

$Sp(2, \mathbb{R})$ の許容表現に対する generalized Bessel function について

宮崎琢也 (Takuya MIYAZAKI) 京大数理研

§0. 代数群 $G = Sp_2/\mathbb{Q}$ とする. $G(k)$, $k = \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}_p \sim \mathbb{R}$, の既約表現に対して, Whittaker functional の空間 (各々の maximal unipotent subgroup の指標から $G(k)$ 全体への誘導表現への $G(k)$ 埋め込み) が調べられている. しかし, いずれの場合も, 表現によって上の空間が 0 になってしまうものが存在する. 表現論的にはこのような既約表現についても調べるためにより拡張したモデルを考えて, それを研究するのは自然であるし, 一たんよい一般化の定義を得れば, その観点から判る表現の性質が浮かび上がり, それらに対して色々研究がなされている様である. いろいろな unipotent subgroup からの誘導表現を, どの k の場合でも統一的に, 考察しようという明確化された観点が 1 つある. この下, $k = \mathbb{F}_p$ の時は, Kawanaka [Ka] (generalized Gelfand-Graev representations, 代数群はいろいろ. Proc. Symp. in Pure Math の 47-1 中の文献も) がある. $k = \mathbb{Q}_p$ の時は, 上の G で, Novodvorsky と Piatetskiĭ-Shapiro [NP] によって, generalized Bessel models (Siegel parabolic の unipotent radical を考えるもの) の研究がなされている. これは Andrianov の spinor L-function [An] との関係も意識している.

いる。 $k = \mathbb{R}$ の時は、表現論では、M. Hashizume (Lec. in Math., Kyoto Univ., No. 14, 1982, 51-70) から H. Matsumoto, H. Yamashita などによる一連の研究がある (G は $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 一連の論文や数理論講研究録)。Siegel 保型形式論の方では、S. Niwa [Ni] による generalized Whittaker function の研究がある。[Ni] 2" は Siegel 上半空間 $\mathbb{H}_n$ 上の不変微分作用素環の2つの生成元の固有関数となる generalized Whittaker function の積分表示が与えられている。Andrianov の L-function の Γ -因子がこの表示を用いて A. Hori [Ho] によって得られている。

この報告で扱うのは [Ni] と同じモデルである。ここでは、generalized Bessel functions の名でよぶ。目的は $G(\mathbb{R})$ の表現に対するこの関数の積分表示であり、研究の手法から [Ni] で見られなかった問題の明確化とその取り扱いが出来る様になったので、それについて書いておく。(K-fixed vector をもたない表現へのアプロ－4) 筆者にとって、このモデルは Siegel 保型形式の Fourier 係数のアルキメディアン因子、Andrianov L-function の Γ -因子との関係としての印象が特に強い。

§1. この節では問題にする generalized Bessel functional の定義と、それを表現の各 K -type に制限して考えるという問題の定式化を説明する。

$G = Sp(2, \mathbb{R}) = \{ g \in SL(4, \mathbb{R}) \mid {}^t g J g = J = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} \}$ とする。 G の Siegel standard maximal parabolic subgroup P_s をとる。 $P_s = L_s \ltimes N_s$ を Levi 分解とすると unipotent radical N_s はアーベル群、 P_s は 2 つある proper maximal standard parabolic のうちこれだけ特徴付けられる。 今、 N_s の指標 $\eta \in \hat{N}_s$ を 1 つとって固定する。 P_s の Levi 部分群 L_s は $\hat{N}_s$ に作用するが ($l \in L_s$ をとって $\eta \mapsto \eta^l(n) := \eta(lns)$ $n \in N_s$)、この作用における L_s の中での η を固定する部分群の単位元を含む連結成分をとり、これを $SO(\eta)$ とかく。

$$G \supset P_s = L_s \ltimes N_s.$$

$$L_s = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix} \mid A \in GL_2(\mathbb{R}) \right\}, \quad N_s = \left\{ \begin{pmatrix} 1_2 & T \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix} \mid {}^t T = T \right\} = \{ {}^t T = T \}$$

$$\eta : N_s \rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad T = \begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ t_3 & t_2 \end{pmatrix} \mapsto \exp 2\pi\sqrt{-1} (h_1 t_1 + h_2 t_2 + h_3 t_3)$$

$$\eta \longleftrightarrow H_\eta = \begin{pmatrix} h_1 & h_3/2 \\ h_3/2 & h_2 \end{pmatrix} : \text{2次実対称行列.}$$

η に対して、2次の実対称行列 H_η が定まることが、今これが非退化であるとは定めておく。 $SO(\eta)$ は定値の不定値2次直交群と同型になる。 $\mathfrak{so}(\eta) = \langle Y \rangle_{\mathbb{R}}$, $Y = H_\eta^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$: Lie 環は1次元。

$SO(\eta)$ の character χ を ± 5 に 1 つとって固定。 ± 5 に G の部分群 R を $R := SO(\eta) \ltimes N_s$ と定める。 χ 及び η はそれぞれ自然、に R の表現にのぼすことが出来 (N_s : abelian unipotent)、それから R の1次元表現 $\chi \otimes \eta$ を考える。この時、 G の右表現、

$$\text{Ind}_R^G (\chi \otimes \eta) \tag{1.1}$$

を考える。表現空間は $\mathcal{L}_{\chi, \eta}^r(R \backslash G) = \{ f \in C^r(G) \mid f(rs) = \chi \otimes \eta(r) f(s) \}$,

これは $[Y_a]$ における reduced generalized Gelfand-Graev representations の 1 つの場合である。ここでは関係ないが $[Y_a]$ では non-abelian な maximal parabolic の unipotent radical から出発して同様の対象を考える時に、 R の表現をつくるのに必要な方法についての記述もあることを注意しておく。

今、 G の Hilbert 表現 (π, H_π) を考える。 $K \subset G$ を maximal compact subgroup. 以後、語を代数的 (Li 環化) するのには H_π の K -finite vectors のなる C^∞ -subspace をとり、 $(\mathfrak{g}, K)$ -module を考える。

定義 代数的な generalized Bessel functional の空間を (1.1) の表現を用いて、 $(\mathfrak{g}, K)$ -modules の homomorphism の空間、

$$W_{\chi, \eta}(\pi) := \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(H_{\pi, K}, \text{Ind}_R^G(\chi \otimes \eta)) \quad (1.2)$$

で定義する。

与えられた admissible $(\mathfrak{g}, K)$ -module についての上の空間の nonvanishing や有限次元性、重複度 1 な性質の研究は、Matsumoto, Yamashita などと参照。

我々の問題は大雑把には、 $\pi \in W_{\chi, \eta}(\pi)$ に対して $\{\pi(v)\}_{v \in H_\pi}$, $\pi(v) \in C_{\chi, \eta}^\infty(R \backslash G)$ を調べることにあろうが、このままでは (π, H_π) の各 K -type への制限を次の様に考えて問題を定式化する。

$$H_\pi|_K = \bigoplus_{\tau \in \hat{K}} m_\tau V_\tau \quad (\tau, V_\tau): K \text{ の有限次元既約表現}$$

で $m_\tau \neq 0$ なる (τ, V_τ) に対して、

$$\Phi(v)(g) = \langle v, \phi_{\tau^*}(g) \rangle_K \quad \forall v \in V_{\tau} \quad (1.3)$$

で $\phi_{\tau}(g) \in V_{\tau^*}$ (V_{τ} の反傾表現) を定める。この ϕ_{τ^*} は、

$$\phi_{\tau^*}(r g k) = \chi \circ \eta(r) \tau^*(k^{-1}) \phi_{\tau^*}(g) \quad \forall r \in R, \forall k \in K$$

をみたす G 上の C^{∞} - V_{τ^*} -値関数である。この性質をみたす G 上の V_{τ^*} -valued functions のなる空間を $C_{\chi, \eta, \tau^*}^{\infty}(R \backslash G / K)$ と書いておく。
 $\phi_{\tau^*} \in C_{\chi, \eta, \tau^*}^{\infty}(R \backslash G / K)$. 上の性質と G の元の分解をみると、 G の部分群 $A = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1^{-1} & a_2^{-1} \end{pmatrix} \mid a_i > 0 \right\}$ とすると ϕ_{τ^*} は A 上の値を決めればよいことが判る。この $\phi_{\tau^*}(a)$, $a \in A$ を ϕ_{τ^*} の A -radial part と呼ぶ。よって我々の問題は、

問題 V_{τ^*} の basis $\{v_k\}_{k=0}^d$ を適当なものにとり 2 固定する時に、 ϕ_{τ^*} の A -radial part

$$\phi_{\tau^*}(a) = \sum_{k=0}^d W_k(a) v_k, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1^{-1} & a_2^{-1} \end{pmatrix} \in A$$

$\{W_k(a)\}_{k=0, \dots, d}$ を A 上の関数として表示する。

§2. 上の 問題 を考えよのに ϕ_{τ^*} が $U(\mathfrak{g})$ のある元に昇して、ある式を満たすことを用いて、実際に ϕ_{τ^*} が満たすとして ϕ_{τ} を特徴付ける微分方程式系を扱いたい。この為には $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ の生成元、特に Casimir 作用素を利用するというのがまず一つの考えである。さらに今回の報告では、W. Schmid に始まり、Gradient 型の微分作用素 [Ya2] を用いる考察を行う。この方法を用いると、後に見る様に、始めに与えられた表現 (π, H_{π})

の性質に依じて融通のまか議論ができるので都合がよい。まず Casimir 作用素 C の方は、 H_π に scalar 倍で作用し、 $\pi \in W_{\chi, \eta}(\pi)$ が $\mathfrak{g}_1(\mathbb{C})$ -homomorphism であるから $\bar{\pi}(v) \in C_{\chi, \eta}^*(R \setminus G)$ にも scalar 倍で作用し、さらに (1.3) の ϕ_{π^*} の式より $\phi_{\pi^*}(g)$ にも scalar-倍:

$$C \phi_{\pi^*}(g) = \lambda_\pi \phi_{\pi^*}(g).$$

λ_π は (π, H_π) のパラメータを用いて記述出来る。実際には、 ϕ_{π^*} の A -radial part を求めるのだから、Casimir 作用素の A -radial part の計算をする必要がある。

§3. 表現の K -type と Shift operator.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解、 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ は $X = G/K$ の単位元での複素接空間とみなせ、 K は Adjoint 作用でこの $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ に作用する。 X のエルミート構造として、 $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_- : \mathfrak{g}_\pm$ はそれぞれ K の有限次元表現の分解をもつ。今、 $K \cong U(2)$ の有限次元既約表現のハミルトン化を $K_\mathbb{C} = GL_2(\mathbb{C})$ のそれぞれ (dominant integral weights) を用いて作ると、

$$\{(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \ell_1 \geq \ell_2\} \ni (\ell_1, \ell_2) \mapsto \det^{\ell_2} \otimes \text{Sym}^{\ell_1 - \ell_2} (2 \times 2 \text{ sec}) \in K_\mathbb{C}$$

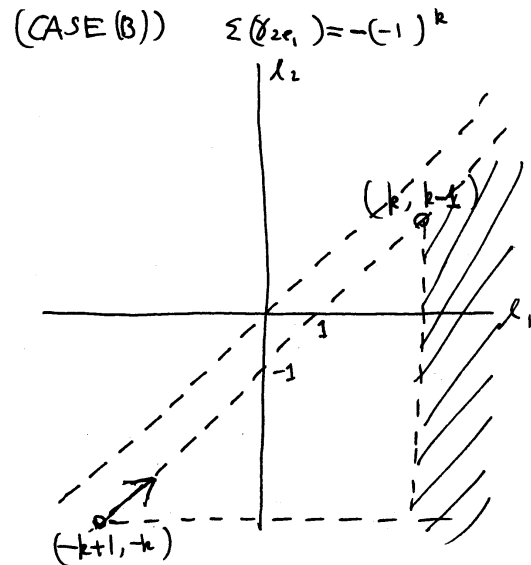
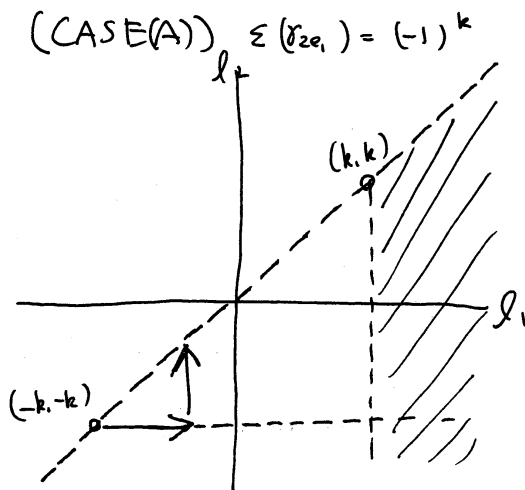
$\ell_1 - \ell_2 + 1$ 次元表現.

この時、 $\mathfrak{g}_+ \cong V_{(2,0)}$, $\mathfrak{g}_- \cong V_{(0,-2)}$ (下の $(,)$ が (ℓ_1, ℓ_2))。

$\{X_i\}$ を Killing form に関する $\mathfrak{g}$ の正規直交基底とする。この時、

$$\nabla = \sum R_{X_i} \otimes X_i \quad (R_X \text{ は 右微分})$$

これは、Klingen Eisenstein 級数に関する母型表現の無限素点成分も意図してゐる。ここでこの表現の K -type は下図の斜線部の中の格子点に存在する。(誘導表現に対する Frobenius 相互律)



従つて、上の様な K -type の分布から、上の表現には K -fixed Vector はないことが判り、ここで例えば "CASE (A)" で MINIMAL K -type $\tau_{(k,k)}$ に関する generalized Bessel function $\phi_{\tau_{(k,k)}}^* = \phi_{\tau_{(-k,-k)}}$ を求めるのに、Shift operator で K -type $(-k, -k) \rightarrow (-k+2, -k) \rightarrow (-k+2, -k+2)$ とやると、この作用が 0 でなく 2 回返らない (そこには K -type が存在しないから) ことが使えることが判る。

§5. §4 の表現の場合の結果について次に述べておく。

定理 CASE (A). $\pi = \text{Ind}_{P_J}^G ((\varepsilon, D_{\frac{1}{2}}) \otimes \exp(\nu + \rho_J))$ 2".

$\varepsilon(\gamma_{2a}) = (-1)^k$ の時。 η に 対 する $H_\eta = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_3 \end{pmatrix} > 0$ と する。

(1) この時、 π の MINIMAL K -type $\tau_{(k,k)}$ に 対 する generalized Bessel functions $\phi_{\tau_{(k,k)}}$ の A -radial part の 満 ち る 微 分 方 程 式 系 は、

$$\phi_{\tau_{(k,k)}}(a) = W(a) v, \quad a \in A,$$

$$W(a) = a_1^{k+1} a_2^{k+1} \exp(-2\pi(h_1 a_1^2 + h_2 a_2^2)) C(a)$$

と 書 く と する、

$$(i) \left\{ \partial_1 \partial_2 - \frac{h_2 a_2^2}{\Delta} \partial_1 + \frac{h_1 a_1^2}{\Delta} \partial_2 - S^2 \right\} C(a) = 0,$$

$$(ii) \left\{ (\partial_1 + \partial_2)^2 + 2h(\partial_1 + \partial_2) - 8\pi h_1 a_1^2 \partial_1 - 8\pi h_2 a_2^2 \partial_2 - 8\pi \square + k^2 - v^2 \right\} C(a) = 0,$$

$$\Delta = h_1 a_1^2 - h_2 a_2^2, \quad \square = h_1 a_1^2 + h_2 a_2^2, \quad \partial_i = a_i \frac{\partial}{\partial a_i},$$

$$S = \mu h_1 h_2 \frac{a_1 a_2}{\Delta}, \quad \mu := \chi(\gamma) \in \mathbb{C}.$$

(i) は Shift operator から 出 る 式。 (ii) は Casimir 作用素 から 出 る 式
を (i) を modify した も の。)

(2) 上の (i) と (ii) は rank 4 の holonomic system を 与 え、

(a) $\Delta = 0$ を 正 則 ($h_1 > 0, h_2 > 0$ 上) 大 体 単 位 元 $\in \mathbb{C}$ の 上 で 正 則)

(b) $\square \rightarrow \infty$ に つ づ け $W \rightarrow 0$

な る $W(a)$ は 一 意 に 定 ま り、

$$W(a) = \text{const.} \times a_1^{k+1} a_2^{k+1} \times$$

$$\times \int_0^\infty t^m J_m(2\pi \sqrt{|\Delta|} t) {}_2F_1 \left[\frac{2-k+2m}{2} + \frac{v}{2}, \frac{2-k+2m}{2} - \frac{v}{2}; 2m+1; -t \right] \times \\ \times \exp(-2\pi \square(t+1)) dt,$$

で表わす。 $m = |\mu| \frac{h_1 h_2}{4} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ なる 0 以上の整数で $J_m(z)$ は m -th 第 1 種 Bessel function, f_1 は Gauss の超幾何関数である。

(3) これはまだ一応 (注) であるが, [H₀] に従って, Andrianov の L-function の Γ -因子に關係の深い積分変換を計算しておく。

$m=0$, $h_1=h_2=1$ (i.e. $\mu=0$) の時の W について,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty W(\sqrt{v}, \sqrt{v}) v^{(\rho - \frac{3}{2})-1} dv \quad \left\{ \begin{array}{l} k \in 2\mathbb{Z} \\ \varepsilon(\chi_{\mathbb{Q}}) = 1 \end{array} \right. \\ &= (4\pi)^{-s-k+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\rho + \frac{k-1}{2} + \frac{v}{2}) \Gamma(\rho + \frac{k-1}{2} - \frac{v}{2})}{\Gamma(\rho + \frac{1}{2})} \\ &= 4^{-\frac{k-1}{2}} \pi^{-(s+k+\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{\rho}{2} + \frac{k-1}{4} + \frac{v}{4}) \Gamma(\frac{\rho}{2} - \frac{k-1}{4} + \frac{v}{4}) \Gamma(\frac{\rho}{2} + \frac{k-1}{4} - \frac{v}{4}) \Gamma(\frac{\rho}{2} - \frac{k-1}{4} - \frac{v}{4})}{\Gamma(\rho + \frac{1}{2})} \\ & \quad \times \prod_{n=1}^{\frac{k}{2}} \left\{ \left(\frac{\rho}{2} + \frac{k}{2} - \frac{1}{4} - n \right)^2 - \frac{v^2}{16} \right\} \\ & \quad \uparrow \\ & \text{polynomial in } \rho \end{aligned}$$

最後の式の $\pi^0 \times \prod \Gamma(\frac{\rho}{2} \pm \frac{k-1}{4} \pm \frac{v}{4})$ の部分は [H₀] の結果に同じであり, これは $\text{Ind}_{P_f}^G \hookrightarrow \text{Ind}_{P_{\min}}^G$ なる表現の trivial K -type の generalized Bessel model ([N₁]) から得られる Andrianov L-fun の Γ -因子となり, 2113。 MINIMAL K -type $\tau(k, k) \subset \text{Ind}_{P_f}^G$ の trivial K -type からのものが上の polynomial in ρ の部分に集まり, それを繰り込んだ 2 番目の式の分子 $2^0 \pi^0 \times$ 分子の Γ がこの場合の

Andrianov L -function の Γ -factor と特に関係すると思われる。(D_k^+ の Harish-Chandra parameter は $k-1$ であることに注意 (今回の記号の便宜上)))

(註) CASE (D) も方程式、積分表示等得られたい子が略す。

§6. 具体的な計算について。

① $Ap(2,12)$ の Casimir 作用素は

$$C = H_1^2 + H_2^2 - 4H_1 - 2H_2 + 2E_{e_1-e_2} \cdot E_{-e_1+e_2} + 4E_{2e_1} \cdot E_{-2e_1} + 2E_{e_1+e_2} \cdot E_{-e_1-e_2} + 4E_{2e_2} \cdot E_{-2e_2}$$

$$= 2". \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{e_1-e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{2e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{e_1+e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{2e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$E_{-*} = \epsilon E_*$. $\{E_{e_1-e_2}, E_{2e_1}, E_{e_1+e_2}, E_{2e_2}\}$ は, restricted root system $\Delta(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H_1 \oplus \mathbb{R}H_2$ の positive root vectors であり, maximal nilpotent radical の basis をなす. $\mathfrak{n}_s$ の basis は $\{E_{2e_1}, E_{e_1+e_2}, E_{2e_2}\}$.

② Shift operator について。

$$\nabla = \sum R_{X_i} \otimes X_i$$

$\{X_i\}$ は $\mathfrak{g}$ の Killing form に関する O.N.B. である。と表現の K -type に密着した言葉で書き表す。即ち、 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ の各 weight vectors ($\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の compact Cartan subalgebra $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の $\uparrow$ non compact root vectors) であり、 X_i を表すことをまずやる。次にこの作用素の右微分の部分の A -radial part を求めるのだが、凡そどの表現は restricted root vectors であり ① の E_0 等についてい子のだから先の $\mathfrak{g}_{\pm}$ の weight

vectors ($\Delta(\eta_a, \eta_a)$ の root vectors) とこの restricted root vectors 及び H_i 及び K_c の元を記述することが必要になる。

$$\nabla^\pm = \sum_{\beta} \underbrace{\text{右微分}}_{\substack{\uparrow \\ H_i \text{ や } E_0 \text{ や } E \text{ の元で表わされる}}} \otimes X_{\beta}^{\pm} \in K \text{ の表現 } \mathcal{Y}_{\pm} \text{ の weight vectors (3.22)}$$

あと、 $P_r \circ \nabla^\pm$ の計算に必要な K の表現のテンソル積 ($V_{(U, \lambda)} \otimes \mathcal{Y}_{\pm}$)
 $\{U_{\lambda}\} \quad \{X_{\beta}^{\pm}\}$
 を与えられた basis を用いて分解を記述する必要がある。(Clebsch-Gordan 係数) こうした要素については、T. Oda [OD] を参照。

③ Casimir 作用素の固有値については、埋込み $\text{Ind}_{P_f}^G \hookrightarrow \text{Ind}_{P_{\min}}^G$ をつかって、右辺の表現の性質 (quasi simple) を用いて、その 11° の $\chi - \eta$ をつかって記述する。

④ A -radial part の計算についていくつか、

$$\begin{aligned} \bullet R_{H_1} \phi(a) &= \frac{d}{dt} \phi \left(\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_1 & & \\ & & a_1^{-1} & \\ & & & a_1^{-1} \end{pmatrix} \exp t \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \right) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \phi \left(\begin{pmatrix} e^t & & & \\ & a_1 & & \\ & & a_1^{-1} e^{-t} & \\ & & & a_1^{-1} \end{pmatrix} \right) \Big|_{t=0} \\ &= a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} \phi(a) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet R_{E_{2e_1}} \phi(a) &= \frac{d}{dt} \phi(a \exp t E_{2e_1} a^{-1}) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \phi \left(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & a_1^2 \\ & & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} a \right) \Big|_{t=0} \\ &= 2\pi\sqrt{-1} \ell_1 a_1^2 \phi(a) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\bullet R_X \phi(a) = -\tau(X) \phi(a) \quad X \in K_c$$

$\bullet R_{E_{e_1-e_2}} \phi(a)$ については、generic な $a \in A$ について、

$$\begin{aligned} Ad(a^{-1})Y &= \det H^{-1} \left\{ \frac{\ell_2}{2} (H_1 - H_2) + \ell_2 \frac{a_2}{a_1} E_{e_1 - e_2} - \ell_1 \frac{a_1}{a_2} E_{-e_1 - e_2} \right\} \\ &= \det H^{-1} \left\{ \frac{\ell_2}{2} (H_1 - H_2) + \ell_1 \frac{a_1}{a_2} (X - \bar{X}) - \frac{\ell_1 a_1^2 - \ell_2 a_2^2}{a_1 a_2} E_{e_1 - e_2} \right\} \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad X, \bar{X} \in K_c.$$

$$\text{B.V.} \quad R_{Ad(a^{-1})Y} \phi(a) = \frac{d}{dt} \phi(a a^{-1} \exp t Y a) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \phi(\exp t Y a) \Big|_{t=0} = \chi(Y) \phi(a) \text{ etc.}$$

Casimir 作用素の A -radical part の計算はもう 3 回と 2 回 3 回と 2 回 3 回。

References

- [An] A.N. Andrianov, Dirichlet series with Euler product in the theory of Siegel modular forms of genus 2, (English translation), Proc. Steklov Inst. Math. 112 (1971), 70-93.
- [Ho] A. Hori, Andrianov's L -functions associated to Siegel wave forms of degree two, RIMS preprint 829 (1991), to appear in Math. Ann.
- [Ka] N. Kawanaka, Generalized Gelfand-Graev representations and Ennola duality, Algebraic Groups and Related Topics, Adv. studies in Pure Math. 6 (1985), 175-206.
- [Ni] S. Niwa, On generalized Whittaker functions on Siegel's upper half space of degree 2, Nagoya Math. J. 121 (1991), 171-184.
- [N-P] M.E. Novodvorsky and I.I. Piatetskii-Shapiro, Generalized Bessel models for the symplectic group of rank 2, (English transl.), Mat. sb. 19 (2) (1973), 246-274.
- [Od] T. Oda, An explicit integral representation of Whittaker functions on $Sp(2, \mathbb{R})$ for the large discrete series representations, Tôhoku Math. J. 46 (1994), 261-279.
- [Ya 1] H. Yamashita, Finite multiplicity theorems for induced representations of semisimple Lie groups, I, J. Math. Kyoto Univ., 28 (1988), 173-211.
—, II, J. Math. Kyoto Univ., 28 (1988), 383-444
- [Ya 2] H. Yamashita, Embedding of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, I, Japan J. Math. 16 (1990), 31-95. —, II, J. Math. Kyoto Univ., 31-1 (1991), 543-571.