

サプライチェーンにおける配送戦略の競合モデル

京都大学 情報学研究科 数理工学専攻 野田 峻弘
Department of Applied Mathematics and Physics
Graduate School of Informatics Kyoto University

1 序論

近年、流通市場を取り巻く環境は大きく変化し、企業ではなく消費者を主体とする時代となった。そこで消費者のニーズに合った製品供給体制をつくっていくことが、今後の市場競争に勝ち抜くための企業の必須要件となっている。すなわち、余計な在庫や物流コストなどの無駄を省き、尚且つ早く安く消費者のもとへ製品を届ける仕組みが求められるようになった。そこで注目されているのがサプライチェーンである [1]。サプライチェーンとは、部品や資材の調達から製造、物流、販売までの一連のプロセスを鎖のように見立てたシステムのことを言い、自動車製造業における部品製造から自動車本体の組み立てまでのプロセスなどがその典型的な例として挙げられる。またサプライチェーンマネジメント (Supply Chain Management: SCM) とは、サプライチェーン全体を改善し、納期の短縮、コストの削減などを実現しようという経営戦略の考え方、もしくはそれを実現するシステムのことを言う。SCM の魅力は、従来独立なものとして考えていた各企業を一つのまとまりあるものとして捉えることで、生産コストの削減及び在庫の極小化、製造のスピード化を実現でき、結果として消費者のニーズに応えつつ経営を安定させることができることにある。

SCM を運営する上で各企業にとって重要になってくるのはコストの最小化、収益の最大化を実現するような戦略である (これを均衡戦略と呼ぶことにする)。このとき均衡戦略を求める問題はゲーム理論における非協力ゲームの観点から定式化することが可能であり [2]、特に製造・物流のプロセスにおける配送戦略は経営戦略を決定する上で重要な要因である。本報告書では、製品を製造し配送する業者と製品を購入し在庫管理を行う業者をそれぞれ供給者、顧客とし、単独な顧客の要求に応じて複数の供給者から製品が顧客に売却・配送されるような単純化されたサプライチェーンについて考える。このとき各供給者にとっての均衡戦略を求める問題は、求めるべき各供給者の均衡戦略が他の供給者の戦略に依存することから、一般化ナッシュ均衡問題 (Generalized Nash Equilibrium Problem: GNEP) として定式化することが可能である。GNEP とは、各プレイヤーの戦略集合が他のプレイヤーの戦略に依存するような状況において、どのプレイヤーも単独で戦略を変える動機を持たないような各プレイヤーの戦略の組を求める問題であり、各プレイヤーの問題は次のように定式化される [3]。

$$\left. \begin{array}{ll} \min_{x_\nu} & \theta_\nu(x_\nu, \mathbf{x}_{-\nu}) \\ \text{s.t.} & x_\nu \in X_\nu(\mathbf{x}_{-\nu}) \end{array} \right\} (\nu = 1, \dots, N) \quad (1)$$

ここで、 N はプレイヤーの数、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は各プレイヤーの戦略 $x_\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}$ ($\nu = 1, \dots, N$) を要

素とし、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ で表される全プレイヤーの戦略ベクトルであり ($n = \sum_{\nu=1}^N n_\nu$), 各 ν ($\nu = 1, \dots, N$) に対して $\mathbf{x}$ から x_ν を除いたベクトルを $\mathbf{x}_{-\nu}$ で表し、また $\mathbf{x} = (x_\nu, \mathbf{x}_{-\nu})$ と表す。また θ_ν は ν 番目のプレイヤーの目的関数、 $X_\nu(\mathbf{x}_{-\nu})$ は ν 番目のプレイヤーの戦略 x_ν が含まれる戦略集合を表す。

GNEP は特定の条件の下で変分不等式問題に変換することができ [3], 変換された変分不等式問題を解くことで均衡解を求めることが可能である。このことを用いて、本報告書では上で述べたサプライチェーンにおいて顧客が 1 人、供給者が n 人 ($n \geq 2$) の場合を取り扱い、各供給者、顧客それぞれが収益の最大化、コストの最小化を目的として

- 各供給者から顧客に製品を配送する頻度 (以下配送頻度と呼ぶ。)
- 顧客が各供給者に対し製品を要求する配分率 (以下要求配分率と呼ぶ。)

を戦略決定した際の均衡状態における配送頻度及び要求配分率を求めることを考える。

本報告書の構成は以下のとおりである。まず 2 節で今回考察する問題の数理モデルを述べ、3 節ではモデルの定式化と均衡解を導出する過程を示す。4 節では具体的な問題を想定した上で数値実験を行い、得られた結果について考察した後、最後に 5 節で結論を述べる。

2 問題のモデル

本節では配送頻度均衡問題のモデルを述べる。まず以下のように定数、変数をそれぞれ設定する。

定数

- $D(> 0)$: 需要率 (顧客の単位時間あたりの製品需要量)
= 在庫減少率 (単位時間あたりの在庫製品減少量)
- $h(> 0)$: 単位時間あたりの製品 1 単位あたりの在庫保管コスト
- $l_i(> 0)$: 供給者 i ($i = 1, \dots, n$) から顧客への製品の平均配送頻度の下限
- $u_i(\geq l_i)$: 供給者 i ($i = 1, \dots, n$) から顧客への製品の平均配送頻度の上限
- $p_i(> 0)$: 供給者 i ($i = 1, \dots, n$) が製造する製品 1 単位の価格
(但し $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$)
- $c_i(> 0)$: 供給者 i ($i = 1, \dots, n$) が製造する製品 1 単位あたりの製造コスト
- $k_i(> 0)$: 供給者 i ($i = 1, \dots, n$) が製造する製品 1 単位あたりの輸送コスト
- $K_i(> 0)$: 供給者 i ($i = 1, \dots, n$) が製造する製品の配送 1 回あたりの発送コスト

変数

- $r_i(l_i \leq r_i \leq u_i)$: 供給者 i ($i = 1, \dots, n$) から顧客への製品の平均配送頻度
(単位時間あたりの製品の配送回数)
- $\lambda_i(0 \leq \lambda_i \leq 1)$: 供給者 i ($i = 1, \dots, n$) に対する要求配分率 ($\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$)

製品価格を定数として設定していることからわかるように、ここで取り扱うモデルでは製品価格が固定された中で供給者同士が配送頻度において競争する状況を想定し、供給者が配送頻度を、顧客が要求配分率を戦略決定するものとする。考察するサプライチェーン

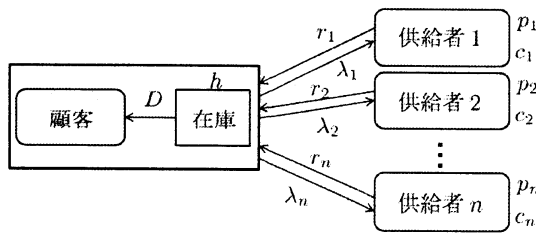


図 1: 想定するモデル

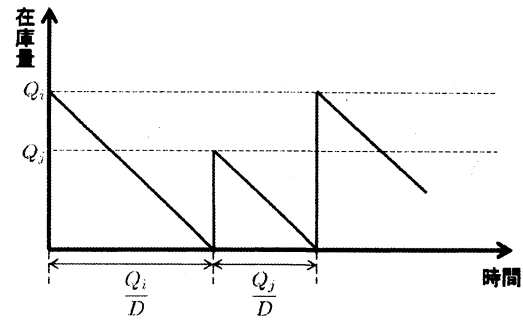


図 2: 在庫量の推移例

モデルにおける顧客と各供給者の関係を図 1 に示す。また簡単のために、製品の製造、発送及び配送は即時に行われるものとし、各供給者が製品を製造、発送及び配送するのにかかる時間は考慮しない。さらに在庫保管コストは顧客が、発送コスト及び輸送コストは供給者が負担し、各供給者は顧客の在庫が 0 になってから製品の発送、配送を行うものとする。このとき供給者 i ($i = 1, \dots, n$) の 1 回あたりの製品配送量を Q_i とすると、各定数及び変数の設定から $Q_i = \lambda_i D / r_i$ と表され、顧客の在庫量の推移例は図 2 のようになる。

3 問題の定式化及び均衡戦略の導出

本報告書では、前節で述べたモデルを n 人の供給者を上位レベルのプレイヤー、顧客を下位レベルのプレイヤーとする階層型の非協力ゲームとして定式化する。具体的には各供給者が提示する配送頻度 $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ に応じて、顧客が各供給者への要求配分率 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ を定めると想定し、与えられた配送頻度に対する顧客の最適要求配分率 $\boldsymbol{\lambda}$ を求め、それを考慮した上で各供給者が配送頻度 $\mathbf{r}$ についての最適化を行った結果生じる均衡解を求める。

3.1 要求配分率の導出

まず各供給者 i に対して在庫量が Q_i から 0 になるまでの期間におけるのべ在庫量を I_i とすると

$$I_i = \frac{r_i Q_i^2}{2D} = \frac{\lambda_i^2 D}{2r_i}$$

となる。このことを用いると顧客が負担するコストの総和は次の関数 $C(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda})$ で表される。

$$C(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^n (p_i \lambda_i D + h I_i) = \sum_{i=1}^n \left(p_i \lambda_i D + h \frac{\lambda_i^2 D}{2r_i} \right) = D \sum_{i=1}^n \left(p_i \lambda_i + \frac{h \lambda_i^2}{2r_i} \right)$$

ここで、いったん配送頻度 $\mathbf{r}$ を固定し、コスト $C(\boldsymbol{\lambda}) := C(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda})$ が最小となるような要求配分率 $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)^T$ を求める。そのとき、顧客が解くべき問題は以下のように定式化される。

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\lambda}} \quad & \sum_{i=1}^n \left(p_i \lambda_i + \frac{h \lambda_i^2}{2r_i} \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \\ & \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \tag{2}$$

目的関数が狭義凸二次関数なので問題 (2) の最適解は存在し、一意である。ここで問題 (2) の Karush-Kuhn-Tucker 条件 (KKT 条件) は次式で与えられる。

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L_0(\boldsymbol{\lambda}, v, \mathbf{w}) = \mathbf{0} \tag{3}$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{w} \perp \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \tag{4}$$

$$1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \tag{5}$$

但し、 $L_0(\boldsymbol{\lambda}, v, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n (p_i \lambda_i + h \lambda_i^2 / 2r_i) + v(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i) - \sum_{i=1}^n w_i \lambda_i$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$ であり、 $a \perp b$ は $ab = 0$ を意味する。
ここで (3), (4) から

$$w_i = p_i + \frac{h \lambda_i}{r_i} - v \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

であり、これを変形すると以下のようになる。

$$\lambda_i \geq \frac{r_i}{h} (v - p_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

さらに (4) の相補性条件を考慮すると各 λ_i は以下のように表せる。

$$\lambda_i = \max \left(0, \frac{r_i}{h} (v - p_i) \right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

ここで $f_i(v) = \max(0, r_i(v - p_i)/h)$ とすると、(5) から λ_i^* は $\sum_{i=1}^n f_i(v) = 1$ の解 v^* を用いて $\lambda_i^* = \max(0, r_i(v^* - p_i)/h)$ ($i = 1, \dots, n$) で与えられる。

$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ を考慮してこれを具体的に表すと以下のようなになる [4].

$$\lambda^* = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{r_1(v_n - p_1)}{h} \\ \frac{r_2(v_n - p_2)}{h} \\ \vdots \\ \frac{r_n(v_n - p_n)}{h} \end{pmatrix} & (v_n := (\sum_{k=1}^n r_k)^{-1} (\sum_{k=1}^n r_k p_k + h) > p_n) \\ \begin{pmatrix} \frac{r_1(v_{n-1} - p_1)}{h} \\ \vdots \\ \frac{r_{n-1}(v_{n-1} - p_{n-1})}{h} \\ 0 \end{pmatrix} & (v_n \leq p_n, v_{n-1} > p_{n-1}) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & (v_n \leq p_n, v_{n-1} \leq p_{n-1}, \dots, v_2 \leq p_2) \end{cases} \quad (6)$$

本報告書では顧客からの要求配分率が 0 となる供給者が存在しないような場合を想定し、以下では $\lambda_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) であるとして議論を進める。
このとき (6) から

$$\lambda^* = \left(\frac{r_1}{h}(v_n - p_1), \frac{r_2}{h}(v_n - p_2), \dots, \frac{r_n}{h}(v_n - p_n) \right)^T \quad (7)$$

であり、これに $v_n = (\sum_{k=1}^n r_k)^{-1} (\sum_{k=1}^n r_k p_k + h)$ を代入すれば λ_i^* は以下のように表せる。

$$\lambda_i^* = \frac{r_i}{r_1 + r_2 + \dots + r_n} \left[1 + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n r_j (p_j - p_i) \right] \quad (i = 1, \dots, n) \quad (8)$$

ここで $i = 1, \dots, n$ に対し $r_i \geq l_i > 0, \lambda_i^* > 0$ であることに注意し、 $\mathbf{r}$ に対する以下の制約条件を課す。

$$\sum_{j=1}^n r_j (p_i - p_j) \leq h - \varepsilon \quad (i = 1, \dots, n)$$

但し、 ε は十分小さい正の定数である。

3.2 配送頻度の導出

3.2.1 一般化ナッシュ均衡問題への定式化

供給者 i ($i = 1, \dots, n$) が得られる総収益は次の関数 $\Phi_i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda})$ ($i = 1, \dots, n$) で表される.

$$\Phi_i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}) = (p_i - c_i - k_i) \lambda_i D - r_i K_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

これに前節の (8) を代入し, 改めて $\Phi_i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda})$ を $\Phi_i(\mathbf{r})$ と書く.

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = \frac{(p_i - c_i - k_i) r_i}{r_1 + r_2 + \dots + r_n} \left[1 + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n r_j (p_j - p_i) \right] D - r_i K_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

ここから先は以下の仮定が成り立つものとして議論を進める.

仮定 1. $p_i > c_i + k_i$ ($i = 1, \dots, n$) が成り立つ.

つまり, p_i ($i = 1, \dots, n$) は $\Phi_i(\mathbf{r})$ ($i = 1, \dots, n$) の第一項が正となる範囲で抑えられるものとする.

以下では各 $\Phi_i(\mathbf{r})$ が r_i について最大となるような配送頻度 $\mathbf{r}^* = (r_1^*, \dots, r_n^*)^T$ を求める. そのとき, 各供給者が解くべき問題は以下のように定式化される.

$$\left. \begin{array}{ll} \max_{r_i} & \Phi_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) \\ \text{s.t.} & \mathbf{r} \in \mathcal{S} \end{array} \right\} (i = 1, \dots, n) \quad (9)$$

但し, $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{r} \mid \sum_{j=1}^n r_j (p_i - p_j) \leq h - \varepsilon, l_i \leq r_i \leq u_i, i = 1, \dots, n \right\}$ である.

ここで各 r_i について考え, r_i が含まれる集合を $\mathcal{S}_i$ とする. このとき $\mathcal{S}_i$ は $\mathbf{r}_{-i}$ に依存した制約条件をもつことから $\mathcal{S}_i(\mathbf{r}_{-i})$ と表すことができ, 以下の関係が成り立つ.

$$\mathbf{r} \in \mathcal{S} \Leftrightarrow r_i \in \mathcal{S}_i(\mathbf{r}_{-i}) \quad (i = 1, \dots, n)$$

このことを踏まえた上で最大化問題を最小化問題に変換すると, 問題 (9) は

$$\left. \begin{array}{ll} \min_{r_i} & -\Phi_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) \\ \text{s.t.} & r_i \in \mathcal{S}_i(\mathbf{r}_{-i}) \end{array} \right\} (i = 1, \dots, n) \quad (10)$$

と表すことができる. これは 1 節で紹介した GNEP(1) の形になっている ($\mathbf{x}, \nu, N, \theta, X_\nu$ と $\mathbf{r}, i, n, -\Phi, \mathcal{S}_i$ がそれぞれ対応している). また, 各 $\mathcal{S}_i$ は空でない有界な閉凸集合なので, 問題 (10) は解をもつ.

3.2.2 変分不等式問題への再定式化

本節では GNEP として定式化された問題 (10) を変分不等式問題に再定式化する。まず問題の仮定 $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ を考慮すると S に含まれる n 個の不等式 $\sum_{j=1}^n r_j (p_i - p_j) \leq h - \varepsilon$ ($i = 1, \dots, n$) は 1 つの不等式 $\sum_{j=1}^n r_j (p_n - p_j) \leq h - \varepsilon$ に集約することができる。これより改めて以下のように S を表す。

$$S = \left\{ \mathbf{r} \mid \sum_{j=1}^n r_j (p_n - p_j) \leq h - \varepsilon, l_i \leq r_i \leq u_i, i = 1, \dots, n \right\}$$

さらに $g(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n r_j (p_n - p_j) - (h - \varepsilon)$ と定義すると問題 (10) は

$$\left. \begin{array}{ll} \min_{r_i} & -\Phi_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) \\ \text{s.t.} & g(r_i, \mathbf{r}_{-i}) \leq 0 \\ & r_i - u_i \leq 0 \\ & l_i - r_i \leq 0 \end{array} \right\} (i = 1, \dots, n) \quad (11)$$

と表せる。ここで各問題 (11) の KKT 条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{r_i} L_i(\mathbf{r}, \mu_i, \alpha_i, \beta_i) = 0 \\ 0 \leq \mu_i \perp -g(\mathbf{r}) \geq 0 \\ 0 \leq \alpha_i \perp u_i - r_i \geq 0 \\ 0 \leq \beta_i \perp r_i - l_i \geq 0 \end{array} \right\} (i = 1, \dots, n) \quad (12)$$

但し, $L_i(\mathbf{r}, \mu_i, \alpha_i, \beta_i) = -\Phi_i(\mathbf{r}) + \mu_i g(\mathbf{r}) + \alpha_i(r_i - u_i) + \beta_i(l_i - r_i)$ ($i = 1, \dots, n$) である。

ここで $\mathbf{L}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\nabla_{r_1} L_1(\mathbf{r}, \mu_1, \alpha_1, \beta_1), \dots, \nabla_{r_n} L_n(\mathbf{r}, \mu_n, \alpha_n, \beta_n))^T$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$, $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = (g(\mathbf{r}), \dots, g(\mathbf{r}))^T$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$, $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)^T$ とおくと n 個の KKT 条件 (12) は

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\mu} \perp -\mathbf{g}(\mathbf{r}) &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\alpha} \perp \mathbf{u} - \mathbf{r} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\beta} \perp \mathbf{r} - \mathbf{l} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (13)$$

とまとめられる。これを GNEP の KKT 条件と呼ぶことにする。

全ての制約関数が $\mathbf{r}$ について線形なので, $\bar{\mathbf{r}}$ を GNEP(10) の解としたとき, $\bar{\mathbf{r}}$ と共に GNEP の KKT 条件 (13) を満たすラグランジュ乗数ベクトル $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\beta}})$ が存在する。また各 i について考えたとき問題 (11) は凸計画問題となっているので, ある $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\beta}})$ が GNEP の KKT 条件 (13) を満たすならば, $\bar{\mathbf{r}}$ は GNEP(10) の解である。まとめると次の

定理が成り立つ.

定理 1. ある $\bar{\mathbf{r}}$ が GNEP(10) の解であるための必要十分条件は $\bar{\mathbf{r}}$ と共に GNEP の KKT 条件 (13) をみたす $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\beta}})$ が存在することである.

ここで次のような変分不等式問題 (Variational Inequality Problem:VIP) を考える.

$$\begin{aligned} & \text{find} \quad \mathbf{r} \in \mathcal{S} \\ & \text{such that} \quad (\mathbf{s} - \mathbf{r})^T (-\nabla_{\mathbf{r}_i} \Phi_i(\mathbf{r}))_{i=1}^n \geq 0, \quad \forall \mathbf{s} \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (14)$$

$(-\nabla_{\mathbf{r}_i} \Phi_i(\mathbf{r}))_{i=1}^n$ が連続であり, $\mathcal{S}$ が空でなくコンパクトな凸集合なので問題 (14) の解は存在する. またこの問題の KKT 条件は次式で与えられる [5].

$$\begin{aligned} & (-\nabla_{\mathbf{r}_i} \Phi_i(\mathbf{r}))_{i=1}^n + \mu (\nabla_{\mathbf{r}_i} g(\mathbf{r}))_{i=1}^n + (\alpha_i)_{i=1}^n - (\beta_i)_{i=1}^n = \mathbf{0} \\ & 0 \leq \mu \perp -g(\mathbf{r}) \geq 0 \\ & 0 \leq \alpha_i \perp u_i - r_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \\ & 0 \leq \beta_i \perp r_i - l_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (15)$$

$\bar{\mathbf{r}}$ を VIP(14) の解としたとき, $\bar{\mathbf{r}}$ と共に VIP の KKT 条件 (15) を満たすラグランジュ乗数 $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_n)$ が存在する. また全ての制約関数が $\mathbf{r}$ について線形なので, ある $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_n)$ が VIP の KKT 条件 (15) を満たすならば, $\bar{\mathbf{r}}$ は VI(14) の解である. まとめると次の定理が成り立つ.

定理 2. ある $\bar{\mathbf{r}}$ が VIP(14) の解であるための必要十分条件は $\bar{\mathbf{r}}$ と共に VIP の KKT 条件 (15) をみたす $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_n)$ が存在することである.

ここで以下の仮定が成り立つことを想定する.

仮定 2. GNEP の KKT 条件 (13) と VIP の KKT 条件 (15) において以下の関係が成り立つ.

$$\mu = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$$

仮定 2 のもとで, GNEP の KKT 条件 (13) を満たす GNEP(10) の解 $\bar{\mathbf{r}}$ とラグランジュ乗数ベクトル $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\beta}})$ が存在するならば, $\bar{\mathbf{r}}$ は $(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_n)$ と共に VIP の KKT 条件 (15) を満たす VIP(14) の解である. また逆に VIP の KKT 条件 (15) を満たす

VIP(14) の解 $\bar{\mathbf{r}}$ とラグランジュ乗数 $(\bar{\mu}, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_n)$ が存在するならば, 仮定 2 のもとで $\bar{\mathbf{r}}$ は $(\bar{\mu}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ と共に GNEP の KKT 条件 (13) を満たす GNEP(10) の解である. まとめると次の定理が成り立つ [6] [7].

定理 3. VIP の KKT 条件 (15) を満たす VIP(14) の解は, 仮定 2 の条件と GNEP の KKT 条件 (13) を満たす GNEP(10) の解と等価である.

定理 3 から, VIP の KKT 条件 (15) を用いて VI(14) を解くことで GNEP(10) の解, つまり均衡配送頻度を求めることができる. VIP の解については数值的に計算するアルゴリズムが知られており [5], これにより求めた r_i^* ($i = 1, \dots, n$) を (8) に代入することで λ_i^* ($i = 1, \dots, n$) も数值的に導出できる.

3.2.3 解の一意性

VIP(14) の解の一意性について考察する. VIP(14) の解が存在し, 写像 $(-\nabla_{r_i} \Phi_i(\mathbf{r}))_{i=1}^n$ が狭義単調であるならば, VI(14) の解は唯一であることがいえる [8]. また, 連続的微分可能な写像 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が狭義単調であるための十分条件は $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{r})$ が全ての $\mathbf{r}$ に対して正定値となることである [8]. さらに非対称行列 $\mathbf{A}$ の正定値性と対称行列 $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ の正定値性が等価であることと, 対角成分が全て正であり, 狭義優対角な対称行列は正定値となることを用いると [9], 以下の定理が成り立つ.

定理 4. VIP(14) の解が一意であるための十分条件は行列 $\mathbf{A} := \nabla (-\nabla_{r_i} \Phi_i(\mathbf{r}))_{i=1}^n$ に対して行列 $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ の対角成分が全て正であり, 狭義優対角となることである.

行列 $\mathbf{A}$ は

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \Phi_1(\mathbf{r})}{\partial r_1^2} & -\frac{\partial^2 \Phi_1(\mathbf{r})}{\partial r_1 \partial r_2} & \cdots & -\frac{\partial^2 \Phi_1(\mathbf{r})}{\partial r_1 \partial r_n} \\ -\frac{\partial^2 \Phi_2(\mathbf{r})}{\partial r_1 \partial r_2} & -\frac{\partial^2 \Phi_2(\mathbf{r})}{\partial r_2^2} & \cdots & -\frac{\partial^2 \Phi_2(\mathbf{r})}{\partial r_2 \partial r_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial^2 \Phi_n(\mathbf{r})}{\partial r_1 \partial r_n} & -\frac{\partial^2 \Phi_n(\mathbf{r})}{\partial r_2 \partial r_n} & \cdots & -\frac{\partial^2 \Phi_n(\mathbf{r})}{\partial r_n^2} \end{pmatrix}$$

で表され, 各成分は以下ようになる.

$$\begin{aligned}
a_{ii} &:= -\frac{\partial^2 \Phi_i(\mathbf{r})}{\partial r_i^2} = \frac{2a_i D}{R^3} \left[1 + \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n r_k (p_k - p_i) \right] (R - r_i) \quad (i = 1, \dots, n) \\
a_{ij} &:= -\frac{\partial^2 \Phi_i(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_j} = -\frac{a_i D}{R^3} \left[1 + \frac{1}{h} \left\{ \sum_{k=1}^n r_k (p_k - p_i) - r_j (p_j - p_i) \right\} \right] (2r_i - R) \\
&\quad - \frac{a_i (p_j - p_i) D}{h R^3} (2r_i r_j + R^2 - r_j R) \\
&\quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, j \neq i)
\end{aligned}$$

但し, $a_i = p_i - c_i - k_i$ ($i = 1, \dots, n$), $R = \sum_{k=1}^n r_k$ である.
このとき行列 $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ は

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} + a_{21} & \cdots & a_{1n} + a_{n1} \\ a_{12} + a_{21} & 2a_{22} & \cdots & a_{2n} + a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} + a_{n1} & a_{2n} + a_{n2} & \cdots & 2a_{nn} \end{pmatrix}$$

で表され, 定理 4 から以下の 2 つの条件を満たすとき行列 $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ は正定値となる.

$$a_{ii} > 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (16)$$

$$2a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij} + a_{ji}| \quad (i = 1, \dots, n) \quad (17)$$

各 $\Phi_i(\mathbf{r})$ の定義, 各定数・変数の意味及び仮定 1 から (16) は常に成り立つ. (17) については必ずしも常に成り立つわけではないが, 例えば, $n < 4, p_1 = p_2 = \cdots = p_n, c_1 + k_1 = c_2 + k_2 = \cdots = c_n + k_n$ を満たすような問題においては成り立つ.

4 数値実験

本節ではまず VIP の KKT 条件 (15) を満たす $\mathbf{r}^*$ を計算する方法について述べる. 次に具体的な数値を設定した例題に対して数値実験を行って得られた結果について議論する.

4.1 均衡解の数値的解法

VIP の KKT 条件 (15) を満たす均衡解 $\mathbf{r}^*$ を計算する方法について述べる. まず VIP の KKT 条件 (15) に含まれる相補性条件

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mu \perp -g(\mathbf{r}) \geq 0 \\
0 &\leq \alpha_i \perp u_i - r_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \\
0 &\leq \beta_i \perp r_i - l_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)
\end{aligned} \quad (18)$$

を Fischer-Burmeister 関数 (FB 関数) $\phi(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$ を用いて等価な方程式系に変換する. FB 関数のもつ性質 $\phi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$ から (18) は以下のように変換できる.

$$\begin{aligned}\phi(\mu, -g(\mathbf{r})) &= 0 \\ \phi(\alpha_i, u_i - r_i) &= 0 \quad (i = 1, \dots, n) \\ \phi(\beta_i, r_i - l_i) &= 0 \quad (i = 1, \dots, n)\end{aligned}$$

さらに $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)^T$ とし,

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\nabla_{r_i} \Phi_i(\mathbf{r}) + \mu \nabla_{r_i} g(\mathbf{r}) + \alpha_i - \beta_i & (i = 1, \dots, n) \\ \phi(\mu, -g(\mathbf{r})) & (i = n + 1) \\ \phi(\alpha_j, u_j - r_j) & (i = n + j + 1, j = 1, \dots, n) \\ \phi(\beta_j, r_j - l_j) & (i = 2n + j + 1, j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

とおくと VIP の KKT 条件 (15) は以下の非線形方程式系と等価である.

$$\Psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\mathbf{x}) \\ \Psi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \Psi_{3n+1}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (19)$$

さらにここでメルリット関数 $\theta_{\text{FB}}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x})^T \Psi(\mathbf{x})$ を導入すると, 方程式系 (19) が解をもつとき, (19) は以下の制約なし最小化問題と等価である.

$$\min \quad \theta_{\text{FB}}(\mathbf{x}) \quad (20)$$

本報告書ではこの問題を解くことで均衡解を数値計算する.

4.2 数値実験結果

本実験では前節で定式化したモデルにおいて $n = 3$ の場合を想定し, それぞれに対して各定数の値を設定して均衡解を導出した. また各定数の値を変動させたとき, 得られる均衡解がどのように変化するか確認した. さらに, 均衡解の導出過程において幅広く初期点を選び, 解の収束性についても検証した.

尚, 本実験は CPU が Intel(R)Core(TM)2Quad 2.83GHz, メモリが 4GB の計算機上で行い, 前節で示した制約なし最小化問題 (20) は MATLAB のソルバ lsqnonlin を用いて解いた. 実験は以下の 4 つのケースについて行い, 全てのケースにおいて $D = 1.0, h = 1.0, \varepsilon = 0.001$

とした。

ケース 1: 製品価格を変化させる。

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.3, k_1 = k_2 = k_3 = 0.1, K_1 = K_2 = K_3 = 0.2,$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = 0.1, u_1 = u_2 = u_3 = 2.0 \text{ とし,}$$

$p_1 = 1.0$ に対し (p_2, p_3) を $(1.0, 1.0)$, $(1.1, 1.2)$, $(1.1, 1.3)$, $(1.2, 1.4)$ と変化させる。

ケース 2: 製造コストと輸送コストの和を変化させる。

$$p_1 = p_2 = p_3 = 1.0, K_1 = K_2 = K_3 = 0.2,$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = 0.1, u_1 = u_2 = u_3 = 2.0 \text{ とし,}$$

$c_1 + k_1 = 0.4$ に対し $(c_2 + k_2, c_3 + k_3)$ を $(0.4, 0.4)$, $(0.5, 0.6)$, $(0.6, 0.8)$ と変化させる。

ケース 3: 発送コストを変化させる。

$$p_1 = p_2 = p_3 = 1.0, c_1 = c_2 = c_3 = 0.3, k_1 = k_2 = k_3 = 0.1,$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = 0.1, u_1 = u_2 = u_3 = 2.0 \text{ とし,}$$

$K_1 = 0.2$ に対し (K_2, K_3) を $(0.2, 0.2)$, $(0.25, 0.3)$, $(0.3, 0.4)$ と変化させる。

ケース 4: 配送頻度の下限を高く、上限を低く設定した上で製品価格を変化させる。

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.3, k_1 = k_2 = k_3 = 0.1, K_1 = K_2 = K_3 = 0.2,$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = 0.6, u_1 = u_2 = u_3 = 0.9 \text{ とし,}$$

$p_1 = 1.0$ に対し (p_2, p_3) を $(1.0, 1.0)$, $(1.1, 1.2)$, $(1.1, 1.3)$, $(1.2, 1.4)$ と変化させる。

各ケースにおける均衡配送頻度及び均衡要求配分率を以下の表 1 から表 4 に示す。

表 1: ケース 1 での均衡解

(p_1, p_2, p_3)	$(1.0, 1.0, 1.0)$	$(1.0, 1.1, 1.2)$	$(1.0, 1.1, 1.3)$	$(1.0, 1.2, 1.4)$
r_1^*	0.6667	0.8474	0.8757	0.9423
r_2^*	0.6667	0.7768	0.8289	0.8336
r_3^*	0.6667	0.5874	0.3892	0.2371
λ_1^*	0.3333	0.4580	0.5017	0.5906
λ_2^*	0.3333	0.3421	0.3920	0.3557
λ_3^*	0.3333	0.1999	0.1062	0.0537

表 2: ケース 2 での均衡解

$(c_1+k_1, c_2+k_2, c_3+k_3)$	(0.4, 0.4, 0.4)	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.4, 0.6, 0.8)
r_1^*	0.6667	0.7451	0.7357
r_2^*	0.6667	0.5698	0.4571
r_3^*	0.6667	0.3068	0.1000
λ_1^*	0.3333	0.4595	0.5691
λ_2^*	0.3333	0.3514	0.3536
λ_3^*	0.3333	0.1892	0.0774

表 3: ケース 3 での均衡解

(K_1, K_2, K_3)	(0.2, 0.2, 0.2)	(0.2, 0.25, 0.3)	(0.2, 0.3, 0.4)
r_1^*	0.6667	0.7467	0.7407
r_2^*	0.6667	0.5333	0.4444
r_3^*	0.6667	0.3200	0.1481
λ_1^*	0.3333	0.4667	0.5556
λ_2^*	0.3333	0.3333	0.3333
λ_3^*	0.3333	0.2000	0.1111

表 4: ケース 4 での均衡解

(p_1, p_2, p_3)	(1.0, 1.0, 1.0)	(1.0, 1.1, 1.2)	(1.0, 1.1, 1.3)	(1.0, 1.2, 1.4)
r_1^*	0.6667	0.8475	0.8981	0.9000
r_2^*	0.6667	0.7753	0.8260	0.8749
r_3^*	0.6667	0.6000	0.6000	0.6000
λ_1^*	0.3333	0.4566	0.4879	0.5362
λ_2^*	0.3333	0.3402	0.3662	0.3413
λ_3^*	0.3333	0.2032	0.1460	0.1175

自明ではあるが、いずれのケースでも供給者1, 供給者2, 供給者3について各定数が全て等しい場合は各供給者の配送頻度 r^* , 各供給者に対する要求配分率 λ^* は等しくなっている。

ケース1のように供給者2と供給者3の製品価格を大きくしていったとき、供給者1に対する要求配分率 λ_1^* は増加し続け、供給者2に対する要求配分率 λ_2^* は増加した後減少し、供給者3に対する要求配分率 λ_3^* は減少し続けた。各供給者の配送頻度 r^* については、供給者1の配送頻度 r_1^* , 供給者2の配送頻度 r_2^* は増加し続け、供給者3の配送頻度 r_3^* は減少し続ける結果となった。

ケース2のように供給者2と供給者3の製造コストと輸送コストの和を大きくしていったとき、供給者1に対する要求配分率 λ_1^* , 供給者2に対する要求配分率 λ_2^* は増加し続け、供給者3に対する要求配分率 λ_3^* は減少し続けた。製造コストと輸送コストの和 $(c_1 + k_1, c_2 + k_2, c_3 + k_3) = (0.4, 0.5, 0.6)$ の場合は $(c_1 + k_1, c_2 + k_2, c_3 + k_3) = (0.4, 0.4, 0.4)$ の場合に比べ供給者1の配送頻度 r_1^* は増加し、供給者2の配送頻度 r_2^* , 供給者3の配送頻度 r_3^* は減少したが、製造コストと輸送コストの和 $(c_1 + k_1, c_2 + k_2, c_3 + k_3) = (0.4, 0.6, 0.8)$ の場合では $(c_1 + k_1, c_2 + k_2, c_3 + k_3) = (0.4, 0.5, 0.6)$ の場合に比べ供給者1の配送頻度 r_1^* , 供給者2の配送頻度 r_2^* , 供給者3の配送頻度 r_3^* いずれも減少する結果となった。

ケース3のように供給者2と供給者3の発送コストを大きくしていったとき、供給者1に対する要求配分率 λ_1^* は増加し続け、供給者2に対する要求配分率 λ_2^* は変化せず、供給者3に対する要求配分率 λ_3^* は減少し続けた。各供給者の配送頻度 r^* については、発送コスト $(K_1, K_2, K_3) = (0.2, 0.25, 0.3)$ の場合は $(K_1, K_2, K_3) = (0.2, 0.2, 0.2)$ の場合に比べ供給者1の配送頻度 r_1^* は増加し、供給者2の配送頻度 r_2^* , 供給者3の配送頻度 r_3^* は減少したが、発送コスト $(K_1, K_2, K_3) = (0.2, 0.3, 0.4)$ の場合では $(K_1, K_2, K_3) = (0.2, 0.25, 0.3)$ の場合に比べ供給者1の配送頻度 r_1^* , 供給者2の配送頻度 r_2^* , 供給者3の配送頻度 r_3^* いずれも減少する結果となった。

ケース4のように各供給者の配送頻度の下限及び上限を変更し、供給者2と供給者3の製品価格を大きくしていったとき、ケース1同様供給者1に対する要求配分率 λ_1^* は増加し続け、供給者2に対する要求配分率 λ_2^* は増加した後減少し、供給者3に対する要求配分率 λ_3^* は減少し続けた。各供給者の配送頻度 r^* については、各製品価格 $(p_1, p_2, p_3) = (1.0, 1.1, 1.2), (1.0, 1.1, 1.3), (1.0, 1.2, 1.4)$ の場合に供給者3の配送頻度 r_3^* が下限値をとり、各製品価格 $(p_1, p_2, p_3) = (1.0, 1.2, 1.4)$ の場合に供給者1の配送頻度 r_1^* が上限値をとった。またケース1の結果と比較して供給者1の配送頻度 r_1^* が上限値未満、供給者3の配送頻度 r_3^* が下限値をとる場合は、ケース1の同設定時に比べて供給者1の配送頻度 r_1^* が増加、供給者2の配送頻度 r_2^* が減少しており、供給者1の配送頻度 r_1^* が上限をとり、供給者3の配送頻度 r_3^* が下限値をとる場合は、ケース1の同設定時に比べて供給者2の配送頻度 r_2^* が増加しているのがわかる。

またいずれのケースも、3.2.3節で例示した条件 $p_1 = p_2 = p_3, c_1 + k_1 = c_2 + k_2 = c_3 + k_3$ を満たす場合だけでなく、満たさない場合についても幅広く選んだ初期点に対して各表で示された値が一意に得られた。

4.3 実験結果に対する考察

まず、全てのケースにおいて配送頻度の高い供給者ほど高い要求配分率を得ていることがわかる。これは配送頻度の高い供給者に高い要求配分率を課すことで在庫保管にかかるコスト $\sum_{i=1}^n (h\lambda_i^2/2r_i)$ が軽減され、顧客が負担するコストの総和を低く抑えることができるためであると考えられる。

次にケース 1 において一部の供給者の製品価格を増加させた場合の均衡解の振る舞いについて考える。得られる要求配分率が高いと各供給者の獲得収益が増加することと各供給者の配送頻度が高いと顧客の負担するコストの総和が減少すること、さらに上で述べた配送頻度と要求配分率の関係から本来供給者は配送頻度を増加させ続けるのではないかとと思われるが、実験結果からもわかる通り各供給者について配送頻度が減少する場合が存在している。このような場合が存在することについて、2つの可能性が要因として挙げられる。まず供給者 i ($i = 1, \dots, n$) が得られる総収益を表す関数 $\Phi_i(\mathbf{r})$ に目を向けたとき、必ずしも配送頻度を増加させることで高い収益を得られるわけではない、ということが1つ挙げられる。ここで r_i について増加させたときの $\Phi_i(\mathbf{r})$ の増減について考えると、 $\Phi_i(\mathbf{r})$ が r_i について凹であることから、 $\partial\Phi_i(\mathbf{r})/\partial r_i > 0$ となる場合では $\Phi_i(\mathbf{r})$ は増加し、 $\partial\Phi_i(\mathbf{r})/\partial r_i < 0$ となる場合では $\Phi_i(\mathbf{r})$ は減少することがわかる。つまり r_i が小さい場合は r_i を増加させることで得られる収益を増加させることができるが、ある程度 r_i が大きくなると r_i を増加させても得られる収益は減少してしまう。これを考慮すると他の供給者の配送頻度の変化などにより $\partial\Phi_i(\mathbf{r})/\partial r_i < 0$ となった場合、配送頻度を減少させることで収益を増加させることになる。このことが各供給者の配送頻度を減少させる一因になっているのではないかと考えられる。もう1つの要因としては、本報告書で示した解法で得られた解が今回考察しているモデルにおいて複数存在しうる均衡解の一つにすぎないことから、今回得られた解で必ずしも全供給者の収益が最大化されるわけではないことの表れとして配送頻度が減少しているのではないかと考えられる。

またケース 2, 3 においてはいずれの場合も $r_i^*/r_j^* = \lambda_i^*/\lambda_j^*$ ($i, j = 1, 2, 3$) を満たす結果となった。これは供給者 i ($i = 1, \dots, n$) への要求配分率 λ_i^* が各製品価格が等しい場合に $\lambda_i^* = r_i^*/\sum_{k=1}^n r_k^*$ で表されることがわかる。

続いてケース 4 で配送頻度が下限値、もしくは上限値をとる供給者が存在する場合に他の供給者の配送頻度が増加していることについて考える。配送頻度の下限値、上限値が存在しない場合と比較したときに配送頻度が下限値をとる供給者については、本来もっと低いはずの配送頻度が下限値を設けることで結果的に配送頻度が引き上げられたことになり、同様に配送頻度が上限値をとる供給者については、本来もっと高いはずの配送頻度が上限値を設けることで結果的に配送頻度が引き下げられたことになる。これにより各供給者間の配送頻度による競争が激化する状況になるため、このような結果になったのではないかとと思われる。

5 結論

本報告書では1人の顧客と n 人の供給者からなるサプライチェーンにおける配送戦略の競合モデルについて考察し、一般化ナッシュ均衡問題と変分不等式問題を用いて、各供給者の均衡配送頻度及び顧客の均衡要求配分率を導出する方法を示した。また数値実験を通

して得られた均衡解から、配送頻度の高い供給者は高い要求配分率を得ることや、製品価格や各種コストを増加させても状況によって各供給者は配送頻度を減少させる場合があることなどがわかった。

今後の課題としては、需要率が固定値ではなく変動する場合や在庫の上下限を設定する場合を考慮したモデルの拡張がまず挙げられる。また 4.3 節でも述べたが本報告書で示した VIP(14) を解いて得られた解は、定式化された GNEP(10) において複数存在する均衡解の一つに過ぎないので、今回求められた均衡解とは別の均衡解を得るための解法の探究も必要である。

参考文献

- [1] 森田道也. サプライチェーンの原理と経営. 新世社, 2004.
- [2] A. Y. Ha, L. Li, and S.-M. Ng. Price and delivery logistics competition in a supply chain. *Management Science*, Vol. 49, pp. 1139–1153, 2003.
- [3] F. Facchinei and C. Kanzow. Generalized Nash equilibrium problems. *A Quarterly Journal of Operations Research*, Vol. 5, pp. 173–210, 2007.
- [4] R. T. Rockafellar. *Network Flows and Monotropic Optimization*. Wiley, 1984.
- [5] F. Facchinei and J.-S. Pang. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*. Springer, 2006.
- [6] P. T. Harker. Generalized Nash games and quasi-variational inequalities. *European Journal of Operational Research*, Vol. 54, pp. 81–94, 1991.
- [7] F. Facchinei, A. Fischer, and V. Piccialli. On generalized Nash games and variational inequalities. *Operations Research Letters*, Vol. 35, pp. 159–164, 2007.
- [8] 福嶋雅夫. 非線形最適化の基礎. 朝倉書店, 2001.
- [9] R. W. Cottle, J.-S. Pang, and R. E. Stone. *The Linear Complementarity Problem*. Academic Press, 1992.