

一般化ファインマン・カツツ乗法汎関数に対する ゲージ関数の無限遠での漸近挙動*

東北学院大学工学部 松浦将国†

Masakuni Matsuura

Faculty of Engineering, Tohoku Gakuin University

$X = (\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P}_x, X_t)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の過渡的な対称 α 安定過程 ($0 < \alpha < 2$) とし, $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ を X のディリクレ形式とする. このとき, $u \in \mathcal{F} \cap C_\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して差分型加法汎関数 $u(X_t) - u(X_0)$ を福島分解すると,

$$u(X_t) - u(X_0) = M_t^\mu + N_t^\mu.$$

ここに, M^μ は二乗可積分マルチンゲールでかつ N^μ は零エネルギーの連続加法汎関数である. $F(x, y)$ を正值有界対称で対角線上 0 である関数とすると, 次の有界変動でない加法汎関数を考える.

$$A_t^{\mu, F, \mu} := A_t^\mu + \sum_{s \leq t} F(X_{s-}, X_s) + N_t^\mu$$

A_t^μ は加藤測度 μ に対応する正值連続加法汎関数である. このとき, 次の関数をゲージ関数という.

$$g(x) := \mathbb{E}_x[e^{A_\infty^{\mu, F, \mu}}]$$

一方, 非局所 Feynman-Kac 乗法汎関数 $e^{A_t^{\mu, F, \mu}}$ は Doléans-Dade 方程式の解となる乗法型マルチンゲール

$$W_t = -M_t^\mu + \sum_{s \leq t} F(X_{s-}, X_s) - c \int_0^t \int (F + e^{F_u} - F_u - 1)(X_s, y) |X_s - y|^{-d-\alpha} dy ds$$

と局所な Feynman-Kac 乗法汎関数の積に分解される:

$$e^{A_t^{\mu, F, \mu}} = e^{u(X_t) - u(X_0)} W_t e^{A_t^\mu + c \int_0^t \int (F + e^{F_u} - F_u - 1)(X_s, y) |X_s - y|^{-d-\alpha} dy ds}.$$

* 確率論シンポジウム, 京都大学数理解析研究所, 2013 年 12 月 19 日.

† 非常勤講師, メールアドレス: m-matsuura@tjcc.tohoku-gakuin.ac.jp

ここに, $c > 0$ は空間次元と対称安定過程の指数 α による定数で $F_u(x, y) := F(x, y) + u(x) - u(y)$. このとき得られる正値連続加法汎関数 $t \mapsto c \int_0^t \int (F + e^{F_u} - F_u - 1)(X_s, y) |X_s - y|^{-\alpha-d} dy ds$ には次の Revuz 測度 ν が対応する.

$$\nu(dx) := c \left(\int (F + e^{F_u} - F_u - 1)(x, y) |x - y|^{-\alpha-d} dy \right) dx$$

以下, μ と ν はグリーン緊密な加藤測度と仮定する. X を W でギルザノフ変換 ($d\mathbb{P}_x^Y := W_t d\mathbb{P}_x$) したマルコフ過程を Y とする. 金大弘と桑江一洋は

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(f, f) &:= \mathcal{E}(f, f) + \mathcal{E}(u, f^2) \\ &\quad - \int f^2(x) \mu(dx) - c \int f(x) f(y) (e^F - 1)(x, y) |x - y|^{-(\alpha+d)} dx dy \end{aligned}$$

という二次形式によりゲージ関数 g の有界性を特徴付けていた ([KK1, Theorem 6.1]). これを用いると Y のディリクレ形式 $(\mathcal{E}^Y, \mathcal{F})$ は

$$\mathcal{E}^Y(e^u f, e^u f) = \mathcal{Q}(f, f) + \int f^2 d(\mu + \nu)$$

として与えられる. [KK1, Theorem 6.1] の条件 (5) は次の条件と同等である:

$$\inf \{ \mathcal{E}^Y(e^u f, e^u f); \int f^2 d(\mu + \nu) = 1 \} > 1.$$

本講演ではこの場合に

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 1 \tag{G}$$

であることが強マルコフ性を用いて証明されることと,

$$g(x) = 1 + O(|x|^{\alpha-d}) \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

が初等的な計算により示されることを講演した. 竹田雅好はポテンシャルが局所の場合に, 金大弘・桑江一洋はポテンシャルが非局所の場合に Feynman-Kac 乗法汎関数の gaugeability を特徴付けており, その中で式 (G) が重要な役割を果たしている ([T], [KK2]). ただし, [KK2] における式 (G) の証明は本講演で言及したものと全く異なるものである.

参考文献

- [KK1] D. Kim, K. Kuwae, *Analytic characterizations of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals*, preprint.
- [KK2] D. Kim, K. Kuwae, *On a stability for generalized Feynman-Kac semigroups of stable-like processes*, preprint.
- [T] M. Takeda, *Gaugeability for Feynman-Kac functionals with applications to symmetric α -stable processes*, Proc. Amer. Math. Soc. **134**, no. 9, 2729-2738, 2006.