- [3] J.S. Bell, On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox, *Physics* 1 (1964) 95-115
- [4] L. Accardi, Topics in quantum probability, *Phys. Rep.* 77(1981) 169-192
- [5] L. Accardi, Einstein-Bhor: One All, in *The Interpretation of Quantum Theory: Where Do We Stand?*, *Acta Enciclopedica*, Ist. dell'Encyclopedia Itali.(1994) 95-115, Volterra preprint No.174(1993)