

円柱のまわりを過ぎる定常 輻射流の漸近解

京大 工 久保昇三

流れの場合、その流体の温度場との相互作用を考えるにあたって、Fig 1. の様な冷めた一様流 U 中におかれた熱い物体 B のまわりの流れを考えてみよう、但し簡単のため粘性による効果は無視出来るものとする。

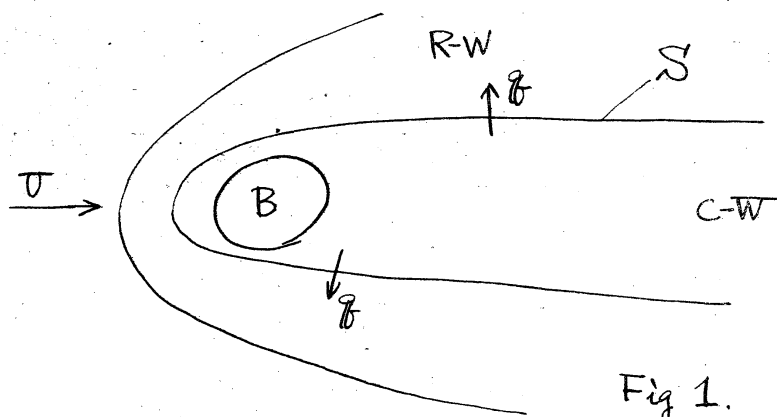


Fig 1.

熱の伝達が熱伝導 ($q = -k \nabla T$) であるとすれば、適当な Prandtl 数, Mach 数の下で (実際的にも多い場合として) 高温物体 B の影響による高温部分は狭い後流領域 $C-W$ にとじ

こめられてしまう。これに対し熱伝達が熱輻射 (eq. (2)) になれば、流体が光学的にほぼ濃密 ($\tau \gg 1$) で存在かぎり、熱輻射の持つ遠達的な性質によって C-W 領域の高温がスはその外の領域に熱を放出し、かつ又同時的に全ての点との相互作用を起す事から積分的な性質が出てくる。これらの効果によって、高温部分はもはや C-W 内に止まらず、新しい、そしてより広がった高温領域 R-W を形成するのである。この事情は流れの場 (そして温度場) が一次元であれ、二次元、三次元であれ成立つものである (ref. 1) が二次元、三次元の場合は広がり得る外部領域が一次元の場合に比してはるかに大きい事からも、より一層この効果が顕著である事が期待される。

§1 二次元、三次元の場合の輻射場

一般に輻射場は、それを巨視的に見た場合でも種々困難な問題を含んでいる (ref. 2) ののであるが、輻射場と流れの場との相互作用を調べようとする時、これらの困難を極力さけるのが望ましい。従って、ここでは、流体及び物体 B の輻射率等々は光の波長に無関係、いわゆる灰色気体、灰色物体と考える、さらに物体 B は完全な黒体である、と仮定する。又巨視的輻射の温度場は巨視的流体の温度場と完全に一致し、しかもそれらは局所熱力学的平衡にある、と仮定する。

この様な場合、輻射場は最も簡単となり光速 c が流速 U 等に

比し充分大であるとして、次の式を得る

$$\Omega \nabla I(r, \Omega) = -\alpha I + \alpha \frac{\sigma}{\pi} T^4(r) \quad (1)$$

$$q_R = \int_{4\pi} \Omega I(r, \Omega) d\Omega \quad (2)$$

Ω ; 考える方向の単位ベクトル

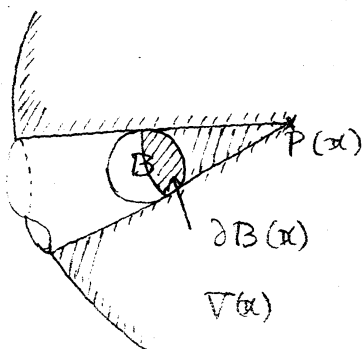
$I(r, \Omega)$; r 点で Ω 方向への total intensity

q_R ; radiative heat flow

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r_1}, \frac{\partial}{\partial r_2}, \frac{\partial}{\partial r_3} \right)$$

$T(r)$ を既知函数と見做せば (1) は形式積分出来て

$$\begin{aligned} \nabla q_R = & 4\alpha\sigma T^4 - \alpha \frac{\sigma}{\pi} \int_{\partial B(x)} \frac{T_w(x_0) e^{-\alpha|x-x_0|}}{|x-x_0|^2} dS \\ & - \alpha^2 \frac{\sigma}{\pi} \int_{V(x)} \frac{T^4(x') e^{-\alpha|x-x'|}}{|x-x'|^2} dx' \end{aligned} \quad (3)$$



α ; (gas) total absorption coefficient

σ ; Stefan-Boltzmann constant

dS ; $\partial B(x)$ の 面積要素

$$\mathbb{E} := (x-x_0)/|x-x_0|$$

となる。この時の積分領域 $\partial B(x)$ 及び $V(x)$ が位置 x の函数である困難を避けるには物体 B を無限に小さくすればよい

しかし、その時右辺第二項の積分はBの形になることE忘れてはならない。又(3)は一次元の場合のみ、やや簡単になり得る (ref. 3)。そしてその積分項の様子は調べられている (ref. 4)。

(3)式の様に複雑な二重積分を含む表現を流体の式とともに取扱う事は非常に困難であるので、(1)式中の $I(\eta, \eta)$ と η について球面調和函数展開する近似法が提唱されている (ref. 5) が、この近似法は近似の程度が非常にわかり難いし、 P_1 -近似であるため、二次元、三次元の流れの全体的効果E良く近似しているかどうか、疑問である。

§2 流体力学の方程式の簡単化。

流体力学の方程式は、それのみで充分に複雑であるので、極力単純化しなければならない。そこで、定常、二次元、非粘性、非熱伝導性、の圧縮性流体とし、物体を円柱であるとある。さらに線型化 (Oseen 近似) E行い無次元化して

$$\nabla(\psi + p e_\sigma) = 0 \quad (4)$$

$$(e_\sigma \nabla) \psi = -\frac{1}{M^2} \nabla p \quad (5)$$

$$e_\sigma \nabla \left(T - \frac{\gamma-1}{\gamma} p \right) = -T \nabla \ln R \quad (6)$$

$$p = \rho + T \quad (7)$$

e_σ : σ (主流) 方向単位ベクトル

$M = U/a_T$; 等温 Mach 数

$$T = \frac{8\alpha\sigma T_0^4}{f_0 C_p T_0} \quad ; \text{ 輻射の Boltzmann 数. }$$

この線型化は、流体力学的非線形効果をおとし、輻射の T^4 的振舞をおとすので好ましくないが、現在の所やむを得ない。

さらに上式中の全ての量を

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} M^{zn} A_n$$

と展開して $n=0$ のみをとれば

$$p_0 = 0, \quad \therefore f_0 + T_0 = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_{r,0}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{\theta,0}) \quad (9)$$

$$\cos \theta \frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f_0}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{r,0}) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta,0}}{\partial \theta} = 0 \quad (10)$$

$$\left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) T_0 = -\Gamma \nabla^2 \mathcal{E}_{R,0}(T_0) \quad (11)$$

$n=1$ の時

$$p_1 = -v_{r,0} \cos \theta - v_{\theta,0} \sin \theta$$

u. s. w.

となり、順次解ける。

§3 輻射熱流項

(3)式より、物体Bと円柱、その表面温度を一定とし、Bの円柱半径 $\rightarrow 0$ とした時、エネルギー式中の $\nabla^2 \mathcal{E}_{R,0}$ は

$$\nabla \phi_{R_0} = 2T_0 - 2T_w \frac{K_{i2}(r)}{r} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{K_{i1}(\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta - \varphi)})}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta - \varphi)}} T_0(r', \varphi') r' dr' d\varphi$$

$$T_w = \frac{1}{\pi} \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left[r_0 \frac{T_w(r_0)}{T_0} \right] ; \text{有限}$$

$$K_{in}(t) \equiv \int_t^\infty \int_p^\infty K_0(p) (dp)^n$$

となり、輻射の場合でも無限に小さい物体から有限の大きさの熱量を取り出すには、物体温度は無限大（通常の order の）でなければならぬ。

$$\text{又} \quad \frac{\partial \phi_0}{\partial r} = r \nabla \phi_0, \quad \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} = r \nabla \phi_0$$

として ϕ_0 の 3 変数を導入し

suffix θ のついた全量（以後 θ は除く）を Fourier 展開する。この特流れの上下対称性から $\cos$ の形の項だけである。

$$\text{i.e.} \quad A = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos m\theta$$

$$\text{又} \quad \mathcal{L}_m[f] = \int_0^\infty \tan^{-1} \zeta J_m(\zeta r) d\zeta \int_0^\infty J_m(\zeta r') r' f(r') dr'$$

の operator $\mathcal{L}_m$ を導入すれば

$$f_m + T_m = 0 \quad (12)$$

$$\phi_0' = \frac{1}{2} r T_1 \quad (13-1)$$

$$\phi_1'' - \frac{1}{r} \phi_1 = \frac{1}{2} [2r T_0' + r T_2' + 2T_2] \quad (13-2)$$

$$\phi_m'' - \frac{m^2}{r} \phi_m = \frac{1}{2} \left[r T_{m+1}' + (m+1) T_{m+1} + r T_{m-1}' - (m-1) T_{m-1} \right] \quad m \geq 2 \quad (13-3)$$

$$\frac{1}{4P} \left[T_1' + \frac{1}{r} T_1 \right] = -T_0 + T_w \frac{K_{12}(r)}{r} + \mathcal{L}_0[T_0] \quad (14-1)$$

$$\frac{1}{4P} \left[2T_0' + T_2' + \frac{2}{r} T_2 \right] = -T_1 + \mathcal{L}_1[T_1] \quad (14-2)$$

$$\frac{1}{4P} \left[T_m' + \frac{m}{r} T_m + T_{m-2}' - \frac{m-2}{r} T_{m-2} \right] = -T_{m-1} + \mathcal{L}_{m-1}[T_{m-1}] \quad m \geq 3 \quad (14-3)$$

境界条件は (全2の量) $\longrightarrow 0$ when $r \longrightarrow \infty$ (15)

$$v_r \longrightarrow 0 \text{ when } r \longrightarrow 0 \quad (16)$$

以上の (12) ~ (14) の方程式系は、一次元の場合の exact Kernel の場合の式に対応し、これを解析的に解くにはまだ多くの困難がある。

§4 Kernel Substitution

一次元輻射流体の時に多用されたと類似の Kernel Substitution を 22 でも考えてみよう。そのため

$$K_{i1}(\tau) \simeq \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}\tau}$$

$$K_{i2}(\tau) \simeq e^{-\frac{\pi}{2}\tau}$$

の置換えをする。

これは丁度 operator Δ_m 中の $\tan^{-1} \approx \frac{3}{\sqrt{1+(\frac{2}{\pi})^2}}$ とし
に置換えにたっており積分項 Δ_m の性質をほとんど"そのまま"
保存している。適当な変数 r の拡大の後、 $T \rightarrow \infty$ (輻射支配
的) としてやれば。

$$\left. \begin{aligned} T_m &= 0 \quad m \geq 1 \\ T_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^n P(\frac{n}{2}+1)} r^n K_{\frac{n}{2}}(r) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

となる事がわかる。(17)は $r \rightarrow 0$ の時 $T_0 \rightarrow \infty$ となる。

(17)の級数の収束について詳しい事はよくわからなない。

T が有限の場合 (17) の形より

$$T_m = \sum_{k=-2m-1}^{\infty} a_{m,k} r^{m+\frac{k}{2}} K_{\frac{k}{2}}(r) \quad (18)$$

とて、(14)式に代入すれば、係数 $\{a_{m,k}\}$ についての連立
一次方程式(無限次元)を得る。とて

$$b_{m,k} = \begin{cases} (m+k)!! a_{m,-m+k} & m+k; \text{ even} \\ - (m+k)!! \frac{\pi}{\sqrt{2}} a_{m,-m+k} & m+k; \text{ odd} \end{cases}$$

$$b_m = \{ b_{m,k} ; k = -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

とする事にし

$$b_1 = -2\pi T M b_0$$

$$b_2 = -2\pi T M b_1 - 2N b_0$$

$$b_m = -2\pi T M b_{m-1} - N b_{m-2} \quad m \geq 3$$

となつて、全ての b_m は b_0 で表現出来る。

一方 (14) 式は無限次元の連立方程式となつてゐるので解き難い。このため、(12) 式の前 Fourier 展開を適当な有限項で打ち切り、又 (18) の展開も打ち切つた M, N が正整数に於ける様に打ち切ることにして、近似解を得ることが出来る。

§5. 熱伝導の場合、球面調和展開について

熱伝導が熱伝導の場合の解は既に知られており (ref. 6)

$$T_0(x, y) = T_w e^{\frac{x}{T_c}} K_0\left(\frac{r}{T_c}\right).$$

$$\text{where } T_c = \frac{2\pi k T_0}{5.0 \rho v T_0}$$

の形となる。

これは熱輻射の場合、熱伝導類似の部分があれば、(12) 式の前及び (18) 式の展開により、比較的少い項数で良い近似が得られよう希望を持たせる形である。又明らかに、この場合、 $T_c \rightarrow \infty$ 及び $T_c \rightarrow 0$ では $T_0(x, y) = \text{const.}$ しか解は存在しない。

球面調和展開については現在検討中である。

最後に、各場合について x, y について Fourier 変換した形を示しておこう。

conduction $\tilde{T}_0(k, h) = \frac{1}{i\alpha_c k + \rho^2} \quad \alpha_c \equiv \frac{1}{T_c} \quad \rho \equiv \sqrt{k^2 + h^2}$

long sheng $\tilde{T}_0(k, h) = \frac{1}{i\alpha k + \frac{\rho^2}{\rho^2 + 3}} \quad \alpha \equiv \frac{1}{P}$

kernel substitution $\tilde{T}_0(k, h) = \frac{4\pi T_w \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (\pi/2)^2}}}{i\alpha k + 2 - \frac{\pi}{\sqrt{\rho^2 + (\pi/2)^2}}}$

Exact Kernel $\tilde{T}_0(k, h) = \frac{4\pi T_w \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 1}} B\left(\frac{P}{\sqrt{1 + \rho^2}}\right)}{i\alpha k + 2 - \frac{1}{P} \sin^{-1}\left(\frac{2P}{1 + \rho^2}\right)}$

where

$$B(x) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) K(x) + \frac{1}{x^2} E(x)$$

$K(x), E(x)$; K, E = 種完全楕円積分.

ref.

1. M.A. Heaslet, and B.S. Baldwin; Phys. Fluids 6 (1963) p-781
2. V. Kourzanoff; Basic Methods in Transfer Problems, (1952) Oxford Univ. Press.
3. W.G. Vincenti and B.S. Baldwin; J. F. M. 12 (1962) p-449
4. 久保昇三; 1967 秋期日本物理学会応用力学数分科会予稿集
5. P. Cheng; AIAA J 4 p-238 (1966)
6. H.A. Wilson; Proc. Camb. Phil. Soc. 12 (1904) p406
- 3-1. W.G. Vincenti and C.H. Krueger; Introduction to Physical Gas Dynamics; (1965) John Wiley and Sons.