

漸近錐と退化主系列表現 (A study of asymptotic cones and degenerate principal series)

By

西山 享 (Kyo NISHIYAMA) *

Abstract

対称対に対して、偶冪零元に付随する半単純 K 軌道の漸近錐を決定した。対応する半単純元から自然に決まる放物型部分群を $P_{\mathbb{R}}$ とする。このとき $P_{\mathbb{R}}$ から誘導された退化主系列表現を考えると、その随伴多様体は漸近錐と一致することを示した。

Let (G, K) be a symmetric pair over $\mathbb{C}$. For an even nilpotent element x in the complex Lie algebra $\mathfrak{g}$, we associate a semisimple element a in $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$, where $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{R}} + \mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ is a Cartan decomposition of the real Lie algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \text{Lie}(G_{\mathbb{R}})$. We have determined the asymptotic cone of the semisimple K -orbit $\mathcal{O}_a^K = \text{Ad}(K)a$ through a . Let $P_{\mathbb{R}}$ denote a real parabolic subgroup which has a Levi subgroup $L_{\mathbb{R}} = Z_{G_{\mathbb{R}}}(a)$. Then we have proved that the associated variety of the degenerate principal series representations induced from characters of $L_{\mathbb{R}}$ is given by the asymptotic cone above.

This is an announcement without proof based on the lecture given in the workshop. It contains many examples and expository subjects on asymptotic cones and degenerate principal series. A full paper with proofs will appear somewhere else.

§ 1. Introduction

Kostant の有名な定理の一つに次の定理がある ([Kos63])。

定理 1.1 (Kostant). $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ を複素簡約リー環 $\mathfrak{g}$ の冪零多様体とする。正則半単純軌道 $\mathcal{O}$ は $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ の変形であって、 G 加群としての同型

$$\mathbb{C}[\mathcal{N}(\mathfrak{g})] \simeq \mathbb{C}[\mathcal{O}] \simeq \bigoplus_{\pi \in \text{Irr}(G)} \dim(\pi^T) \cdot \pi$$

Received December 20, 2008. Accepted July 16, 2009.

2000 Mathematics Subject Classification(s): 22E46, 14L30

Key Words: semisimple orbit, nilpotent variety, asymptotic cone, degenerate principal series, associated variety

Supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research # 21340006.

*Department of Physics and Mathematics, Aoyama Gakuin University, Fuchinobe 5-10-1, Chuo, Sagami-hara 252-5258, Japan.

e-mail: kyo@gem.aoyama.ac.jp

© 2010 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

が成り立つ。ただし T は簡約代数群 G の極大トーラス、 $\mathbb{C}[X]$ は X 上の多項式からなる正則関数環を表す。また π^T は T -不変元の全体を表す¹。

さて、ここで半単純元 h が正則であるとは、中心化群 $Z_G(h)$ が G の極大トーラスとなることであり、それは随伴軌道 $\mathcal{O}_h = \text{Ad}(G)h$ が最大次元の軌道 (= 正則) であって、かつ閉軌道である (= 半単純) ことと同値である。 $\mathcal{O}_h$ に対して、その漸近方向を記述する漸近錐とよばれる多様体が定義できる (§ 2, 定義 2.1 参照) が、正則半単純元 h に対して漸近錐 $\mathfrak{C}(\mathcal{O}_h)$ が $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ に一致するというのが上の定理の主張の一部である。

一方、正則冪零元² x を取ると、 x を通る主冪零軌道 $\mathcal{O}_x$ の閉包は $\overline{\mathcal{O}_x} = \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ と、冪零多様体に一致するので、上の定理は次のように書き換えることができる。

定理 1.2 (定理 1.1 の言換え). 正則半単純元 h を取り、その随伴軌道 $\mathcal{O}_h$ を考える。このとき $\mathcal{O}_h$ の漸近錐は $\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \overline{\mathcal{O}_x}$ で与えられ、 G 加群としての同型

$$\mathbb{C}[\mathcal{O}_h] \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{C}(\mathcal{O}_h)] = \mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}_x}]$$

が成り立つ。ただし $\mathfrak{C}(\mathcal{O}_h)$ は $\mathcal{O}_h$ の漸近錐を表す。

つまり、正則半単純軌道の漸近錐は主冪零軌道の閉包である、そして両者の関数環は G 加群として同型である、というのが定理の主張の根幹である。関数環の G の表現としての分解に関する主張は、 $\mathcal{O}_h \simeq G/T$ であることと Frobenius の相互律より簡単に得られる。

さて、極大トーラス $T = Z_G(h)$ を Levi 部分に持つ放物型部分群はボレル部分群 B であり、その冪零根基が生成する冪零軌道の和がちょうど $\overline{\mathcal{O}_x} = \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ である。このようなとき $\mathcal{O}_x$ は $\mathfrak{b} = \text{Lie}(B)$ に附随した Richardson 軌道と呼ばれる。

Borho-Kraft [BK79] はこの定理を任意の半単純元へと拡張しており、それは、半単純軌道の漸近錐がそれに附随する Richardson 冪零軌道の閉包に一致することを主張するものである。しかし、これを正確に述べるためには準備も必要であり、本文に詳しく書いたのでここでは述べない。(下記、定理 3.4 参照)

さて、定理 1.1 は Kostant 自身と Rallis による対称対の場合への一般化がある ([KR71])。 (G, K) を (複素) 対称対とし、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ を Cartan 分解とする。この報告では K が連結な場合のみを考察する。また $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ を $\mathfrak{s}$ における冪零元の全体とする。半単純元 $a \in \mathfrak{s}$ は $\mathbb{O}_a^K = \text{Ad}(K)a$ が $\mathfrak{s}$ における K 軌道のうち最大次元のものになるとき、正則半単純元と呼ばれる。

定理 1.3 (Kostant-Rallis). 対称対の冪零多様体 $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ は正則半単純軌道 $\mathbb{O}_a^K$ ($a \in \mathfrak{s}$) をファイバーとする変形を持ち、 K 加群としての同型

$$\mathbb{C}[\mathcal{N}(\mathfrak{s})] \simeq \mathbb{C}[\mathbb{O}_a^K] \simeq \bigoplus_{\tau \in \text{Irr}(K)} \dim(\tau^M) \cdot \tau$$

が成り立つ。ただし $M = Z_K(a)$ であり、 τ^M は M -不変元全体を表す。

¹いわゆるゼロ・ウェイトの空間。

²主冪零元とも言う。

さて、この報告では、この定理を漸近錐を用いて部分的に一般化できることを報告する。Borho-Kraft の場合と異なり、我々は任意の半単純元を扱うことはできないが、偶冪零元 $x \in \mathfrak{s}$ に対応するような半単純元 $a \in \mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ に対して、次の定理を証明することができる。(偶冪零元と a の構成方法については下記本文 § 6.2 参照)

定理 1.4 (定理 6.6). 上の設定の下に、 $x \in \mathfrak{s}$ を偶冪零元、 $a \in \mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ を対応する半単純元、 $\mathbb{O}_a^K$ をその半単純軌道とする。また $\mathcal{O}_x = \text{Ad}(G)x$ を x を通る G の冪零軌道とする。このとき $\mathcal{O}_x \cap \mathfrak{s}$ は $\bigcup_{i=1}^r \mathbb{O}_i^K$ と等次元の冪零 K 軌道の和に分解し、

$$\mathfrak{C}(\mathbb{O}_a^K) = \bigcup_{i=1}^r \overline{\mathbb{O}_i^K}$$

は漸近錐の代数多様体としての既約分解を与える。

リー環の場合 (Borho-Kraft の定理) と著しく異なるのは、漸近錐がもはや既約でないことである。また $\mathcal{O}_a = \text{Ad}(G)a$ とすると、明らかに $\mathfrak{C}(\mathbb{O}_a^K) \subset \mathfrak{C}(\mathcal{O}_a) \cap \mathfrak{s} = \overline{\mathcal{O}_a} \cap \mathfrak{s}$ であるが、両者は必ずしも一致しない。

定理 1.4 と漸近錐上の関数環を考察することにより、退化主系列表現の随伴多様体を決定することができる。

系 1.5 (定理 7.1). $a \in \mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ に対して、 $L_{\mathbb{R}} = Z_{G_{\mathbb{R}}}(a)$ を Levi 部分群に持つ放物型部分群 $P_{\mathbb{R}}$ を取る。このとき $P_{\mathbb{R}}$ より誘導された退化主系列表現 $\pi_{P_{\mathbb{R}}}(\chi)$ (χ は $P_{\mathbb{R}}$ の指標) の随伴多様体は漸近錐に一致する。

$$\mathcal{AV}(\pi_{P_{\mathbb{R}}}(\chi)) = \mathfrak{C}(\mathbb{O}_a^K) = \bigcup_{i=1}^r \overline{\mathbb{O}_i^K}$$

一般には退化主系列表現の随伴多様体は複雑であるが、偶冪零軌道 $\mathcal{O}_x$ に対応するものはちょうど $\overline{\mathcal{O}_x \cap \mathfrak{s}}$ を随伴多様体に持つことが分かる。興味深いことに、一般には $\overline{\mathcal{O}_x \cap \mathfrak{s}} \subsetneq \overline{\mathcal{O}_x} \cap \mathfrak{s}$ であり、両者の違いが表現論的に何を意味しているのかを知ることは重要であると思われる。

なお、この報告は現在研究中の結果を解説したものであり、詳細は別の学術専門誌に投稿する予定である。紙数の関係と、そのような報告という性格を考慮して、証明はほとんどつけなかったが、例を多くあげたことなどで、結果は十分に理解していただけるものと考えている。

§ 2. 漸近錐

記号の導入もかねて、まず代数多様体の漸近錐に関する一般論を紹介する。詳細については例えば [PV94], [BK79] を参照されたい。

§ 2.1. 漸近錐の定義と基本的性質

$V = \mathbb{C}^N = \mathbb{A}^N(\mathbb{C})$ を N 次元アフィン空間とし、 $X \subset V$ を部分代数多様体とする³。このとき、 X の漸近的な方向を表す射影多様体 $\mathfrak{C}^{\mathbb{P}}(X) \subset \mathbb{P}(V)$ およびそのアフィン錐

³以下、なにもことわずに部分多様体と書けば、閉部分多様体に限らず、局所閉な部分代数多様体を指す。

$\mathfrak{C}(X) \subset V$ を以下のように定義しよう。但し、 $\mathbb{P}(V)$ は V の一次元部分空間の全体からなる射影空間を表す。

まず $\tilde{V} := V \oplus \mathbb{C}$ とおき、 $\mathbb{P}(\tilde{V})$ をその射影空間とする。すると $\mathbb{P}(\tilde{V})$ は『有限点』の全体 V と『無限遠点』 $\mathbb{P}(V)$ とに分かれる。もう少し具体的に書くと、 V の $\mathbb{P}(\tilde{V})$ への開埋込みを

$$\iota : V \hookrightarrow \mathbb{P}(\tilde{V}), \quad \iota(v) = [v \oplus 1] \quad (v \in V)$$

で定める。ここに、 $w \in \tilde{V} \setminus \{0\}$ に対して $[w] \in \mathbb{P}(\tilde{V})$ は w の定める 1 次元部分空間を表す。つまり $\tilde{V} \setminus \{0\} \ni w \mapsto [w] \in \mathbb{P}(\tilde{V})$ は標準的な射影である。また $\mathbb{P}(V)$ の $\mathbb{P}(\tilde{V})$ への開埋込みを

$$\kappa : \mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\tilde{V}), \quad \kappa([u]) := [u \oplus 0] \quad (u \in V, u \neq 0)$$

で定める。このようにしたとき、自然に $V \simeq \iota(V)$ は $\mathbb{P}(\tilde{V})$ の有限点の全体、 $\mathbb{P}(V) \simeq \kappa(\mathbb{P}(V))$ は無限遠点の全体とすることができる。 $\mathbb{P}(\tilde{V})$ はこれらの共通部分のない和集合に分解する。

$$\mathbb{P}(\tilde{V}) = \iota(V) \sqcup \kappa(\mathbb{P}(V))$$

以下、我々は $\mathbb{P}(V)$ を κ を通じて $\mathbb{P}(\tilde{V})$ の閉部分多様体とみなし、両者を区別しないことにする。

定義 2.1. $X \subset V$ を部分代数多様体とする。このとき $\mathfrak{C}^{\mathbb{P}}(X) := \overline{\iota(X)} \cap \mathbb{P}(V)$ を X の射影的漸近錐と呼ぶ。 $\mathfrak{C}^{\mathbb{P}}(X)$ の $0 \in V$ を頂点とするアフィン錐 $\mathfrak{C}(X) \subset V$ をアフィン漸近錐と呼ぶ。以下、単に漸近錐というときにはアフィン漸近錐を指す。定義より $\mathfrak{C}(X) = \mathfrak{C}(\overline{X})$ であることに注意しておく。

容易に分かるように $\mathfrak{C}^{\mathbb{P}}(X)$ は射影多様体であって $\mathfrak{C}^{\mathbb{P}}(X)$ が空でなければ $\dim \mathfrak{C}^{\mathbb{P}}(X) = \dim X - 1$ が成り立つ。また X が既約でも $\mathfrak{C}^{\mathbb{P}}(X)$ は一般に既約ではないが、等次元の既約成分を持つ。 $\mathfrak{C}^{\mathbb{P}}(X)$ が空になるのは X が 0 次元、つまり有限個の点集合の時に限る。そこで以下 $\mathfrak{C}^{\mathbb{P}}(X) = \emptyset$ のとき、 $\mathfrak{C}(X) = \{0\}$ (原点のみからなる錐) と便宜的に定義する。

例 2.2.

(1) $X \subset \mathbb{C}^2$ を双曲線 $xy = 1$ としよう。すると X の漸近錐 $\mathfrak{C}(X)$ は方程式 $xy = 0$ で定まる二本の直線 (x 軸と y 軸) の和である。 X は既約だが、 $\mathfrak{C}^{\mathbb{P}}(X)$ は二点の和であり、既約でない。

(2) $X \subset \mathbb{C}^2$ を $y = x^2 + 1$ で定まる放物線とする。このとき $\mathfrak{C}(X) : x^2 = 0$ は二重直線 (y 軸) となっている。 $\mathfrak{C}(X)$ の定義方程式は被約ではないことに注意する。

この例から分かるように漸近錐を定義する方程式は、もとの多様体の定義方程式から容易に計算できる。それを正確に述べるために少し記号を準備しよう。イデアル $I \subset \mathbb{C}[V]$ に対して

$$\mathrm{gr} I := (\mathrm{gr} f \mid f \in I), \quad \mathrm{gr} f = (f \text{ の最高次の斉次部分})$$

とおく。 $\mathrm{gr} I$ は $\mathbb{C}[V]$ の斉次イデアルであり、射影多様体を定義する。

補題 2.3. V の閉部分代数多様体 X に対して、 $\mathbb{I}(X)$ をその零化イデアルとする。このとき漸近錐の零化イデアルは $\mathbb{I}(\mathfrak{C}(X)) = \sqrt{\text{gr } \mathbb{I}(X)}$ で与えられる。ただし $\sqrt{I}$ はイデアル I の根基を表す。

§ 2.2. 群作用と漸近錐

$V = \mathbb{C}^N$ が簡約複素代数群 G の表現であるとし、その閉部分多様体 X は G の作用で安定であると仮定する。したがって X 上の正則関数環 $\mathbb{C}[X]$ は自然に G -加群となっている。このとき漸近錐 $\mathfrak{C}(X)$ もまた G の作用で安定であり、 G -多様体である。

上で述べたように $I = \mathbb{I}(X)$ を X の零化イデアルとすると、これは多項式環 $\mathbb{C}[V]$ の部分 G 加群であり、 $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[V]/I$ が成り立っている。このとき

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[X] &= \mathbb{C}[V]/I \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[V]/\text{gr } I \quad (G \text{ 加群の同型}) \\ \therefore \mathbb{C}[X] &\rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{C}(X)] = \mathbb{C}[V]/\sqrt{\text{gr } I} \quad (G \text{ 加群の全射準同型}) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで最初の同型は $\mathbb{C}$ 代数としての同型ではないことに注意する。

定義 2.4. $\mathbb{C}[V]^G$ を G -不変元の全体とし、 J を定数項のない不変元 $\mathbb{C}[V]^G_+$ が生成する $\mathbb{C}[V]$ のイデアルとする。 J を**不変イデアル**と呼ぶ。このとき不変イデアルの定義する閉部分多様体を $\mathfrak{N}(V) := \mathbb{V}(J)$ と書いて、これを**零錐**（あるいは**冪零錐**）と呼ぶ。零錐に属する軌道を**冪零軌道**と呼ぶ。

零錐の元 $x \in V$ の生成する G -軌道 $\mathcal{O}_x$ はその閉包に原点 0 を含む: $0 \in \overline{\mathcal{O}_x}$. 逆に、この性質が零錐を特徴づけている。

さて、零錐は軌道の漸近錐と深い関係があり、いわば群作用の漸近方向を決めるような多様体である。このことは次の定理からわかる（証明は難しくないが、例えば [PV94] 参照）。

定理 2.5. $\mathcal{O} \subset V$ を任意の G -軌道とすると漸近錐 $\mathfrak{C}(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{N}(V)$ は零錐の G -安定な閉部分多様体であって、その既約成分はすべて同じ次元 $\dim \mathcal{O}$ を持つ。

漸近錐の定義から $\mathfrak{C}(\mathcal{O}) = \mathfrak{C}(\overline{\mathcal{O}})$ であった。この節の最初の部分の議論は $X = \overline{\mathcal{O}}$ と考えて適用できる。

以下、既約成分がすべて同じ次元であるような多様体を**等次元**であるということにする。

系 2.6. 冪零軌道の個数が有限であると仮定する。任意の G -軌道 $\mathcal{O} \subset V$ に対して、冪零軌道 $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^r$ が存在して

$$\mathfrak{C}(\mathcal{O}) = \bigcup_{i=1}^r \overline{\mathcal{O}_i}, \quad \dim \mathcal{O}_i = \dim \mathcal{O} \quad (1 \leq i \leq r)$$

が成り立つ。

§ 3. 半単純随伴軌道の漸近錐

この節では、簡約リー代数 $\mathfrak{g}$ における随伴表現 $G \curvearrowright \mathfrak{g}$ を考える。ここで G は随伴群である。次の補題は良く知られている。

補題 3.1. 随伴表現に不随した零錐を**冪零多様体**と呼び、 $\mathfrak{N}(\mathfrak{g}) = \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ で表す。このとき冪零軌道の個数は有限である。 $\#\mathcal{N}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ad} G < \infty$

注意 3.2. 簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は中心と半単純 Lie 代数 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の直和となるが、 $x \in \mathfrak{g}$ が冪零元であるための必要十分条件は $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ であって、 $\mathrm{ad} x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ が冪零線型変換であることである。

$h \in \mathfrak{g}$ が**半単純**であるとは $\mathrm{ad} h$ が $\mathfrak{g}$ 上の線型変換として対角化可能の時に言うのであったが、半単純元を通る軌道 $\mathcal{O}_h = \mathrm{Ad}(G)h$ を**半単純随伴軌道**、あるいは簡単に**半単純軌道**と呼ぶ。 $\mathcal{O}_h$ が半単純軌道であるための必要十分条件は $\mathcal{O}_h \subset \mathfrak{g}$ が閉軌道であることである。以下半単純随伴軌道の漸近錐について考えよう。

一般に随伴軌道 $\mathcal{O}_x$ はその次元が最大になるとき、つまり $\dim \mathcal{O}_x = \dim \mathfrak{g} - \mathrm{rank} \mathfrak{g}$ が成り立つとき**正則**と呼ばれる。正則随伴軌道は Kostant [Kos63] によって詳しく研究されており、たとえば正則半単純軌道の漸近錐が冪零多様体そのものに一致することが知られている (Kostant の定理 1.1)。この結果は Borho-Kraft [BK79] により一般の半単純軌道へと一般化された。その結果を述べるために少し記号を導入しよう。

$h \in \mathfrak{g}$ を半単純元とし、 $L = Z_G(h)$ をその中心化群 (随伴作用による固定部分群) とする。 L は簡約部分代数群であり、 L を Levi 部分群に持つような放物型部分群 $P \subset G$ を選ぶことができる。その Lie 環を $\mathfrak{p}$ と書き、 $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ を Levi 分解とする。ここに $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{p}$ の冪零根基である。

$\mathrm{Ad}(G)\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}$ の既約な閉部分代数多様体であって、 G 安定かつ冪零元からなる。したがって有限個の冪零軌道の閉包の和であるが、既約性よりそれは唯一つの軌道の閉包でなければならないことが容易に結論できる。

定義 3.3. ある冪零元 $x \in \mathcal{N}$ が存在して $\mathrm{Ad}(G)\mathfrak{n} = \overline{\mathcal{O}_x}$ と書けるが、このとき冪零軌道 $\mathcal{O}_x$ を **Richardson 軌道**、 x を **Richardson 元**と呼ぶ。Richardson 軌道は放物型部分群 P の取り方によらない。

正則半単純元 h に対しては $Z_G(h) = T$ は極大トーラスになり、対応する放物型部分群はボレル部分群に他ならない。したがって、この場合には Richardson 軌道は主冪零軌道であり、その閉包は冪零多様体に一致する。

定理 3.4 (Borho-Kraft [BK79]). $h \in \mathfrak{g}$ を半単純元、 $x \in \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ を h に附随した Richardson 元とする。

(1) 半単純軌道 $\mathcal{O}_h = \mathrm{Ad}(G)h$ の漸近錐は $\mathfrak{C}(\mathcal{O}_h) = \overline{\mathcal{O}_x}$ で与えられる。ここに $\mathcal{O}_x$ は Richardson 軌道である。

(2) $Z_G(x)$ が連結であって $\overline{\mathcal{O}_x}$ が正規ならば

$$(3.1) \quad \mathbb{C}[\mathcal{O}_h] \stackrel{\star}{\simeq} \mathbb{C}[\mathcal{O}_x] = \mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}_x}] = \mathbb{C}[\mathfrak{C}(\mathcal{O}_h)]$$

が成り立つ。ただし $\star$ は G 加群としての同型である。

注意 3.5. (2) において $\mathcal{O}_x$ は $\mathfrak{g}$ の局所閉な部分多様体であって、一般にアフィン多様体ではない。一般的に局所閉部分多様体 $X \subset \mathfrak{g}$ に対して、 X 上で大域的に定義された正則関数のなす環を $\mathbb{C}[X]$ と表す。もちろん $\mathbb{C}[X] \subset \mathbb{C}[\overline{X}]$ だが、必ずしも両者は一致しない。しかし $\overline{X}$ が正規多様体で境界 $\overline{X} \setminus X$ が $\overline{X}$ の中で余次元 2 以上であれば両者は一致する。ところが、冪零随伴軌道は常に偶数次元なので、境界が余次元 2 以上という条件は常に満たされている。したがって主張のうち $\mathbb{C}[\mathcal{O}_x] = \mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}_x}]$ の部分は一般的によく知られている事実である。

また上の設定の下に

$$\mathbb{C}[\mathcal{O}_h] = \mathbb{C}[G/L] \simeq \text{Ind}_L^G \mathbf{1}_L = \bigoplus_{\tau \in \text{Irr}(G)} (\dim \tau^L) \tau$$

であるから⁴、 G -多様体 X に対して

$$\mathbb{C}[X] \simeq \bigoplus_{\tau \in \text{Irr}(G)} m_\tau(X) \tau \quad (G \text{ 加群として})$$

と表すことにすれば、定理の (3.1) 式は $m_\tau(\mathcal{O}_h) = m_\tau(\mathcal{O}_x) = m_\tau(\mathfrak{C}(\mathcal{O}_h)) = \dim \tau^L$ ($\forall \tau \in \text{Irr}(G)$) を意味している。

注意 3.6. 正則半単純軌道に対しては定理の (2) の条件は満たされており、既に述べたように定理の内容は Kostant の結果である。

この定理の対称対の場合への拡張を以下考える。

§ 4. $\mathfrak{sl}_2$ 三重項と偶冪零元

$x \in \mathfrak{g}$ をゼロでない冪零元とすると Jacobson-Morozov の定理により $\{x, h, y\} \subset \mathfrak{g}$ が存在して

(1) h は半単純、 x, y は冪零元であり、

(2) $\mathfrak{sl}_2$ の関係式: $[h, x] = 2x$, $[h, y] = -2y$, $[x, y] = h$ を満たす。

このとき $\{x, h, y\}$ を $\mathfrak{sl}_2$ 三重項 ($\mathfrak{sl}_2$ -triple) と呼ぶ。この三つ組みで生成された部分環は $\mathfrak{sl}_2$ と同型であるから、 $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{sl}_2$ 加群となる。したがって $\mathfrak{sl}_2$ の表現論から $\text{ad } h$ の固有値はすべて整数であり、その固有空間分解を

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k \quad \mathfrak{g}_k := \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}(h)X = kX\}$$

とすれば、これは $\mathfrak{g}$ に $\mathbb{Z}$ -次数付けを与える。

⁴ここで出てくる誘導表現は代数群の圏の中で考えたものである。つまり、誘導表現の関数空間としては代数的な正則関数のみを考えている。

定義 4.1. 上の記号の下に $\mathfrak{g}_1 = \{0\}$ のとき x を**偶冪零元**と呼ぶ。条件 $\mathfrak{g}_1 = \{0\}$ はすべての奇数 $k \in 2\mathbb{Z} + 1$ に対して $\mathfrak{g}_k = \{0\}$ が成り立つことと同値である。つまり偶冪零元から決まる $\mathfrak{g}$ の次数付けは $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{2k}$ となる。

さて、一般の冪零元 x と $\mathfrak{sl}_2$ 三重項 $\{x, h, y\}$ に戻り、この次数付けに対して

$$\mathfrak{p} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}_k = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{g}_0, \quad \mathfrak{n} = \bigoplus_{k > 0} \mathfrak{g}_k$$

とおけば $\mathfrak{p}$ は放物型部分環であって $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ は Levi 分解を与える。 $\mathfrak{p}$ に対応する部分群 P を $\mathfrak{sl}_2$ 三重項から決まる *Jacobson-Morozov 型の放物型部分群*と呼ぶ。

$\mathfrak{X}_P := G/P$ を $\mathfrak{p}$ と G -共役な放物型部分環のなす部分旗多様体 (partial flag variety)、 $T^*\mathfrak{X}_P$ をその余接束とする。また

$$\mu : T^*\mathfrak{X}_P \simeq G \times_P \mathfrak{n} \longrightarrow G\mathfrak{n} = \overline{\mathcal{O}}_P \subset \mathfrak{g}$$

をモーメント写像とする。ただし $\mathcal{O}_P$ は P に附随する Richardson 軌道である。モーメント写像は余接束上の標準的な G 同変シンプレクティック構造から決まるが、この設定の下では具体的に

$$\mu : G \times_P \mathfrak{n} \ni [g, z] \longrightarrow \text{Ad}(g)z \in \mathfrak{g}$$

と与えられている。モーメント写像の定義と基本的な性質については [CG97] を参照されたい。

偶冪零元に対して次の定理が成り立つ ([Jan04] 参照)。

定理 4.2. x を偶冪零元とし、 P を上のようにして $\mathfrak{sl}_2$ 三重項 $\{x, h, y\}$ から決まる放物型部分群とすると次が成り立つ。

- (1) x を通る冪零軌道 $\mathcal{O}_x$ は P に対応する Richardson 軌道である。
- (2) G における x の固定部分群と P における固定部分群は一致する。つまり $Z_G(x) = Z_P(x)$ が成り立つ。
- (3) モーメント写像 $\mu : T^*\mathfrak{X}_P \rightarrow \overline{\mathcal{O}}_x$ は Richardson 軌道の閉包の特異点解消を与える。さらに $\mathbb{C}[T^*\mathfrak{X}_P] \simeq \mathbb{C}[\mathcal{O}_x]$ が成り立つ。
- (4) $\overline{\mathcal{O}}_x$ が正規であれば $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_x] \simeq \mathbb{C}[\mathcal{O}_x] \simeq \mathbb{C}[T^*\mathfrak{X}_P]$ が成り立つ。

例 4.3 (A_{n-1} 型の冪零軌道). A 型の場合に、よく知られた冪零軌道の分類とあとで必要な性質についてまとめておく。

- (1) $G = \text{GL}_n$ の随伴表現を考えると、その冪零軌道は Jordan 標準形の理論によって n の分割と対応する。実際 $J_k(0)$ を対角成分 (固有値) が 0 でサイズが k の Jordan 細胞とすると冪零元 $x \in \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ はある分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ に対して $x \sim \bigoplus_{i=1}^{\ell} J_{\lambda_i}(0)$ と共役である。さらに分割は Young 図形とも自然に対応している。

$$\text{冪零軌道 } \mathcal{O}_x \longleftrightarrow \text{分割 } \lambda \vdash n \longleftrightarrow \text{Young 図形 } \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}$$

この x に対して $\mathfrak{sl}_2$ 三重項を取り、Jacobson-Morozov 放物型部分群 P を構成するには次のようにする。まず $\mu := {}^t\lambda$ を λ の転置とし、 $L = \mathrm{GL}_{\mu_1} \times \mathrm{GL}_{\mu_2} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\mu_t}$ をブロック対角型に埋め込まれた GL_n の部分群とする。このとき、ブロック上半三角行列全体を $P = LN$ とすればよい。

(2) 冪零元 $x \leftrightarrow \lambda$ が偶冪零元であるための必要十分条件は分割 λ の (ゼロでない) 各成分の偶奇が一致することである。また A 型の場合には冪零軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}}_x$ はすべて正規多様体であり、 x が偶冪零元でなくても $Z_G(x) = Z_P(x)$ が常に成り立つことが知られている (例えば [Jan04] 参照)。

§ 5. 対称対の Richardson 軌道

この節では対称対の場合に、冪零軌道や Richardson 軌道について一般によく知られていることを述べる。この節の内容については適当な教科書 ([Vog81], [Kna02], [CM93]) や関連文献 ([Tra07], [CNT], [Jan04] など) を参照していただきたい。

この報告では、対称対を複素数体上で考えているが、そもそも対称対の概念は実リー群のユニタリ表現論と関係が深いので、ここでも実リー群から話を始めることにする。

$G_{\mathbb{R}}$ を連結な実簡約リー群であって、複素代数群 G の実形 $G_{\mathbb{R}} \subset G$ になっているようなものとする。カルタン対合 $\theta \in \mathrm{Aut} G_{\mathbb{R}}$ を一つ固定し、これを複素解析的に G の包含的自己同型に延長したものと同じ記号 $\theta \in \mathrm{Aut} G$ で表す。カルタン対合の固定点 $K_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}}^{\theta}$ は $G_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群になっており、複素代数群 $K = G^{\theta}$ は $K_{\mathbb{R}}$ の複素化である。組 (G, K) を **対称対** と呼ぶ。(複素) リー環のカルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ とする。ここで $\mathfrak{k}$ は θ の固有値 $+1$ の固有空間、 $\mathfrak{s}$ は固有値 -1 の固有空間である。

例 5.1 (不定値ユニタリ群 $U(p, q)$ における例). 実リー群 $G_{\mathbb{R}} = U(p, q)$ を考える。このとき極大コンパクト部分群は $K_{\mathbb{R}} = U(p) \times U(q)$ で与えられる。 $G_{\mathbb{R}}$ に対応する複素代数群は $G = \mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ($n = p + q$) であり、 $K_{\mathbb{R}}$ の複素化は $K = \mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_q$ となっている。カルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ は具体的に次のように与えられる。

$$\mathfrak{k} = \begin{pmatrix} \mathfrak{gl}_p & 0 \\ 0 & \mathfrak{gl}_q \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{s} = \begin{pmatrix} 0 & M_{p,q} \\ M_{q,p} & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ を θ -安定な放物型部分環とし、 $P \subset G$ を対応する放物型部分群とする。

補題 5.2. $h \in \mathfrak{k}$ を実数を固有値に持つ半単純元とする。このとき $\mathfrak{g}$ の $\mathrm{ad} h$ -固有空間分解を

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{R}} \mathfrak{g}_k$$

として、 $\mathfrak{p} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}_k$ とおけばこれは θ -安定な放物型部分環である。逆に任意の θ -安定な放物型部分環はこのようにして得られる。

以下、 θ -安定な放物型部分群 P を任意に一つ固定して、部分旗多様体 $\mathfrak{X}_P \simeq G/P$ を考える。 $\mathfrak{X}_P$ は $\mathfrak{p}$ と G 共役な放物型部分環の全体と同一視するのであった。

補題 5.3. $\mathfrak{p}' \in \mathfrak{X}_P$ を θ -安定な放物型部分環とすると、 $\mathfrak{X}_P$ において $\mathfrak{p}'$ を通る K -軌道 $\mathcal{Z} := \text{Ad}(K)\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{X}_P$ は閉軌道である。逆に $\mathfrak{X}_P$ 上の任意の閉 K -軌道はある θ -安定な放物型部分環 $\mathfrak{p}'$ を含む⁵。

注意 5.4. θ -安定なボレル部分群 B は必ず存在する。一方、放物型部分群 $P_1 \subset G$ であって θ -安定な放物型部分群とは共役でないものが存在することにも注意せよ。

部分旗多様体 $\mathfrak{X}_P$ 上の K -軌道 $\mathcal{Z}$ に対して、 $T_{\mathcal{Z}}^*\mathfrak{X}_P$ でその余法束を表す。余接束 $T^*\mathfrak{X}_P$ 上のモーメント写像を余法束に制限したものも同じ μ で表すことにする。

補題 5.5. 任意の K -軌道 $\mathcal{Z} \subset \mathfrak{X}_P$ に対して、その余法束の閉包のモーメント写像による像はある冪零 K -軌道の閉包と一致する。

$$\mu(\overline{T_{\mathcal{Z}}^*\mathfrak{X}_P}) = \overline{\mathbb{O}^K} \quad (\exists \mathbb{O}^K \in \mathcal{N}(\mathfrak{s})/\text{Ad}(K))$$

P を θ -安定な放物型部分群とすると、 $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{k}$ は $\mathfrak{k}$ の放物型部分環となる。 $Q \subset K$ を対応する放物型部分群とする。このとき、閉軌道 $\mathcal{Z} = \text{Ad}(K)\mathfrak{p}$ は K の部分旗多様体 K/Q と同型である。 $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ を θ -安定な Levi 分解とすると

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{l}(\mathfrak{k}) \oplus \mathfrak{n}(\mathfrak{k}), \quad \mathfrak{l}(\mathfrak{k}) := \mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{k}) := \mathfrak{n} \cap \mathfrak{k}$$

は $\mathfrak{q}$ の Levi 分解を与え、 $\mathfrak{n}(\mathfrak{s}) := \mathfrak{n} \cap \mathfrak{s}$ は Q -安定であって $\mathcal{Z}$ の余法線方向を与えている。

補題 5.6. 上の設定の下に、 $\mathfrak{p}$ を通る閉軌道 $\mathcal{Z}$ の余法束およびモーメント写像は次のように表される。

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{Z}}^*\mathfrak{X}_P &\simeq K \times_Q \mathfrak{n}(\mathfrak{s}) = (K \times \mathfrak{n}(\mathfrak{s}))/Q \\ \mu : T_{\mathcal{Z}}^*\mathfrak{X}_P &\simeq K \times_Q \mathfrak{n}(\mathfrak{s}) \rightarrow \mathfrak{s}, \quad \mu([k, x]) = \text{Ad}(k)x \end{aligned}$$

定義 5.7. $\mathcal{Z} \subset \mathfrak{X}_P$ を閉 K -軌道とするとき、上の補題 5.5 より $\mu(T_{\mathcal{Z}}^*\mathfrak{X}_P) = \overline{\mathbb{O}^K}$ となる冪零 K -軌道 $\mathbb{O}^K \subset \mathfrak{s}$ が存在する。この $\mathbb{O}^K$ を対称対 G/K の *Richardson 軌道* と呼ぶ ([Tra05])。Richardson 軌道は $\mathcal{Z}$ の取り方により複数個存在することに注意する。

§ 6. 対称対における漸近錐

G を簡約な連結代数群、 (G, K) を対称対とし、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ をカルタン分解とする。また K は連結であると仮定する。

§ 6.1. Kostant-関口対応

この § 6.1 の内容はよく知られている。例えば [CM93] を参照されたい。

⁵従ってこの場合には閉 K 軌道に属する放物型部分環はすべて θ -安定である。

補題 6.1. $x \in \mathfrak{s}$ を冪零元とすると $\mathfrak{sl}_2$ 三重項 $\{x, h, y\}$ であつて $x, y \in \mathfrak{s}$ は冪零元、 $h \in \mathfrak{k}$ は半単純元となるようなものが存在する。さらに K -共役を取ることににより、 $\bar{x} = y$ が成り立つようにできる。ここに $\bar{x}$ は実形 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ に関する複素共役を表す。

定義 6.2. $\mathfrak{sl}_2$ 三重項 $\{x, h, y\}$ であつて $x, y \in \mathfrak{s}$ は冪零元、 $h \in \mathfrak{k}$ は半単純元となるようなものを**正規三重項**、さらに補題の条件 $\bar{x} = y$ を満たすとき、これを **KS 三重項**と呼ぶ。

さて、KS 三重項 $\{x, h, y\}$ が与えられたとき、

$$(6.1) \quad \begin{cases} a := \sqrt{-1}(x - y) \in \mathfrak{s}_{\mathbb{R}} & : \text{半単純} \\ e := \frac{1}{2}(x + y + \sqrt{-1}h) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} & : \text{冪零} \\ f := \frac{1}{2}(x + y - \sqrt{-1}h) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} & : \text{冪零} \end{cases}$$

とおくと $\{e, a, f\} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は実形 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の $\mathfrak{sl}_2$ 三重項となる。この $\{e, a, f\} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は次の性質を満たす。

$$\theta(a) = -a, \quad \theta(e) = -f, \quad \theta(f) = -e$$

このような性質を持つ $\mathfrak{sl}_2$ 三重項を **Cayley 三重項** と呼ぶ。

補題 6.3. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ における任意の $\mathfrak{sl}_2$ 三重項は Cayley 三重項に $G_{\mathbb{R}}$ の作用で共役である。

記号 6.4. それぞれ異なる群の軌道であることを明示的に示すために、作用する群を軌道の肩に書いて、 $\mathcal{O}_x^G, \mathcal{O}_x^K, \mathcal{O}_e^{G_{\mathbb{R}}}$ などのように表す。

補題 6.1 および 6.3 を見れば、KS 三重項と Cayley 三重項の間に密接な関係があることが分かるが、それは次のように述べることができる。

定理 6.5 (関口次郎 [Sek87], Vergne [Ver95], Kronheimer [Kro90]).

上で定めた KS 三重項と Cayley 三重項の間の対応 $\{x, h, y\} \leftrightarrow \{e, a, f\}$ は次のような冪零軌道の対応を誘導する。

- (1) $\mathcal{N}(\mathfrak{s})/\text{Ad}(K) \ni \mathcal{O}_x^K \leftrightarrow \mathcal{O}_e^{G_{\mathbb{R}}} \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})/\text{Ad}(G_{\mathbb{R}})$ は全単射対応を与える。
- (2) 対応する二つの軌道の間には $K_{\mathbb{R}}$ -同変な微分同相写像がある。

$$\mathcal{O}_x^K = \text{Ad}(K)x \underset{K_{\mathbb{R}}}{\simeq} \mathcal{O}_e^{G_{\mathbb{R}}} = \text{Ad}(G_{\mathbb{R}})e$$

- (3) 対応する二つの軌道は同じ複素 G -軌道を生成する。つまり $\mathcal{O}_x^G = \mathcal{O}_e^G$ が成り立つ。

§ 6.2. 偶冪零元と対称対の漸近錐

$x \in \mathfrak{s}$ を任意の冪零元とし、

$$\mathcal{O}_x^G \cap \mathfrak{s} = \bigcup_{i=0}^l \mathcal{O}_{x_i}^K \quad (x = x_0 \text{ と取っておく})$$

をその K -軌道への分解とする。すると各 K -軌道 $\mathbb{O}_{x_i}^K$ は $\mathcal{O}_x^G$ の Lagrangian 部分多様体になっており、とくに $\dim \mathbb{O}_{x_i}^K = \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_x^G$ となることが良く知られている。必要ならば K による共役を取って x を KS 三重項 $\{x, h, y\}$ に埋め込む。このとき KS 対応によって作られた Cayley 三重項 $\{e, a, f\}$ を考えると、次が成り立つ。

$$\mathbb{O}_a^K := \text{Ad}(K)a \subset \mathfrak{s} \text{ は半単純な閉軌道であって } \mathcal{O}_a^G = \mathcal{O}_h^G$$

さて、いよいよ我々の主定理を述べよう。

定理 6.6. 偶冪零元 $x \in \mathfrak{s}$ を取り、 $\{x, h, y\}$ を KS 三重項とする。このとき $a := \sqrt{-1}(x - y) \in \mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ とおくとこれは半単純であって半単純軌道 $\mathbb{O}_a^K$ の漸近錐は

$$\mathfrak{C}(\mathbb{O}_a^K) = \overline{\mathcal{O}_x^G \cap \mathfrak{s}} = \bigcup_{i=0}^l \overline{\mathbb{O}_{x_i}^K}$$

で与えられる。ここに現れる冪零軌道 $\mathbb{O}_{x_i}^K$ はすべて対称対の Richardson 軌道である。

次の例を見ても分かるように、一般には $\overline{\mathcal{O}_x^G \cap \mathfrak{s}} \neq \overline{\mathcal{O}_x^G} \cap \mathfrak{s}$ であることに注意する。

例 6.7 ($U(p, q)$ における例). A_{n-1} 型の (複素) 冪零軌道については例 4.3 で解説したように n の分割 (= Jordan 標準形) によって分類された。これを対称対

$$(G, K) = (\text{GL}_n(\mathbb{C}), \text{GL}_p(\mathbb{C}) \times \text{GL}_q(\mathbb{C})) \quad (n = p + q)$$

で考えてみよう。この設定は、実リー群では $G_{\mathbb{R}} = U(p, q)$ を考えることに相当する。実際、極大コンパクト部分群は $U(p) \times U(q)$ であって、その複素化が $K = \text{GL}_p \times \text{GL}_q$ である (以下複素化においては適宜 $\mathbb{C}$ を省略する)。

このとき冪零 K -軌道 $\mathbb{O}^K \in \mathcal{N}(\mathfrak{s})/\text{Ad}(K)$ は**符号付き Young 図形**で分類されることが良く知られている。符号付き Young 図形とは Young 図形の各箱に $\pm$ の符号をいれたもので、 $+$ の箱が p 個、 $-$ の箱が q 個あり、符号は各行で交互に現れるように配置される。また符号付き Young 図形は行の入れ替えを行っても同じものとみなすことにする。例として $U(3, 2)$ の冪零 K 軌道を分類する符号付き Young 図形を図 1 (13 ページ) に挙げる。

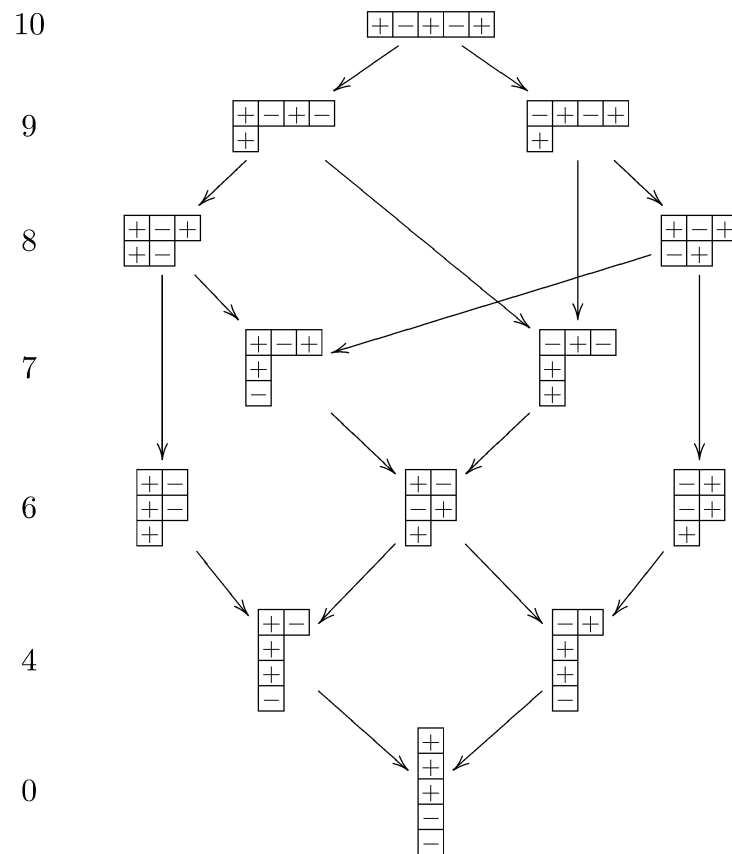
$U(3, 2)$ の例では 7 次元の軌道の場合に $\overline{\mathcal{O}_x^G \cap \mathfrak{s}} \neq \overline{\mathcal{O}_x^G} \cap \mathfrak{s}$ となっていることがわかるが、より一般に、例えば x を Jordan 標準形が $[3 \cdot 1^{2n-3}]$ の複素軌道 $\mathcal{O}_{[3 \cdot 1^{2n-3}]}$ からとり、 $\{x, h, y\}$ を KS 三重項とする。このとき、定理にあるように $a := \sqrt{-1}(x - y) \in \mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ とおけば、半単純 K 軌道 $\mathbb{O}_a^K$ の漸近錐は

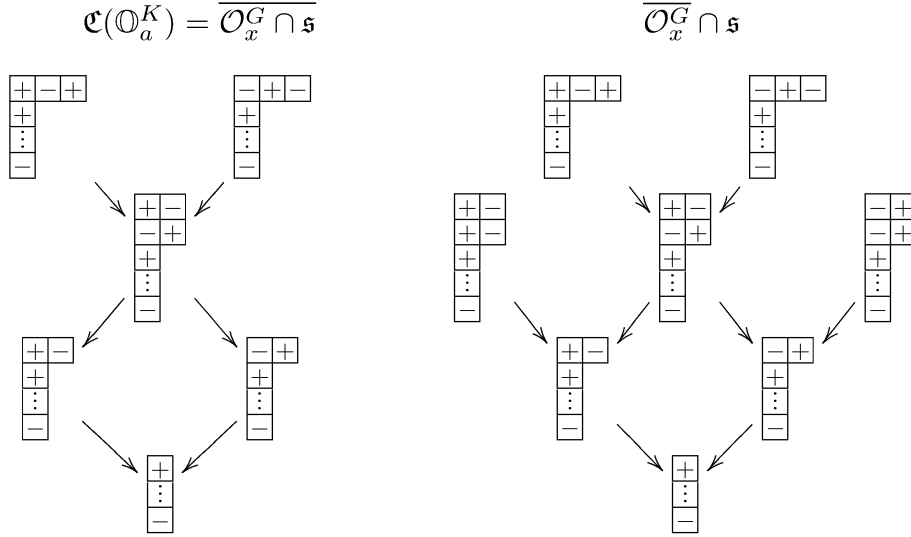
$$\mathfrak{C}(\mathbb{O}_a^K) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & + & + \\ \hline + & + & + \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline + & + & + \\ \hline \end{array} \cup \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & + & + \\ \hline + & + & + \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline + & + & + \\ \hline \end{array}$$

であるが、これは $\overline{\mathcal{O}_x^G} \cap \mathfrak{s}$ とは一致しない。(下図参照)

この報告では定理の証明は行わないが、方針のみ書いておく。まず $\mathfrak{sl}_2$ 三重項の理論から x は $\mathfrak{C}(\mathbb{O}_a^K)$ に含まれることが容易に分かる。一方 x_i ($0 \leq i \leq l$) は G の作用でた

Figure 1. $U(3, 2)$ の幕零 K 軌道とその閉包関係
次元





がいに移りあう。対応する a_i が G の作用で移りあうことは当たり前だが、実はこれらは K の作用で移りあう。これはいわゆる little Weyl 群の代表元が K から取れることに対応する事実である。したがって x の時と同様の議論によって x_i が漸近錐に含まれ、証明すべき式の右边が漸近錐に入る。一方 Borho-Kraft の定理から、漸近錐は $\overline{\mathcal{O}_x^G} \cap \mathfrak{s}$ に含まれていることが分かるが、より低次元の軌道は漸近錐の等次元性より現れえない。

次の系は定理から直ちに従う。

系 6.8. 定理 6.6 の設定の下に $K_{x_i} = Z_K(x_i)$ が連結であれば、 K の既約表現 τ の重複度について次の不等式が成り立つ。

$$m_\tau(\mathbb{O}_a^K) \geq m_\tau(\mathfrak{C}(\mathbb{O}_a^K)) \geq m_\tau(\overline{\mathbb{O}_{x_i}^K}) \quad (\tau \in \text{Irr}(K)).$$

§ 7. 退化主系列表現と漸近錐

§ 7.1. 退化主系列表現の随伴多様体

前節までの設定と同様に偶冪零元 $x \in \mathfrak{s}$ を取り、 $\{x, h, y\}$ を KS 三重項とする。このとき、半単純元 $a = \sqrt{-1}(x - y) \in \mathfrak{s}_\mathbb{R}$ を用いて、実放物型部分環 $\mathfrak{p}_\mathbb{R}$ を

$$(7.1) \quad \mathfrak{p}_\mathbb{R} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}_\mathbb{R}(k) \quad \mathfrak{g}_\mathbb{R}(k) = \{x \in \mathfrak{g}_\mathbb{R} \mid \text{ad}(a)x = kx\}$$

と定義する。 $\mathfrak{p}_\mathbb{R}$ に対応する実放物型部分群を $P_\mathbb{R}$ と書く。Levi 部分群 $L_\mathbb{R} = Z_{G_\mathbb{R}}(a)$ の指標 (1 次元表現) χ をとり、 $\nu \in \mathbb{R}$ に対して e^ν を $A = \exp(\mathbb{R}a)$ の表現とすると、 A は $L_\mathbb{R}$ の中心に含まれているので指標 $\chi \otimes e^\nu$ を考えることができる。この指標を $P_\mathbb{R}$ の指標に自然に拡張したものをやはり同じ記号で表す。

以上の記号の下に、退化主系列表現

$$\pi_{P_\mathbb{R}}(\chi; \nu) = \text{Ind}_{P_\mathbb{R}}^{G_\mathbb{R}} \chi \otimes e^\nu$$

を考えよう。この表現は一般の $\nu \in \mathbb{R}$ に対して既約である。主系列の K type の漸近挙動と漸近錐の K type を比較することにより、次の定理を示すことができる。これが我々の第二の主結果である。

定理 7.1. 上の設定の下に、退化主系列表現 $\pi_{P_{\mathbb{R}}}(\chi; \nu)$ の随伴多様体は

$$\mathcal{AV}(\pi_{P_{\mathbb{R}}}(\chi; \nu)) = \mathfrak{C}(\mathbb{O}_a^K) = \overline{\mathcal{O}_x^G \cap \mathfrak{s}} = \bigcup_{i=0}^l \overline{\mathbb{O}_{x_i}^K}$$

で与えられる。

この定理と Vogan の定理 ([Vog91, Theorem 4.6]) より、次が結論される。

系 7.2. $x \in \mathfrak{s}$ を偶幂零元とし、次を満たすと仮定する。

- (1) $K_x = Z_K(x)$ は連結。
- (2) $\overline{\mathbb{O}_x^K}$ は正規多様体。
- (3) $\partial \mathbb{O}_x^K = \overline{\mathbb{O}_x^K} \setminus \mathbb{O}_x^K$ を境界とすると $\text{codim } \partial \mathbb{O}_x^K \geq 2$ が成り立つ。

このとき共通部分 $\mathcal{O}_x^G \cap \mathfrak{s} = \mathbb{O}_x^K$ は唯一つの K 軌道からなり、

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\mathbb{O}_a^K) &= \overline{\mathbb{O}_x^K} & (a = \sqrt{-1}(x - y)) & \quad \text{および} \\ \mathbb{C}[T_{\mathcal{Z}}^* \mathfrak{X}_P] &\simeq \mathbb{C}[\mathbb{O}_x^K] \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{C}(\mathbb{O}_a^K)] & \quad \text{(代数としての同型)} \\ &\simeq \mathbb{C}[\mathbb{O}_a^K] & \quad \text{(} K \text{ 加群としての同型)} \end{aligned}$$

が成り立つ。

以下、定理 7.1 の主張を例で考えてみよう。

§ 7.2. $U(n, n)$ の漸近錐と退化主系列表現

以下この節では $G_{\mathbb{R}} = U(n, n)$ の場合に考える。

$G_{\mathbb{R}} = U(n, n)$ とおき、 $K_{\mathbb{R}} = U(n) \times U(n)$ を極大コンパクト部分群、 $G = \text{GL}_{2n}(\mathbb{C})$, $K = \text{GL}_n(\mathbb{C}) \times \text{GL}_n(\mathbb{C})$ をそれぞれ複素化とする。すると (G, K) は Cartan 対合

$$\theta(g) = I_{n,n} g I_{n,n}^{-1} \quad I_{n,n} = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix}$$

に附随した対称対となる。Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ は次のように与えられる。

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid A, D \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}) \right\}, \quad \mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \mid B, C \in M_n(\mathbb{C}) \right\}$$

さて、つぎのような KS 三重項 $\{x, h, y\}$ を考えよう。

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{s}, \quad y = \sigma(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{s}, \quad h = [x, y] = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{k}$$

ここで σ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ に関する複素共役であるが、具体的には次のように与えられる。

$$\sigma(X) = -I_{n,n} {}^t \bar{X} I_{n,n} \quad (X \in \mathfrak{g})$$

すると、冪零軌道 $\mathcal{O}_x^G$ は Jordan 型 $[2^n]$ を持つ偶冪零軌道である。 $\mathcal{O}_x^G$ と $\mathfrak{s}$ との共通部分 $\mathcal{O}_x^G \cap \mathfrak{s}$ は次のように $(n+1)$ 個の冪零 K 軌道に分解する。

$$\mathcal{O}_x^G \cap \mathfrak{s} = \bigcup_{p+q=n} \mathbb{O}_{p,q}^K$$

ここで $\mathbb{O}_{p,q}^K$ を符号付き Young 図形で表せば

$$\mathbb{O}_{p,q}^K = [(+-)^p (-+)^q] \quad (p+q=n) \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \boxed{+} \\ \hline \boxed{-} \\ \hline \vdots \\ \hline \boxed{+} \\ \hline \boxed{-} \\ \hline \vdots \\ \hline \boxed{+} \\ \hline \end{array} \right\}^p \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \boxed{-} \\ \hline \boxed{+} \\ \hline \vdots \\ \hline \boxed{-} \\ \hline \boxed{+} \\ \hline \vdots \\ \hline \boxed{-} \\ \hline \end{array} \right\}^q$$

となっている。さて、定理 6.6 によって $a := \sqrt{-1} (x - y) \in \mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ とおくと、

$$\mathbb{O}_a^K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \right\}$$

の漸近錐は

$$\mathfrak{c}(\mathbb{O}_a^K) = \bigcup_{p+q=n} \overline{\mathbb{O}_{p,q}^K}$$

で与えられる。冪零軌道の具体的な形も比較的容易に分かり、

$$\mathbb{O}_{p,q}^K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \mid \mathrm{rank} A = p, \mathrm{rank} B = q, AB = BA = 0 \right\}$$

で与えられる。さらに $M := Z_K(a) = \Delta \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を a の K における中心化群とし、 $\Delta : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow K = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を対角的埋め込みとすれば、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\mathbb{O}_a^K] &= \mathbb{C}[K/M] = \mathbb{C}[K]^M \\ &\simeq \mathrm{Ind}_M^K \mathbf{1}_M \simeq \bigoplus_{\rho \in \mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_n)} \rho \otimes \rho^* \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{c}(\mathbb{O}_a^K)] \end{aligned}$$

冪零軌道 $\mathbb{O}_{p,q}^K$ とその閉包上の関数環については、 K 加群としての同型

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}_{p,q}^K}] &\simeq \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P}_p, \beta \in \mathcal{P}_q} \rho_{\alpha \odot \beta} \otimes \rho_{\alpha \odot \beta}^* \\ \text{ここで } \alpha \odot \beta &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, -\beta_q, -\beta_{q-1}, \dots, -\beta_1) \\ \mathbb{C}[\mathbb{O}_a^K] &\simeq \mathbb{C}[\mathfrak{c}(\mathbb{O}_a^K)] \simeq \mathbb{C}[\mathbb{O}_{p,q}^K] \quad (\forall p, q \geq 0 \text{ s.t. } p+q=n) \end{aligned}$$

が得られる。特に最後の式は注目すべき式で、各冪零軌道は閉包を取らなければすべて同型な関数環を持ち、しかもそれらは漸近錐上の関数環と (K 加群として) 一致することを示している。

上で定義した半単純元 $a \in \mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ に対して、 $M_{\mathbb{R}} := Z_{K_{\mathbb{R}}}(a) = \Delta U(n)$ および $L_{\mathbb{R}} := Z_{G_{\mathbb{R}}}(a) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ とおく。すると式 (7.1) によって決まる $\mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$ をリー環とする実放物型部分群 $P_{\mathbb{R}} = L_{\mathbb{R}}N_{\mathbb{R}}$ が定義される。今の場合、これは $G_{\mathbb{R}}$ の極大放物型部分群である。 $P_{\mathbb{R}}$ に附随した退化主系列表現を

$$(7.2) \quad I(\nu) := \mathrm{Ind}_{P_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}} (|\det|^{-\nu} \otimes \mathbf{1}_{N_{\mathbb{R}}}) \quad (\nu \in \mathbb{C}),$$

で定義する。ここに $\det$ は $L_{\mathbb{R}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の行列式を取ることによって得られる 1 次元表現を表す。 $I(\nu)$ の K タイプへの分解は良く知られており、次のように与えられる。

$$I(\nu)|_{K_{\mathbb{R}}} \simeq \mathrm{Ind}_{M_{\mathbb{R}}}^{K_{\mathbb{R}}} \mathbf{1}_{M_{\mathbb{R}}} \simeq \bigoplus_{\rho \in \mathrm{Irr}(U(n))} \rho \otimes \rho^*$$

これは $K_{\mathbb{R}} = U(n) \times U(n)$ の表現であるが、複素リー群 $K = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の表現として解析接続したものは、関数環

$$\mathbb{C}[\mathfrak{C}(\mathbb{O}_a^K)] \simeq \mathbb{C}[\mathbb{O}_a^K]$$

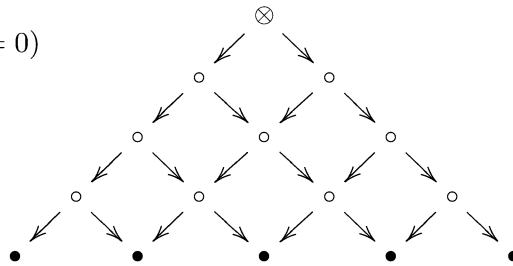
の K 加群としての構造と一致している。

定理 7.3 (Sahi [Sah93], Lee [Lee94], Johnson [Joh76], Johnson-Wallach [JW77], etc.).
 $\nu \in 2n + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と仮定すると退化主系列表現 $I(\nu)$ は $(n+1)$ 個の既約な部分表現 $\pi_{p,q}(\nu)$ ($p, q \geq 0, p+q = n$) を持ち、それらはすべてユニタリである。

注意 7.4. $I(\nu)$ が可約であることと $\nu \in 2\mathbb{Z}$ は同値である。また $I(2n)$ の既約商表現は自明な表現で、一般には $\nu \in 2n + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ならば $I(\nu)$ ($\nu \geq 2n$) の既約商表現は有限次元表現である。もちろん $\nu \neq 2n$ ならばこれらはユニタリでない。

例 7.5. $n = 4$ のときに $I(\nu)$ ($\nu \in 8 + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$) の既約部分商表現を Hasse 図形によって表示する。(例えば [Lee94, Fig. 11] 参照)

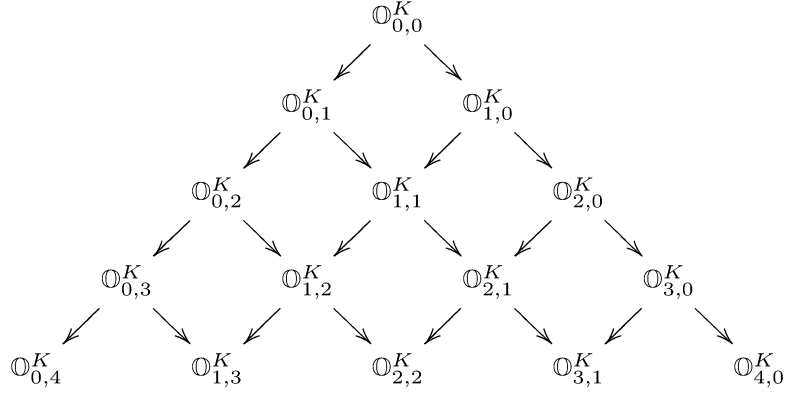
- : ユニタリ
- : 非ユニタリ
- ⊗ : 有限次元表現 (ユニタリ $\iff \nu = 0$)



このとき三角形の頂上にある表現を $\pi_{0,0}(\nu)$ で表し、その下の段を $\pi_{1,0}(\nu), \pi_{0,1}(\nu)$ 、一般に第 k 行目に並ぶ既約表現を $\pi_{k,0}(\nu), \pi_{k-1,1}(\nu), \dots, \pi_{s,t}(\nu), \dots, \pi_{0,k}(\nu)$ ($s+t = k$) で表す。最下段に並ぶのが既約部分表現達で、それらは $\pi_{p,q}(\nu)$ ($p+q = n$) の形をしている。

これらの表現の随伴多様体を図示すれば次のようになる。ただしこの図においては閉包関係は上下逆転しているので要注意。一番頂上にあるのが自明な軌道 $\mathbb{O}_{0,0}^K = \{0\}$ で

あって、最下段に並ぶのが一番次元の高い Richardson 軌道である。



P を $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ をリー環に持つ放物型部分群とし、 $\mathfrak{X}_P = G/P$ を部分旗多様体とする。このとき

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_{p,q}^K &\longleftrightarrow \mathcal{Z}_{p,q} \subset \mathfrak{X}_P : \text{閉 } K \text{ 軌道} \\ &\longleftrightarrow \mathfrak{p}_{p,q} \in \mathfrak{X}_P : \theta\text{-安定な放物型部分群} \end{aligned}$$

のように、Richardson 軌道 $\mathbb{O}_{p,q}^K$ に対して、 θ -安定な放物型部分環 $\mathfrak{p}_{p,q}$ が K 共役を除いて定まる。このとき θ -安定な Levi 分解 $\mathfrak{p}_{p,q} = \mathfrak{l}_{p,q} \oplus \mathfrak{n}_{p,q}$ であって、

$$\mathfrak{l}_{p,q} : \sigma\text{-安定} \quad \text{かつ} \quad \mathfrak{l}_{p,q} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \simeq \mathfrak{u}(p, q) \oplus \mathfrak{u}(q, p)$$

となるようなものが取れる。この記号の下に次が成り立つ。

命題 7.6. $I(\nu)$ を式 (7.2) で定義された $U(n, n)$ の退化主系列表現とすると、次が成り立つ。

- (1) $I(\nu)$ ($\nu \in \mathbb{C}$) の随伴多様体は $\mathcal{AV}(I(\nu)) = \mathfrak{C}(\mathbb{O}_a^K) = \bigcup_{p+q=n} \overline{\mathbb{O}_{p,q}^K}$ で与えられる。
- (2) n が偶数の時には、 $\pi_{p,q}(n) = A_{\mathfrak{p}_{p,q}}$ は導来加群 (derived functor module) であって、 $\pi_{p,q}(m)$ ($m \in n + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$) はその translation functor による像である。
- (3) ユニタリ既約表現 $\pi_{p,q}(\nu)$ ($p+q=n$) に対して、その随伴サイクルは $\mathcal{AC}(\pi_{p,q}(\nu)) = \overline{[\mathbb{O}_{p,q}^K]}$ (重複度 = 1) で与えられる。

この命題の主張 (2) については [CNT, § 3] を、また退化主系列への導来加群の埋め込み一般については [MT07] を参照されたい。

References

- [BK79] Walter Borho and Hanspeter Kraft, *Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reductiver Gruppen*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), no. 1, 61–104. MR MR522032 (82m:14027)

- [CG97] Neil Chriss and Victor Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997. MR MR1433132 (98i:22021)
- [CM93] David H. Collingwood and William M. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993. MR MR1251060 (94j:17001)
- [CNT] Dan Ciubotaru, Kyo Nishiyama, and Peter Trapa, *Regular orbits of symmetric subgroups on partial flag varieties*, To appear in “Representation Theory, Complex Analysis and Integral Geometry Vol. 2”, Progress in Mathematics, Birkhauser Boston. (Ed. by B. Krötz, O. Offen and E. Sayag). [**math.RT/0903.1039**].
- [Jan04] Jens Carsten Jantzen, *Nilpotent orbits in representation theory*, Lie theory, Progr. Math., vol. 228, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, pp. 1–211. MR MR2042689 (2005c:14055)
- [Joh76] Kenneth D. Johnson, *Composition series and intertwining operators for the spherical principal series. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **215** (1976), 269–283. MR MR0385012 (52 #5882)
- [JW77] Kenneth D. Johnson and Nolan R. Wallach, *Composition series and intertwining operators for the spherical principal series. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **229** (1977), 137–173. MR MR0447483 (56 #5794)
- [Kna02] Anthony W. Knap, *Lie groups beyond an introduction*, second ed., Progress in Mathematics, vol. 140, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002. MR MR1920389 (2003c:22001)
- [Kos63] Bertram Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math. **85** (1963), 327–404. MR MR0158024 (28 #1252)
- [KR71] B. Kostant and S. Rallis, *Orbits and representations associated with symmetric spaces*, Amer. J. Math. **93** (1971), 753–809. MR MR0311837 (47 #399)
- [Kro90] P. B. Kronheimer, *Instantons and the geometry of the nilpotent variety*, J. Differential Geom. **32** (1990), no. 2, 473–490. MR MR1072915 (91m:58021)
- [Lee94] Soo Teck Lee, *On some degenerate principal series representations of $U(n, n)$* , J. Funct. Anal. **126** (1994), no. 2, 305–366. MR MR1305072 (95j:22023)
- [MT07] Hisayosi Matumoto and Peter E. Trapa, *Derived functor modules arising as large irreducible constituents of degenerate principal series*, Compos. Math. **143** (2007), no. 1, 222–256. MR MR2295203
- [PV94] V. L. Popov and È. B. Vinberg, *Invariant theory*, Algebraic geometry. IV (I. R. Shafarevich, ed.), Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 55, Springer-Verlag, Berlin, 1994, pp. 123–278. MR MR1309681 (95g:14002)
- [Sah93] Siddhartha Sahi, *Unitary representations on the Shilov boundary of a symmetric tube domain*, Representation theory of groups and algebras, Contemp. Math., vol. 145, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 275–286. MR MR1216195 (94e:22029)
- [Sek87] Jirō Sekiguchi, *Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair*, J. Math. Soc. Japan **39** (1987), no. 1, 127–138. MR MR867991 (88g:53053)
- [Tra05] Peter E. Trapa, *Richardson orbits for real classical groups*, J. Algebra **286** (2005), no. 2, 361–385. MR MR2128022 (2006g:22012)
- [Tra07] ———, *Leading-term cycles of Harish-Chandra modules and partial orders on components of the Springer fiber*, Compos. Math. **143** (2007), no. 2, 515–540. MR MR2309996 (2008c:22012)
- [Ver95] Michèle Vergne, *Instantons et correspondance de Kostant-Sekiguchi*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **320** (1995), no. 8, 901–906. MR MR1328708 (96c:22026)

- [Vog81] David A. Vogan, Jr., *Representations of real reductive Lie groups*, Progress in Mathematics, vol. 15, Birkhäuser Boston, Mass., 1981. MR MR632407 (83c:22022)
- [Vog91] ———, *Associated varieties and unipotent representations*, Harmonic analysis on reductive groups (Brunswick, ME, 1989), Progr. Math., vol. 101, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991, pp. 315–388. MR MR1168491 (93k:22012)