

二規イデアルの precipitousness を保持する  
Cohen 拡大の条件について.

神大 教養 角田 譲

1. 問題の提起.  $M \models \text{ZFC}$  の推移的模型,  $\delta \in M$  2,  $\delta \neq \emptyset$   
とする.  $\delta$  上の  $M$ -ultrafilter とは次のものを意味する.

- i)  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\delta) \cap M$ ,
- ii)  $A \in \mathcal{U} \wedge A \subseteq B \in \mathcal{P}(\delta) \cap M \rightarrow B \in \mathcal{U}$ ,
- iii)  $A \in \mathcal{U} \wedge B \in \mathcal{U} \rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$
- iv)  $A \in \mathcal{P}(\delta) \cap M \rightarrow A \in \mathcal{U} \vee \delta - A \in \mathcal{U}$ .
- v)  $\mathcal{U} \neq \mathcal{P}(\delta) \cap M$ .

$\mathcal{U}$  が必ずしも  $M$  に属するということはないことに注意されたい.

${}^{\delta}M \cap M = \{f; f: \delta \rightarrow M \wedge f \in M\}$  に対して次の様に同値関係を  
を定義する.

$$f \sim g \iff \{x \in \delta; f(x) = g(x)\} \in \mathcal{U}.$$

${}^{\delta}M \cap M / \sim$  に対して二項関係  $E$  を次の様に定義する.

$$[f] E [g] \iff \{x \in \delta; f(x) \in g(x)\} \in \mathcal{U}.$$

すなわち, 構造  $\text{Ult}_{\mathcal{U}}(M) = \langle {}^{\delta}M \cap M / \sim; E \rangle$  が定義された.

通常  $\mathcal{U}$  ultrapower の様に  $L_{\omega_1}$  の定理が成立する。

2.2.  $V \in$  the ground model,  $P \in V$  の  $\neq$  partially ordered set とする.  $\mathcal{A} \in V$  の non-empty set,  $G \in P$  に関する generic filter over  $V$  とする. さらに,  $W \in \mathcal{A}$  上,  $V[G]$ -ultrafilter とする.  $\mathcal{U}$  の時,  $W' = \{A \in P(\mathcal{A}) \cap V : A \in W\}$  は, 明らかに,  $\mathcal{A}$  上  $V$ -ultrafilter とする. ゆえに,  $\langle M : E \rangle = \text{Ult}_W(V)$  が構成される.  $j : \langle V : E \rangle \rightarrow \langle M : E \rangle$  を標準的  $\mathcal{U}$  elementary embedding とする.  $j(p)$  は  $\langle M : E \rangle$  の中に到る p.o. set とする. 更に,  $\text{Ult}_W(V[G])$  を与える.  $\mathcal{U}$  の時, 成立する.

$\langle M_W[H] : E_W \rangle$  なる形に  $\mathcal{U}$  2-与える.  $\mathcal{U}$  2-与えるのは, 一般の形の問題を与えることにする.  $\langle M : E \rangle$  と  $\langle M_W : E_W \rangle$  は, 標準的な isomorphism が存在し,  $\mathcal{U}$  の isomorphism  $\pi$  は  $H$  の image へ下り,  $j(p)$ -generic over  $M$  とする.  $\text{Ult}_W(V[G])$  と  $\langle M[H] : E \rangle$  の同型とある (但し,  $\mathcal{U}$  2-与える  $H$  は isomorphism  $\pi$  は  $H$  の像). 即ち.

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Ult}_W(V[G]) \cong \langle M[H] : E \rangle & \\
 \nearrow \text{ultrapower extension} & & \nwarrow \text{generic extension} \\
 V[G] & & \\
 \nearrow \text{generic extension} & & \searrow \text{ultrapower extension} \\
 V & \rightarrow & \text{Ult}_W(V) = \langle M : E \rangle
 \end{array}$$

が成立するとき  $\mathcal{U}$  与える.

我々は,  $\mathcal{U}$  の問題が肯定的に与える  $\mathcal{U}$  の条件について与える.  $\mathcal{U}$  の条件を述べた.









よ、時、 $\langle q_\alpha: \alpha < \kappa \rangle$  は次の条件を満たす、 $\mathcal{C}$  の連続列の  
2-1-2

(a)  $q_\alpha \leq p_1$ ,  $\alpha < \kappa$ .

(b)  $q_\alpha \in X_\alpha$ ,  $\alpha < \kappa$ .

(c)  $q_\alpha \Vdash \alpha \in A$ ,  $\alpha \in B$ .

$p_1 \Vdash \{\alpha < \kappa; q_\alpha \in G\} \cap A \in J$  とする。  $\mathcal{P}$  は  $\kappa$ -chain  
condition を満たす。  $p_1 \Vdash \{\alpha < \kappa; q_\alpha \in G\} \cap A \cap D = \emptyset$   
より  $\kappa - D \in I$  となる。  $B \notin I$  であるから、 $B \cap D \neq \emptyset$ .

$\alpha \in B \cap D$  とする。  $\mathcal{C}$  は  $p_1$  より  $q_\alpha \Vdash \alpha \in D \cap A$ , (a) より

$q_\alpha \Vdash \{\alpha < \kappa; q_\alpha \in G\} \cap A \cap D = \emptyset$ . ようするに  $q_\alpha \Vdash q_\alpha \notin G$ .

よって  $\mathcal{C}$  は  $\mathcal{C}$  である。  $p_2 \leq p_1$ ,  $p_2 \Vdash \{\alpha < \kappa; q_\alpha \in G\} \cap A \notin J$   
より  $p_2$  は  $\mathcal{C}$  である。 ようするに、 $p_2 \in \mathcal{Y}$ ,  $p_2 \leq p_1$ .  $p_2$  は  $\mathcal{C}$  である。

$\mathcal{P}$  は dense である。  $p \in \mathcal{Y} \cap G$  とする。  $p \in G$  であるから、

$p \leq p_1$  は compatible である。 ようするに、 $(\forall \alpha < \kappa) (q_\alpha \in X)$ ,

$\mathcal{C} = \{\alpha < \kappa; q_\alpha \in G\} \cap A \notin J$  である。  $\langle q_\alpha: \alpha < \kappa \rangle$  は  $\mathcal{C}$  である。

ようするに、 $\mathcal{C} \in \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{C} \subseteq A$ .  $\mathcal{X}$  は  $R_J$  2-dense である。

$\mathcal{W}$  は  $R_J$ -generic over  $V[G]$  である。  $\mathcal{X} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$ .

$A \in \mathcal{W} \cap \mathcal{X}$  とする。  $(\forall \alpha < \kappa) (q_\alpha \in X_\alpha)$ ,  $A \subseteq \{\alpha < \kappa; q_\alpha \in G\}$

より  $\langle q_\alpha: \alpha < \kappa \rangle \in \mathcal{V}$  である。 ようするに、 $\{\alpha < \kappa; q_\alpha \in G\} \in \mathcal{W}$ ,

より  $q = [\langle q_\alpha: \alpha < \kappa \rangle] \in H$ ,  $q \in \text{ext}(X)$ .  $\mathcal{H}$  は

$\mathcal{P}$ -generic over  $\langle M: E \rangle$  である。

$\langle M[H]; E \rangle$  は  $\langle M; E \rangle$  の generic extension である。

elementary embedding  $\tilde{j} : \langle V[G]; E \rangle \rightarrow \langle M[H]; E \rangle$

を次の様うに定義する。  $x \in V[G]$  である  $x$  に対して  $i_G^V(x) = x$

なる term である。  $\tilde{j}(x) = i_H^M(j(x))$  である。  $p \in G \iff j(p) \in H$

、  $p \in P$  なる  $p$  に対して  $j(p) \in H$ 、  $\tilde{j}$  は well-defined である。

より。 同様に  $\tilde{j}$  は elementary embedding である。

補題 3.  $W = \{A \in P(\kappa) \cap V[G] : \langle M[H]; E \rangle \models \kappa_A \in \tilde{j}(A)\}$

$\tilde{j}_W : \langle V[G]; E \rangle \rightarrow \text{Ult}_W(V[G])$  は canonical embedding である。  $k : \text{Ult}_W(V[G]) \rightarrow \langle M[H]; E \rangle$

を次の様うに定義する。  $[f]_W \in \text{Ult}_W(V[G])$ 、

$k([f]_W) = \tilde{j}(f)(\kappa)$ 。 補題 3 を用いて。 次の命題が成り立つ。

補題 4.  $k$  は同型である。

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Ult}_W(V[G]) & \\
 \nearrow \tilde{j}_W & \cong & \downarrow k \\
 V[G] & \longrightarrow & M[H] \\
 \uparrow \text{UI} & & \uparrow \text{UI} \\
 V & & M
 \end{array}$$

中之一。我々の。§12 提起した問題に解答を与える条件  
を、得る事に反す。

#### 4. 証明.

32-段の結果より、次の定理が導かれる。

定理1.  $\kappa \in \text{regular uncountable cardinal}$ ,  $I \in \text{normal ideal on } \kappa$  とす。  $\mathcal{P} \in \kappa\text{-chain condition}$  を満足する p.o. set とす。  $I$  の precipitous にある  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}$  の、  
必要十分条件は、 $\mathcal{U}$  は  $\kappa$ -chain condition を満足する  $\kappa$ -ideal の  
precipitous とす。

( $I$  の precipitous とあることは、 $\text{Ult}_{\mathcal{U}}(\mathcal{P})$  が well-founded とある事と等しい)。

証明は前節の補題4より、明らかである。

定理2.  $\kappa \in \text{regular uncountable cardinal}$ ,  $\mathcal{T} \in \kappa$  の  $\kappa$ -saturated normal ideal とす。  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ ,  $\mathcal{U}$  の thin set の precipitous とあることは、 $\mathcal{U}$  は  $\mathcal{T}$  の  
子集合。  $\{\alpha < \kappa; \alpha \in \text{thin set of ideal of precipitous } \mathcal{U}\}$   
の  $\mathcal{T}$ -measure one である事と等しい。

## 参考文献.

[1]. T. Jech and K. Prikry, Ideals of sets and the power set operation, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 573-595.

[2] T. Jech, M. Magidor, W. Mitchell and K. Prikry, Precipitous ideals, to appear.

[3]. Y. Kakuda. On a condition for Cohen extensions which preserve precipitous ideals.