

氏 名	久 米 貴 浩
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 1996 号
学位授与の日付	平 成 10 年 9 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学 位 論 文 題 目	Calculation of traces of theta series by means of the Weil representation (テータ級数のトレース計算へのWeil表現の応用) (主査)
論 文 調 査 委 員	教 授 吉 田 敬 之 教 授 土 方 弘 明 教 授 丸 山 正 樹

論 文 内 容 の 要 旨

$2n$ 変数, レベル N の2次形式 S が与えられた時, テータ級数によつて任意の種数 m に対して, 重さ n , レベル N のジーゲルモジュラー形式を構成できる。この事実は $m=1$ の場合は19世紀以来多くの実例が知られていたが, ヘッケ学派が証明を与えて1920—40年代にかけてモジュラー形式の研究に大いに活用した。 m が一般の場合は1970年代のアンドリアノフ・マロレトキンの仕事による。現在ではヴェイユ表現の応用として容易に証明できる。

このようなレベル N のテータ級数の一次結合として種数 m , レベル M のジーゲルモジュラー形式が得られたとしよう。このとき明らかに M は N の約数であるが, このモジュラー形式の表示を, レベル M の2次形式のテータ級数の一次結合として書き直すことができるか, という自然な問題が生じる。これをレベル降下の問題と呼ぼう。また種数 m , レベル N のジーゲルモジュラー形式が得られたとき, 種数 m , レベル M のジーゲルモジュラー形式を与えるトレースという平均化の操作がある。レベル N のテータ級数の一次結合のトレースはレベル M のテータ級数の一次結合か, という問題をトレースの問題と呼ぼう。トレースの問題が肯定的に解ければ, レベル降下の問題は肯定的に解ける。

主論文ではトレースの問題が肯定的に解けるための条件を与えている。

2次元空間 V と V の中のlattice L を考え, 2次形式 S は L に対応しているとする。アデール群とヴェイユ表現を用いてテータ級数を表すことにより, V と L を局所化してトレースの問題に対応する局所的な問題を定式化できる。局所体の剰余標数が2の場合を除いて, この局所的なトレースの問題に完全な解答が与えられている。これが主論文の第一の主結果であり技術的にはこれが論文の核心である。

局所体の場合のトレースについての定理を用いて, 大域的なトレースの問題に対しての主定理を得る。これは次の様に述べられる。2次形式 S から整数論的に定まる或る数 s があつて $m \geq n$ または $m \geq s$ のとき, テータの問題は肯定的に解ける。現在までに知られている結果と比較検討すると s は大幅に改良されて小さくなっており, ほぼ最終の結果である。

この主定理によりレベル降下の問題に一つの解答が与えられている。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

テータ級数のレベル降下の問題, テータの問題に興味を持っていた研究者はかなりいたと思われるが, 最初に明確な一般的結果を出したのはビュヒェラー氏である。彼は1993年にジーゲルの Φ 作用素と特異モジュラー形式の理論を用いた大域的証明法を発表した。

申請者は局所的な方法によってこの問題を研究し, テータの問題についてのビュヒェラー氏の定理を本質的に改良する結果を証明した。ただし剰余体の標数が2のときの技術的問題からビュヒェラー氏の定理にはない条件が若干付いている。

局所的方法是ジーゲルモジュラー形式以外の場合にも直ちに応用が利き, この意味では大域的方法よりも強い。また証明

法の検討から、申請者の定理は、剰余体の標数が2のときに残された問題を除くと、局所的方法で得られるトレースの問題についての最善の結果であると考えられる。

主論文の表現は明快であり、ヴェイユ表現を巧妙に使いこなしており申請者の数学的力量がわかる。たとえば基礎体が有理数体の場合、レベルを p^n から p^{n-1} に下げするためにトレースをとる操作を行うが、 $n=1$ の場合が難しく、その処理に申請者の技術的能力がわかる。また $n \geq 2$ の場合は、これに比べて容易であるが、剰余体の標数が2のときはこの場合が問題になってくる。

レベル降下の問題、トレースの問題について、この主論文の結果を本質的に深めるためには、全く新しいアイデアが必要になると思われる。現時点では、この様なことが一体可能かどうかともわからない。重要な問題にほぼ最終的結果を与えたものとして、主論文は基本的文献の一つになりうると思われる。よって本論文は、博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。

なお、平成10年5月22日、主論文に報告されている研究業績を中心とし、これに関連した研究分野について試問した結果、合格と認めた。