

有理写像の不定点におけるカギ系構造

京都大学総合人間学部 基礎科学科 研究員 篠原知子 (Tomoko Shinohara)

(Faculty of Integrated Human Studies, Kyoto University.)

S1. 序章.

カギ系とは、決定論的 (初期状態から n 歩以降の状態が一意的に決まること) な規則に従って、時間と共に変化する状態を扱うシステムのことです。数学的に (離散) カギ系とは、多様体 M 上の写像 $F: M \rightarrow M$ のことで、任意の点 $p \in M$ の軌道 $\{F^n(p)\}_{n=0}^{\infty}$ を分類し特徴付けることが主な目的となります。特に、複素多様体上で (M : 複素多様体, F : 正則もしくは有理写像) 議論を行うことで、関数論や、代数幾何などの道具を用いることができ、新しいモデルを構成できたり、一般論を展開していくことができます。

一次元複素カギ系 ($M = \mathbb{C}$ もしくは $\mathbb{P}^1$, F は多項式写像もしくは有理写像) の研究は 19 世紀の後半から、ニュートン法と呼ばれる代数的方程式の根を求める写像のカギ系により示されたものとの関連が明らかになりました。特に Montel の正規族の理論を元に、1910 年代に Fatou や Julia により様々な結果が得られました。その後、1980 年代には Sullivan により擬等価写像論が研究に導入され、Fatou や Julia の時代より残っていた「非遊走領域は存在するか?」という問題が解決されるなどより精密な結果が得られました。その一方、コンピュータグラフィックスの発展と共に、フラクタルを産み出すシステムとしても複素カギ系は注目を集めています。(一変数複素カギ系の研究の歴史については 2003 年 3 月号の数学セミナーに詳しい解説が載っています。)

これらの理論の多変数への自然な拡張として 1990 年代より、 $M = \mathbb{C}^n, \mathbb{P}^n$, F : 正則, 有理写像の場合は, Fornæss, Sibony, Ueda 等により、また $M = \mathbb{C}^2$, F : 多項式自己同型の場合は Bedford, Smillie 等により研究されています。最近では、より一般的に M : compact Kähler surface, F : 双有理写像の場合や、 M : K3 曲面, F : 自己同型写像の場合などについても研究が行われています。

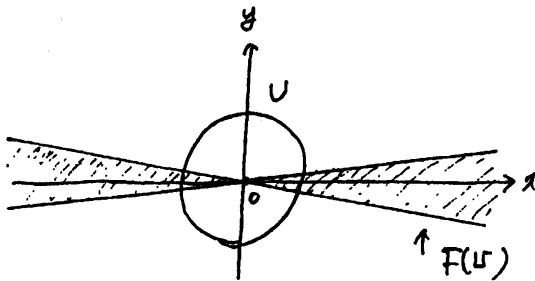
今日は $M = \mathbb{P}^2$ 複素 2 次元射影空間, F : 双有理写像の場合について、特に不定点、および不連続点におけるカギ系の局所構造について得た結果を報告します。

例えば, $\mathbb{C}^2$ 上の有理写像 $F(x, y) = (\frac{x}{y}, y)$ は $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y=0\}$ より $(0, 0)$ を不連続点に持ちます。一般に不連続点におけるカスチリ構造を得ることは難しいのですが, 二の F のように

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y) \ni (0, 0)$ となる場合 (このような不連続点は周期的不連続点と呼ばれます。)

F は $(0, 0)$ において図1のように回帰性を持っています。回帰性を持つ点集合の構造を調べることは, カスチリにおいて基本的な課題であり, 回帰性を持つ点の代表である, 不連続点におけるカスチリ構造の理論と同様のものが期待されます。

図1. (以降, 図は $\mathbb{R}^2$ 平面での写りのものとする。), $U = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 < \varepsilon\}$



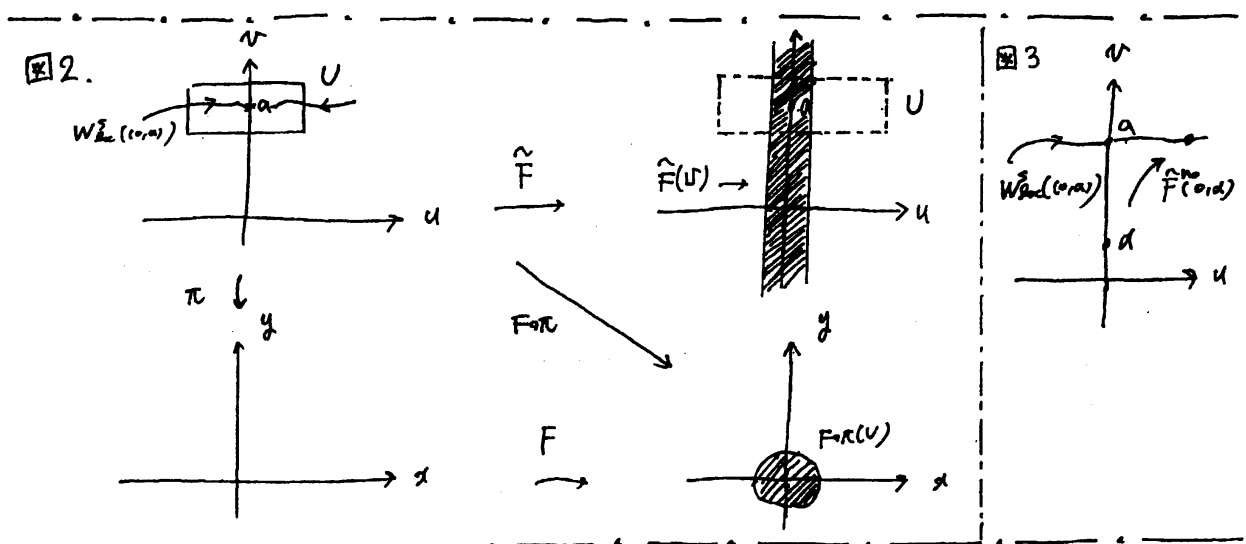
ここで不連続点は前述の二つの環とも関係があることを注意しておきます。

$R(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ を複素2変数の多項式 p, q からなる多項式写像とします。 R に対して, 新しく有理写像 $F(x, y) = (x, y) - JR(x, y)^{-1} \begin{pmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \end{pmatrix}$ を定義します。但し, $JR(x, y)^{-1}$ は R のヤコビ行列の逆行列とします。 $R(x, y) = (0, 0)$ の根 (x_0, y_0) を F の反復合成により計算していく方法をニュートン法と呼びます。 $\det(JR(x_0, y_0)) \neq 0$ のとき (x_0, y_0) は $F(x, y)$ の吸引不動点であり, 吸引域から初期点, (x_1, y_1) を選べば, $F^n(x_1, y_1)$ を計算すると (x_0, y_0) を近似計算することが出来ます。一方 $\det(JR(x_0, y_0)) = 0$ のとき (x_0, y_0) は $F(x, y)$ の不連続点となり, ニュートン法により, $R(x, y) = (0, 0)$ の根を近似していくには, F の不連続点 (x_0, y_0) の存在集合 $W^s(x_0, y_0, F)$ (正確は後程) の構造を研究する必要があると言えます。

今日は $F(x, y) = \left(\frac{x^2 + ax - y}{bx}, x \right)$ ($a \neq 1, b \neq 0$) の形をした有理写像の力学系を考察します。 F は $\mathbb{P}^2$ 上の双有理写像に拡張され、特にその逆写像 G は (x, y) 平面上で $G(x, y) = (y, y^2 - bx + ay)$ と表されます。簡単な計算より $(0, 0)$ は F の不動点であり $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y) = \{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y = 0 \} \ni (0, 0)$ より周期的不動点であることがわかります。

周期的不動点に関しては、これまで [Yamagishi] による研究が行われています。

$\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, (u, v) \mapsto (u, uv)$ とします。 $F \circ \pi(0, a) = (0, 0)$ であるので $(0, a)$ の近傍 U で $F \circ \pi(U) \ni (0, 0)$ となるものが存在します。特に、この F は [Yamagishi] の条件を満たすことから $(0, a)$ に対して局所安定集合 $W_{\text{loc}}^s(0, a, \hat{F})$ (左は後述) が存在し $\hat{F}(U)$ と U が $(0, a)$ の近傍で図2のような状況であることがわかります。但し $\hat{F} = \pi^{-1} \circ F \circ \pi$ とします。



今回 本稿は (u, v) 平面上の点 $(0, a)$ で $\hat{F}^n(0, a) \in W_{\text{loc}}^s(0, a, \hat{F})$ となるものが存在することを示しました。(図3参照) さらにある条件を $\hat{F}^n(0, a)$ に与えるとき $(0, a)$ の近傍に馬蹄形写像が定義されること、結果として不動点 $(0, 0)$ に F の周期点が集積することがわかりました。今日の報告では、まず第2章で主定理を述べ、第3章では一般の馬蹄形写像の定義を紹介し、第4章では我々の F に対してどのように馬蹄形写像が定義されるかを説明し、証明については [Shinohara] を参照して下さい。この報告では証明の核となる幾何構造について説明したいと思います。

§2. 主定理.

この章では主定理を紹介 します。その前にいくつかの準備を行います。まず我々の F に対して

$(0,0)$ は不動点ではたが、 F の逆写像 G に対しては、 $G(0,0)=(0,0)$ より不動点であることに

注意しておきます。特に $JG(0,0)$ の固有値が $0, \alpha$ であることから、これは鞍型と

呼ばれる不動点です。鞍型不動点に対しては $(0,0)$ のある近傍 U が存在し、次の2つの

集合が存在することが知られています。([Morosawa] 参照)。

$$W_{loc}^s((0,0), G) := \{ z \in U \mid G^n(z) \in U, \lim_{n \rightarrow \infty} G^n(z) = (0,0) \}, (0,0) \text{ の局所安定集合.}$$

$$W_{loc}^u((0,0), G) := \{ z \in U \mid F^n(z) \in U, \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(z) = (0,0) \} \cup \{(0,0)\}, (0,0) \text{ の局所不安定集合.}$$

特に、この $W_{loc}^u((0,0), G)$ を π でプロジェクトしたものが前章で述べた [Yamagishi] により

存在が保証される局所安定集合 $W_{loc}^s((0, \alpha), \tilde{F})$ であることに注意しておきます。

更に 次の2つの集合を定義します。

$$W^s((0,0), G) := \bigcup_{n \geq 0} G^{-n}(W_{loc}^s((0,0), G)), (0,0) \text{ の安定集合.}$$

$$W^u((0,0), G) := \bigcup_{n \geq 0} G^n(W_{loc}^u((0,0), G)), (0,0) \text{ の不安定集合.}$$

また $W^s((0,0), G) \cap W^u((0,0), G) - \{(0,0)\} \ni z$ を $(0,0)$ のホモクリニック点とよびます。

特に z で $T_z \mathbb{C}^2 = T_z W^s((0,0), G) \oplus T_z W^u((0,0), G)$ が成立するとき横断的

ホモクリニック点、と呼びます。このとき次の主定理を得ました。

主定理. (i) 任意のパラメーター $|a| > 1$, $b \neq 0$ に対して $(0,0)$ のホモクリニック点、 z が存在する。

特にあるパラメーターのとき、 $z = (\frac{a}{b}, 0)$ である。

(2) $z = (\frac{a}{b}, 0)$ が $(0,0)$ の横断的ホモクリニック点であるとき、ある自然数 k , ある $\mathbb{C}^2$ の部分集合 X ,

ある同相写像 $\pi: X \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{Z}} - E$ が存在し、次の成立する。

$$(i) \bar{X} \ni (0,0) \quad (ii) G^k(X) = X \quad (iii) F^k(X) = X. \quad (iv) \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{G^k} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \{0,1\}^{\mathbb{Z}} - E & \xrightarrow{\sigma} & \{0,1\}^{\mathbb{Z}} - E \end{array} \text{ は可換である.}$$

但し、 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}} = \{s = (\dots s_{-1}, s_0, s_1, \dots) \mid s_i = 0, 1\}$ は記号 $0, 1$ からなる両側無限列全体の空間。

$$E := \{s \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \mid \text{ある番号 } m \text{ が存在し, } (\dots s_m, 0, 0, \dots)\},$$

$$\sigma: \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, (\dots s_{-1}, \check{s}_0, s_1, \dots) \mapsto (\dots, \check{s}_1, s_0, \dots), \text{ 左ずらし写像}$$

ある自然数 n に対し $F^n(p) = p$ となる点 $p \in F$ の周期点とよばれる。定理の系として次の主張を得る。

系. F の周期点 p が $(0,0)$ に累積する。

5.3. 馬蹄形写像.

この章では興味深い力学系を実現する 2 次元写像の例として 1960 年代に Smale により考えられた馬蹄形写像について説明する。(きちんとした定式化は [Aoki] などを見照して下さい。こゝでの記述は [Kokubu] の 4.4 章を要約したものであり。) 次の章でみるように我々の F も $(0,0)$ の近傍で本質的にこの馬蹄形写像と同様の構造を採っていることがわかります。

平面上の同相写像 $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が図 4 のように正方形 $ABCD$ を馬蹄形 $A'B'C'D'$ に写すとする。

この H は正方形 $ABCD$ を横に縮め、縦に伸ばした後、折り曲げて馬蹄形 $A'B'C'D'$ に写すとする。

図 4.

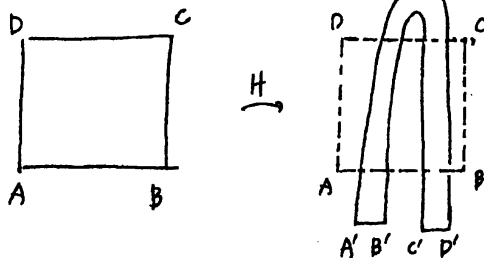
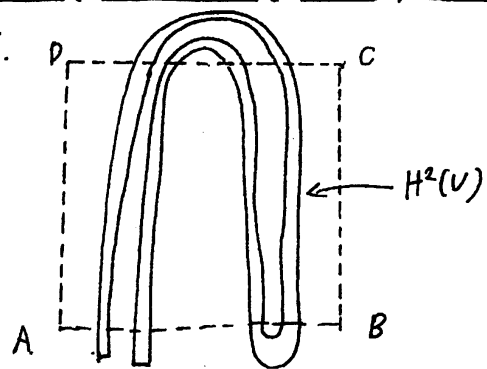


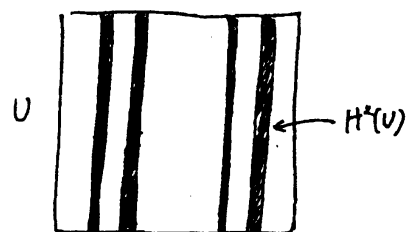
図 5.



正方形 $ABCD$ を U とおきます。 $H^2(U)$ は図 5 のようになります。これを繰り返して

$H^n(U) \cap U$ を考えると図 6 のように縦に細長い帯が 2^n 個並んだ状態になります。この帯領域の横幅は H による横方向の縮小率がほぼ一定の $\lambda < 1$ であればほぼ λ^n であり、0 に収束します。よって $\bigcap_{n \geq 0} H^n(U)$ は (Cantor 集合) $\times$ (線分) と同相になります。

図 6



一方 H の逆写像 H^{-1} において正方形 $ABCD$ は横向き馬蹄形 $A''B''C''D''$ に写される。

(図7参照)。同様の考察で $H^{-n}(U) \cap U$ は 2^n 個の横に細長い帯が並んだものになります。

この領域の縦幅は H による縦方向の伸び率がほぼ一定の $\mu > 1$ であれば、 $\frac{1}{\mu^n}$ となり

0 に収束します。さて $\bigcap_{n=0}^{\infty} H^n(U)$ は (線分) $\times$ (Cantor集合) と同相になります。 $X = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H^n(U)$

とおくと、 X の点 p はその軌道 $\{H^n(p)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が常に X に留まります。特に

$X = \bigcap_{n=0}^{\infty} H^n(U) \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} H^{-n}(U)$ より X は (Cantor集合) $\times$ (Cantor集合) と同相になります。

(図8参照)。 $H(U) \cap U$ は図9の通りに2つの連結成分 U_0, U_1 からなります。

$$X \text{ の点 } p \text{ に対し} \quad s_n(p) = \begin{cases} 0 & \cdots H^n(p) \in U_0 \text{ のとき} \\ 1 & \cdots H^n(p) \in U_1 \text{ のとき} \end{cases} \quad \text{と対応付けると}$$

同相写像 $\pi: X \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $p \mapsto (\cdots s_{-1}(p), s_0(p), s_1(p), \cdots)$ が定まり、定義より

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \{0,1\}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\sigma} & \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \end{array} \quad \text{は可換となります。}$$

$\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 上の σ による力学系を考察すると X に H の周期点が無数に存在すると、 H が初期値に関する敏感な依存性を持つと、位相的エントロピーが正になることがわかり $H: X \rightarrow X$ がカオス的な性質を持つ力学系であることがわかります。

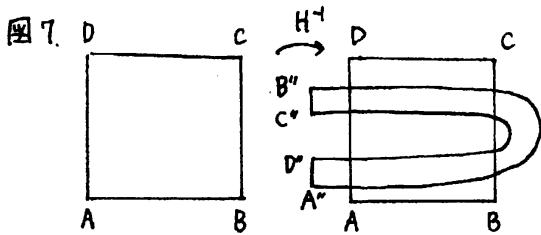


図8

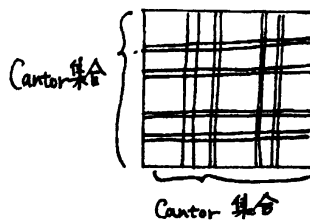
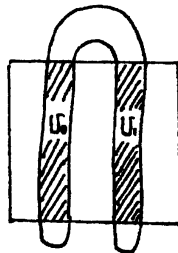


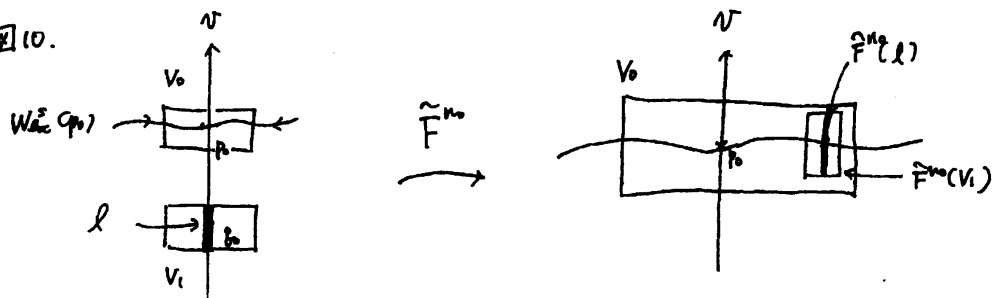
図9



§4. 主定理の証明の予備.

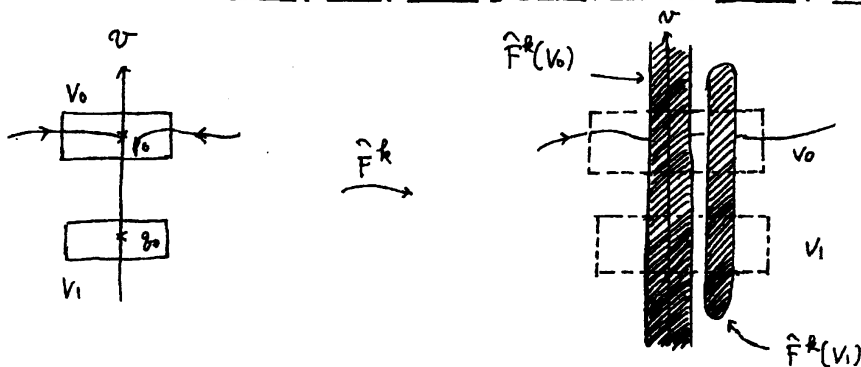
序章において述べたように 我々の F は [Yamagishi] の条件を満たしており (u, v) 平面上の点, $p_0 := (0, \alpha)$ の局所安定集合 $W_{loc}^s(p, \hat{F})$ が存在することがわかった. 更に [Shinohara] の §3 より, (u, v) 平面上の点 $q_0 := (0, \alpha)$ で $\hat{F}^{m_0}(q_0) \in W_{loc}^s(p_0, \hat{F})$ となるものが存在することがわかった. 図10 のように p_0, q_0 の近傍 V_0, V_1 をとりまう.

図10.

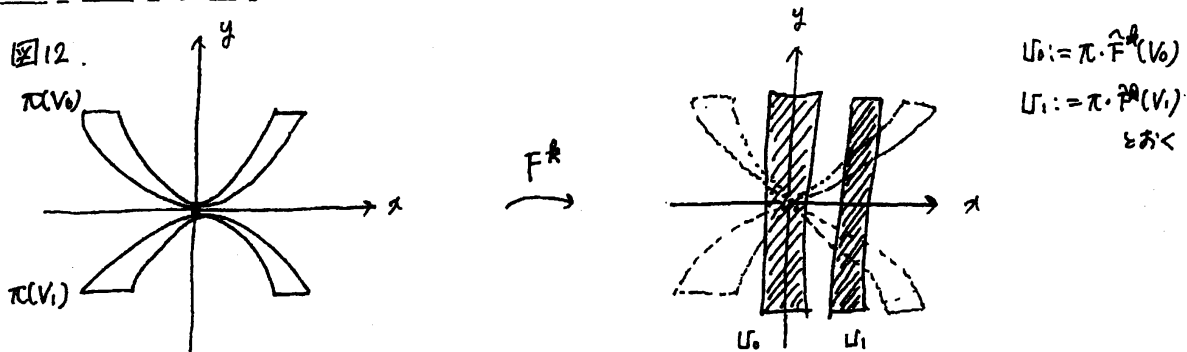


ここで $l := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u=0\} \cap V_1$ に対して $\hat{F}^{m_0}(l)$ と $W_{loc}^s(q_0, \hat{F})$ が $\hat{F}^{m_0}(q_0)$ で横断的に交わっていると仮定します. つまり $T_{\hat{F}^{m_0}(q_0)} \mathbb{R}^2 = T_{\hat{F}^{m_0}(q_0)} \hat{F}^{m_0}(l) \oplus T_{\hat{F}^{m_0}(q_0)} W_{loc}^s(q_0, \hat{F})$ が成り立つとします. このとき λ -lemma ([Kokubu] 定理 4.5.1 を参照) より, 十分な回数, $\hat{F}$ の反復合成を行えば 図11 のようになることがわかります.

図11.



$\pi(u, v) = (u, uv)$ (つまり) これを プローダクションすると 図12 のようになります。



これを逆写像 G^k の対応で見ると 図13 のようになります。

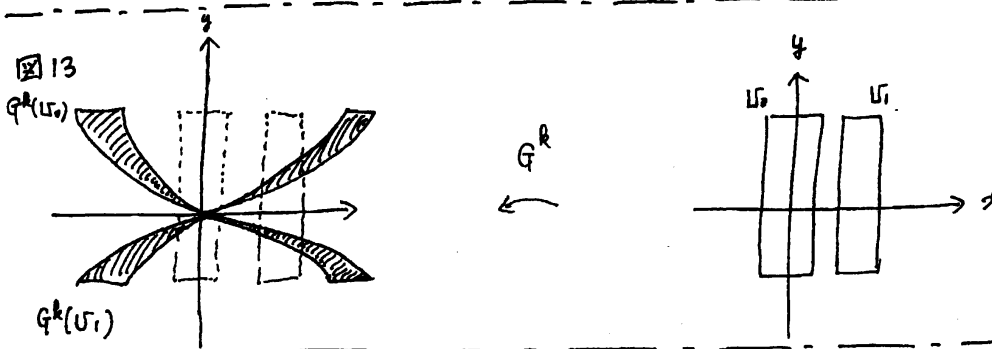
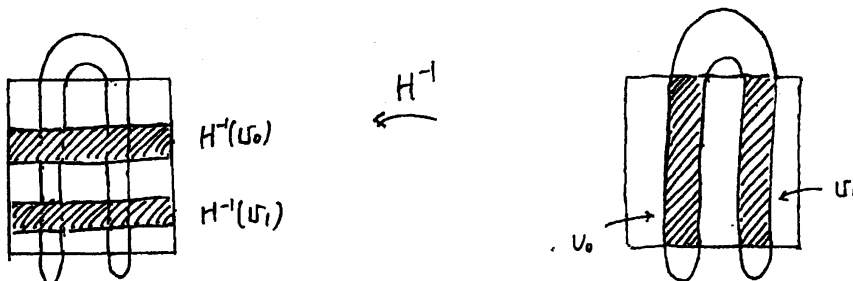


図14と比較すれば G^k は 通常の馬蹄形写像を y 軸方向につぶしたものに なっていることが わかります。



通常の馬蹄形写依の不変集合より退化する部分集合(不変点, $(0,0)$ とその逆像.)
を除くことで主定理の主張が得られる。

参考文献

- [Aoki] 青木統夫, 「力学系・カオス」, 共立出版株式会社, 1996.
- [Kokubu] 國府寛司, 「力学系の基礎」, 朝倉書店, 2000.
- [Morosawa] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi and T. Ueda, *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press, (1999)
- [Shinohara] T. Shinohara, Local structure of Fatou mapping at an indeterminate point with homoclinic points, 数理解析研究所講究録 1269 (2002), 48-62.
- [Yamagishi] Y. Yamagishi, Cantor bouquet of holomorphic stable manifolds for a periodic indeterminate point, *Non linearity*, 14 (2001), 113-120.
- [Ushiki] 宇敷重広, 谷口雅彦, 須川敏幸, 諸澤俊介, 実倉光広, 「複素力学の世界」
数学セナ 2003年3月号, 日本評論社.