

Laplace 作用素の Dissipativeな拡張について *

東京大学, 教養 藤原大輔

§ 1 序

Ω を $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の有界領域で, その境界を Γ とする. $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ が "境界のある C^∞ 多様体" をなすと仮定する. Ω 上で定義された複素数値をとる関数 u と実数 s とに対して, s 次ソボレフノルムを $\|u\|_s$ と書く.

Ω 内で Laplace 作用素 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2}$ を齊次境界条件: $\mathcal{B}u|_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial \nu} + (a + ib)u + (a_0 + ib_0)u|_\Gamma = 0$ の下で考える. ここで ν は Γ への単位外法線, a, b は, C^∞ 実ベクトル場 (Γ 上), a_0, b_0 は Γ 上の C^∞ 実関数である.

次の問題は難しい。

"適当に定数 c を選ぶと, 評価:

$$(1.1) \quad -\operatorname{Re}(\Delta u, u) + c\|u\|_0^2 \geq 0$$

が, すべての $u \in C^2(\bar{\Omega})$ で $\mathcal{B}u|_\Gamma = 0$ なる u に対して成立するような $(\mathcal{B}, \Omega)$ という組をすべて定めよ."

* この研究は, 内山康一氏との共同で行われた。

一つの良く知られた必要条件は、ベクトル $b(x)$ の長さを $|b(x)|$ と書くと、

$$(1.2) \quad |b(x)| \leq 1, \quad \forall x \in \Gamma$$

である。

一方、J. L. Lions [3] は、任意の $x \in \Gamma$ に対して $|b(x)| < 1$ であれば、評価 (1.3) が成立することを示した。

$$(1.3) \quad -\operatorname{Re}(\Delta u, u) + C_1 \|u\|_0^2 \geq C_0 \|u\|_1^2$$

$$C_1, C_0 > 0 \quad \text{const.}$$

ここでは、(1.2) を仮定して、評価

$$(1.4) \quad -\operatorname{Re}(\Delta u, u) + C_1 \|u\|_0^2 \geq C_0 \|u\|_{1/2}^2$$

$$C_1, C_0 > 0 \quad \text{const.}$$

が $Bu|_\Gamma = 0$ をみたすすべての $u \in C^2(\bar{\Omega})$ に対して成立するための条件を求めたい。

我々は、一つの必要十分条件を得たが、 $n \geq 3$ のときはまだ十分 explicit とは云えない。ここでは $n=2$ すなわち Ω が $\mathbb{R}^2$ の部分領域のとき、この必要十分条件を与えて、一般の n のときは、一つの十分条件、一つの必要条件を与える。いずれも Ω の幾何学的形状にも言及することに注意されたい。

評価 (1.4) は局所化できることが分っている。(Fujiwara [2])。従って、Lions の結果を考慮すると、固難とは、

$|b(x_0)| = 1$ となる実 $x_0 \in \Gamma$ の近くで起ることが知られよう。
 関数 $l(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - |b(x)|^2$, $x \in \Gamma$ を導入する。仮定 (1.2) から, $l(x) \geq 0$ で, x_0 は $l(x)$ の critical point である。 x_0 での $l(x)$ の Hessian を $L(x_0)$ とおく。 Γ の接空間 $T_{x_0}(\Gamma)$ は内積 $\langle, \rangle$ によって, その dual と同一視され, $L(x_0)$ は $T_{x_0}(\Gamma)$ の線型変換と考えられる。 Γ 上の接ベクトル場 $a(x)$ を用いて $\nabla_* a : T_{x_0}(\Gamma) \rightarrow T_{x_0}(\Gamma)$ なる線型変換を, $T_{x_0}(\Gamma) \ni \xi \mapsto \nabla_\xi a \in T_{x_0}(\Gamma)$ によって定義する。超曲面 Γ の γ -基本型式を $T_{x_0}(\Gamma) \times T_{x_0}(\Gamma) \ni (\xi, \eta) \mapsto \omega_{x_0}(\xi, \eta) \in \mathbb{R}$ と書く。また, $x_0 \in \Gamma$ における Γ の γ -平均曲率を $M(x_0)$ とかく。(ここでは Ω の内部の方向を+とした。)

定理 1 評価 (1.4) が成立すれば, 次の 2 条件が成立する。

- (i) $\forall x \in \Gamma$ で, $|b(x)| \leq 1$.
 (ii) $|b(x_0)| = 1$ なるすべての実 $x_0 \in \Gamma$ で, 次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned}
 (1.5) \quad & \sqrt{n-1} \left(\frac{1}{2} \text{Tr } L(x_0) - \frac{1}{2} \langle L(x_0)b(x_0), b(x_0) \rangle - |\nabla_{b(x_0)} b|^2 \right. \\
 & \left. + \text{Tr } {}^t(\nabla_* b)(\nabla_* b) - \text{Tr } (\nabla_* b)^2 \right)^{1/2} \\
 & + \omega_{x_0}(b(x_0), b(x_0)) - n M(x_0) + 2a_0(x_0) - \text{Tr } (\nabla_* a) > 0
 \end{aligned}$$

定理 2 次の条件 (a) (b) が成り立てば, 評価 (1.4) は成り立つ。

$$(a) \quad \forall x \in \Gamma \quad |b(x)| \leq 1$$

$$(b) \quad \left[\frac{1}{2} \operatorname{Tr} L(x_0) - \frac{1}{2} \langle L(x_0) b(x_0), b(x_0) \rangle - |\nabla b(x_0) b(x_0)|^2 + \right. \\ (1.6) \quad \left. + \operatorname{Tr} {}^t(\nabla_* b)(\nabla_* b) - \operatorname{Tr} (\nabla_* b)^2 \right]^{1/2} + \\ + \omega_{x_0}(b(x_0), b(x_0)) - n M(x_0) + 2 a_0(x_0) - \operatorname{Tr} (\nabla_* a) > 0$$

なる不等式が, $b(x_0) = 1$ となる各点 x_0 で成立すること。

系 3 $n=2$ ならば, 定理 1 の条件 (i) (ii) は, 評価 (1.4) が成立するための必要十分条件である。

§2. グリーンの公式

S を単位円周で, その上の generic な点を s とかく。 $\bar{\Omega} \times S$ での C^∞ 関数 $u(x, s)$ に対して, その $\Gamma \times S$ への制限 $\varphi(x, s)$ は C^∞ 関数である。次の Dirichlet 問題はとける。

$$(2.1) \quad \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) w(x, s) = 0 \quad \text{in } \Omega \times S$$

$$w(x, s)|_{\Gamma} = \varphi(x, s).$$

$\varphi \mapsto w$ の対応を P とする。 $w = P\varphi$. P は Poisson 作用素と呼ぶことにする。 $v = u - w$ とおくと, 分解

$$(2.2) \quad u = v + w$$

ができる。さらに, u が, 境界条件 $Bu|_{\Gamma} = 0$ を満たすとすると, Green の公式から

$$(2.3) \quad -\operatorname{Re} \iint_{\Omega \times S} (\Delta + \frac{\partial^2}{\partial s^2}) u \cdot \bar{u} \, dx \, ds \\ = -\operatorname{Re} \iint_{\Omega \times S} (\Delta + \frac{\partial^2}{\partial s^2}) v \cdot \bar{v} \, dx \, ds + \operatorname{Re} \iint_{\Gamma \times S} T \varphi(x, s) \overline{\varphi(x, s)} \, d\sigma \, ds$$

を得る。ここで $d\sigma$ は Γ の hypersurface element である。 T は $\Gamma \times S$ 上での一階の擬微分作用素で, 次のように定義される。

$$(2.4) \quad T\varphi = \frac{\partial P\varphi}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma \times S} + (a+ib)\varphi + (a_0+ib_0)\varphi.$$

評価 (1.4) が成立することと, 次の評価 (2.5) が成立することとは同値であることが, 知られる。(Fujiwara [2])

$$(2.5) \quad \operatorname{Re} (T\varphi, \varphi) + C_1 \|\varphi\|_{-1/2}^2 \geq C_0 \|\varphi\|_0^2.$$

$C_1, C_0 > 0$: const.

評価 (2.5) を考察するため, 作用素 T のシンボルを求めよう。

§3. Poisson 作用素

まず, Poisson operator P のシンボル (Boutet de Monvel [1]) を求める。 x_0 を Γ の任意の一点として固定する。 x_0 の近傍で, 次の座標系をとる。 x_0 を原点とし, $y_1, \dots, y_n$ 軸を Γ の接超平面上で, x_0 での主曲率方向と一致させてとる。 y_{n+1} 軸は, 内法線方向とする。 Ω は, 不等式

$$(3.1) \quad y_{n+1} - \varphi(y') > 0$$

で与えられる. $\varphi(y')$ は $y' = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ の C^∞ 関数で

$$(3.2) \quad \varphi(y') = \sum_j \omega_j y_j^2 + \sum_{j,k} \omega_{ijk} y_i y_j y_k + O(|y'|^4)$$

で与えられるとして良い. ω_j, ω_{ijk} は定数で, ω_{ijk} は i, j, k に関し; 対称とする. 以下, i, j, k 等についての和は, 1 から n 迄独立にとるとする. Einstein の規約は, 使わない.

任意の実ベクトル $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ に対して, 双線型写像, $\omega_{x_0}(\xi, \eta) = 2 \sum_j \omega_j \xi_j \eta_j$ が唯一基本型式で, $\frac{2}{n} \sum_j \omega_j$ が唯一平均曲率 $M(x_0)$ であった.

変数変換をする. $x = (x', x_{n+1})$, $x' = (x_1, \dots, x_n)$ を

$$(3.3) \quad \begin{cases} y_i = x_i - \frac{x_{n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + \sum_i (\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})^2}}, & i=1, 2, \dots, n \\ y_{n+1} = \varphi(x') + \frac{x_{n+1}}{\sqrt{1 + \sum_i (\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})^2}} \end{cases}$$

で与える. Jacobian は, 原点で 1 だから, 原点の近くで

$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ は座標となる. Taylor 展開してみると

$$\begin{aligned} x_i &= y_i + 2\omega_i y_i y_{n+1} + 4\omega_i^2 y_i y_{n+1}^2 - 2\omega_i y_i (\sum_j \omega_j y_j^2) \\ &\quad + 3 y_{n+1} \sum_{j,k} \omega_{ijk} y_j y_k + O(|y|^4) \\ x_{n+1} &= y_{n+1} - \sum_i \omega_i y_i^2 - 2(\sum_i \omega_i^2 y_i^2) y_{n+1} - \sum_{ijk} \omega_{ijk} y_i y_j y_k \\ &\quad + O(|y|^4). \end{aligned}$$

従って、空間の計量は、

$$(3.4) \quad ds^2 = (dy_1)^2 + \dots + (dy_{n+1})^2 \\ = \sum_i (dx_i)^2 + 4 \left(\sum_i \omega_i x_i dx_i \right)^2 + (dx_{n+1})^2 + O(|x|^3).$$

新しい座標系で、 $-(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial s^2})$ の主シンボルと σ^2 シンボルは、

$$(3.5) \quad \sum_j (1 + 4\omega_j x_{n+1} + 12\omega_j^2 x_{n+1}^2 + O(|x|^3)) \xi_j^2 + \xi_{n+1}^2 + \sigma^2 \\ + \sum_{i,j} \{ 12x_{n+1} (\sum_k \omega_{ijk} x_k) - 4\omega_i \omega_j x_i x_j + O(|x|^3) \} \xi_i \xi_j \\ - 2i \sum_j \{ -2(\sum_i \omega_i \omega_j x_j) + 3x_{n+1} (\sum_i \omega_{ij}) + O(|x|) \} \xi_j \\ + 2i \left(\sum_j \omega_j + 2x_{n+1} \sum_j \omega_j^2 + 3 \sum_{ij} \omega_{ij} x_j + O(|x|) \right) \xi_{n+1}.$$

$-(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial s^2})$ の主シンボルを $A_2(x, \xi', \xi_{n+1}, \sigma)$ とする。これを ξ_{n+1} の2次多項式とみて、Imaginary 部分 ≥ 0 の根を $\tau^\pm$ とする。 $\tau^\pm$ の Taylor 展開は、

$$(3.6) \quad \tau^\pm = \pm i \left(\rho_1 - 2\rho_1^{-1} \sum_{ij} \omega_i \omega_j x_i x_j \xi_i \xi_j + O(|x|^3) \right) \\ \text{ここで, } \rho_1 = (|\xi'|^2 + \sigma^2)^{1/2}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

さて、 $-\Delta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}$ の基本解を φ とし、そのシンボルの漸近展開を

$$f(x, \xi, \sigma) \sim f_{-2}(x, \xi, \sigma) + f_{-3}(x, \xi, \sigma) + \dots$$

とすると、主シンボル $f_{-2}(x, \xi, \sigma)$ は、

$$f_{-2}(x, \xi, \sigma) = \rho^{-2} - 4\rho^{-4} x_{n+1} \left(\sum_j \omega_j \xi_j^2 \right) \\ + 16\rho^{-6} x_{n+1}^2 \left(\sum_j \omega_j \xi_j^2 \right)^2 - 12\rho^{-4} x_{n+1} \left(\sum_j \omega_j^2 \xi_j^2 \right) \\ - \rho^{-4} \sum_{ij} \{ 12x_{n+1} (\sum_k \omega_{ijk} x_k) - 4\omega_i \omega_j x_i x_j \} \xi_i \xi_j \\ + O(|x|^3) \rho^{-2}$$

ここで $\rho = \sqrt{|\xi|^2 + \sigma^2}$. 第2シンボルは

$$(3.8) \quad f_{-3}(x, \xi, \sigma) = -2i\xi_{n+1} (4\rho^{-6} \sum_j \omega_j \xi_j^2 + \rho^{-4} \sum \omega_j) \\ + O(|x|)\rho^{-3}$$

T^+ を主シンボルとする一位の擬微分作用素を T^+ とおく.

作用素 $Q: C_0^\infty(\Gamma \times S) \longrightarrow Q\varphi \in C^\infty(\sqrt{S})$ を

$$(3.9) \quad Q\varphi = \mathcal{F}\left(i \frac{\partial \delta(\Gamma \times S)}{\partial \nu} \otimes \varphi - \delta(\Gamma \times S) \otimes T^+ \varphi\right)$$

で定義する. ここで $\delta(\Gamma \times S) \otimes \varphi$ は次のような超関数.

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1} \times S) \ni \phi \longmapsto \int_{\Gamma \times S} \phi|_{\Gamma \times S} \cdot \varphi \, d\Gamma \, ds.$$

作用素 Q は, Boutet de Monvel の意味で, 擬 Poisson 作用素で, そのシンボルは, 次のようにして得られる.

$$(3.9) \quad (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f_{-2}(x', 0, \xi', \xi_{n+1}, \sigma) (\xi_{n+1} - \tau^-) \right. \\ + x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} f_{-2}(x', 0, \xi', \xi_{n+1}, \sigma) (\xi_{n+1} - \tau^-) \\ - \sum_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} f_{-2}(x', 0, \xi', \xi_{n+1}, \sigma) (-i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau^-) \\ + f_{-3}(x', 0, \xi', \xi_{n+1}, \sigma) (\xi_{n+1} - \tau^-) \Big\} e^{i(x_{n+1} \xi_{n+1})} d\xi_{n+1} \\ + O((x_{n+1} \rho_1^{-1})^2) \\ = i e^{-x_{n+1}(\rho_1 - 2\rho_1^{-1} \sum_j \omega_j \omega_j x_i x_j \xi_i \xi_j + O(|x|^2))} \\ - i x_{n+1} \left(\sum_j \omega_j \xi_j^2 + 3 \sum_{j,k} \omega_{j,k} x_k \xi_i \xi_j + O(|x'|^2) \right) x \\ \times (2x_{n+1} \rho_1^{-1} + \rho_1^{-2}) e^{-x_{n+1} \rho_1} \\ + \left(\sum_{j,k}^n \omega_j \omega_k \xi_k x_k \xi_j^2 \rho_1^{-1} \right) (2x_{n+1} \rho_1^{-2} + 2\rho_1^{-3} + O(|x'|)) e^{-x_{n+1} \rho_1} \\ + i (\sum \omega_j \xi_j^2) (x_{n+1}^2 \rho_1^{-1} - (2\rho_1^3)^{-1}) + i (\sum \omega_i) x \\ \times (x_{n+1} - (2\rho_1)^{-1}) e^{-\rho_1 x_{n+1}}$$

ここで $\rho_1 = (|\xi'|^2 + \rho^2)^{1/2}$.

これから, $\mathcal{K}: \varphi \mapsto Q\varphi|_{P \times S}$ という写像は, 一階の楕円型擬微分作用素であることが分る。そのシンボルは,

$$-i \left(1 - \frac{1}{2} \left(\sum_j \omega_j \xi_j^2 \right) \rho_1^{-3} - \frac{1}{2} \left(\sum_j \omega_j \right) \rho_1^{-1} + \dots \right).$$

$\mathcal{K}^{(-)}$ をそのパラメトリックとする。作用素

$$Q\mathcal{K}^{(-)}\varphi = \mathcal{F} \left(i \frac{\partial \delta(P \times S)}{\partial \nu} \otimes \mathcal{K}^{(-)}\varphi - \delta(P \times S) \otimes T\mathcal{K}^{(-)}\varphi \right)$$

は Poisson 作用素 P と同じシンボルをもつ。 P のシンボルは, したがって,

$$\begin{aligned} (3.11) \quad & e^{-x_{n+1} \left(\rho_1 - 2\rho_1^{-1} \left(\sum_j \omega_j x_j \xi_j \right)^2 + O(|x'|^2) \right)} \\ & - x_{n+1} \left(\left(\sum_j \omega_j \xi_j^2 \right) \rho_1^{-2} + O(|x'|) \right) e^{-x_{n+1} \rho_1} \\ & + x_{n+1} \left(\sum_j \omega_j + O(|x'|) \right) e^{-x_{n+1} \rho_1} \\ & + O(x_{n+1} \rho_1^{-1})^2 \end{aligned}$$

よって, $\varphi \mapsto \frac{\partial}{\partial \nu} P\varphi|_{P \times S}$ は擬微分作用素で, その主シンボルは,

$$(3.12) \quad \rho_1 - 2\rho_1^{-1} \left(\sum_j \omega_j x_j \xi_j \right)^2 + O(|x'|^2)$$

その第2シンボルは,

$$(3.13) \quad \left(\sum_j \omega_j \xi_j^2 \right) \rho_1^{-2} - \sum_j \omega_j + O(|x'|).$$

次に Γ でのベクトル場, $a(x)$, $b(x)$ の Taylor 展開を,

$$(3.14) \quad a(x) = \sum_j (\alpha_j + \sum_k \alpha_{jk} x_k + O(|x'|^2)) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$(3.15) \quad b(x) = \sum_j (\beta_j + \sum_k \beta_{jk} x_k + \sum_{j,k,l} \beta_{jkl} x_k x_l + O(|x'|^3)) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

とする。作用素 $\text{Re } T$ のシンボルを書き下すことができる。

$\text{Re } T$ の主シンボル $t_1(x, s, \xi, \sigma)$ は,

$$(3.16) \quad t_1(x, s, \xi, \sigma) = p_1 - 2p_1^{-1} \left(\sum_j \omega_j x_j \xi_j \right)^2 - \sum_j (\beta_j + \sum_k \beta_{jk} x_k + \sum_{k \neq l} \beta_{jkl} x_k x_l) \xi_j + O(|x|^3) p_1$$

第2シンボル $t_0(x, s, \xi, \sigma)$ は,

$$(3.17) \quad t_0(x, s, \xi, \sigma) = \sum_j \omega_j \xi_j^2 p_1^{-2} - \left(\sum_j \omega_j \right) + a_0(x_0) - \frac{1}{2} \sum_j d_{jj} + O(|x|).$$

§4 定理の証明

$x_0 \in \Gamma$ で $|b(x_0)|^2 = 1$ とする。上の座標系のとり方で

$$(4.1) \quad \sum_j \beta_j^2 = 1.$$

一方 $l(x) \geq 0$ だから (3.4) を使って,

$$(4.2) \quad \sum_j \beta_j \beta_{jk} = 0$$

であって, $l(x)$ の x_0 での Hessian $L(x_0)$ は non negative 対称行列で, 次のように与えられる。

$$(4.3) \quad \frac{1}{2} \langle \xi, L(x_0) \xi \rangle = -4 \left(\sum_j \omega_j \xi_j \beta_j \right)^2 - \sum_j \left(\sum_k \beta_{jk} \xi_k \right)^2 - 2 \sum_{j \neq k} \beta_j \beta_{jkl} \xi_k \xi_l.$$

ただし, $\langle, \rangle$ は接ベクトル空間 $T_{x_0}(\Gamma)$ の自然な内積。

一方 $|\nabla_\xi b|^2 = \sum_j \left(\sum_k \beta_{jk} \xi_k \right)^2$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in T_{x_0}(\Gamma)$,

だから,

$$(4.4) \quad \frac{1}{2} \langle \xi, L(x_0) \xi \rangle + |\nabla_\xi b|^2 = -4 \left(\sum_j \omega_j \xi_j \beta_j \right)^2 - 2 \sum_{j \neq k} \beta_j \beta_{jkl} \xi_k \xi_l.$$

以上を準備として定理を証明して行こう。

$\text{Re}T$ の主シズギルは cotangent bundle 上の点 $(x_0, b(x_0))$ で 0 となった。(即ち, $\varepsilon=0$, $\xi=\beta$, $\sigma=0$) ここで Hessian を $H(x_0)$ とする。

X で縦ベクトル $(x_1, x_2, \dots, x_n, \eta_1, \dots, \eta_n, A, \sigma)$ ($2n+2$ 次元) をあらわし, $\langle X, Y \rangle$ で X と $Y = (y_1, \dots, y_n, \xi_1, \dots, \xi_n, A', \sigma')$ の内積 $\sum x_j y_j + \sum \xi_j \eta_j + AA' + \sigma\sigma'$ をあらわすと,

$$(4.5) \quad \frac{1}{2} \langle HX, X \rangle = \frac{1}{2} \left(\sum_j \eta_j^2 + \sigma^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_j \beta_j \eta_j \right)^2 - \sum_{p,k} \beta_{pk} x_k \eta_p \\ - 2 \left(\sum_j \omega_j \beta_j x_j \right)^2 - \sum_{j,k,l} \beta_j \beta_{jkl} x_k x_l.$$

$n \times n$ matrices を導入しよう。

$$A = \begin{pmatrix} \omega_1^2 \beta_1^2, & \omega_1 \omega_2 \beta_1 \beta_2, & \dots, & \omega_1 \omega_n \beta_1 \beta_n \\ \omega_2 \omega_1 \beta_1 \beta_2, & & & \\ \vdots & & & \\ \omega_n \omega_1 \beta_1 \beta_n, & \dots, & \dots, & \omega_n^2 \beta_n^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \sum_j \beta_j \beta_{j11}, & \sum_j \beta_j \beta_{j12}, & \dots, & \sum_j \beta_j \beta_{j1n} \\ \sum_j \beta_j \beta_{j21} & & & \\ \vdots & & & \\ \sum_j \beta_j \beta_{jn1} & \dots, & \dots, & \sum_j \beta_j \beta_{jnn} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \beta_1^2 & \dots & \beta_1 \beta_n \\ \vdots & & \\ \beta_n \beta_1 & \dots & \beta_n^2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

そうすると, $H(x_0)$ は

$$H = H(x_0) = \begin{pmatrix} -4A - 2B, & -{}^t C & 0 & 0 \\ -C & I - D, & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

つぎに, $2n+2$ 次の複素構造

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \text{ ただし } J_0 = \left(\begin{matrix} \overbrace{0, -I}^{2n} \\ I, 0 \end{matrix} \right) \Bigg\}^{2n}$$

を導入する. JH の固有値は純虚数ばかりで, 実軸に関して対称に分布する. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は Nilpotent である.

よって iJH の正固有値は, $iJ_0 H_0$ の正固有値と一致する.

H_0 は $H_0 = \begin{pmatrix} -4A - 2B, & -{}^t C \\ -C & I - D \end{pmatrix}$. 一方, $\text{Re } T$ の主シンボルの次数だから, $\text{rank } H_0$ は高々 $2n-1$. これから $iJ_0 H_0$ の正固有値の数は $n-1$ を越えないことが分る. $\mu_1(x_0), \dots, \mu_{n-1}(x_0)$ を $iJ_0 H_0$ の負でない固有値とする. Anders Melin の得た定理を作用素 $\text{Re } T$ に用いて, 評価 (2.5) を経て,

定理 4.

任意の $C^2(\bar{\Omega})$ 関数で $Bu|_P = 0$ なるものに対して, 評価 (1.4) が成立する必要十分条件は,

$$(1) \quad \forall x \in \Gamma \quad \text{に対して} \quad |b(x)| \leq 1$$

$$(2) \quad |b(x_0)| = 1 \quad \text{になる任意の } x_0 \in \Gamma \quad \text{に対して, 不等式}$$

$$\frac{1}{2} (\mu_1(x_0) + \cdots + \mu_{n-1}(x_0)) + \operatorname{Re} t_0 > 0$$

が成立することである. ここで $\operatorname{Re} t_0$ は

$$\operatorname{Re} t_0 = \frac{1}{2} \omega_{x_0}(b(x_0), b(x_0)) - \frac{n}{2} M(x_0) + a_0(x_0) - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \nabla_* a$$

とかける.

$\mu_1(x_0) + \cdots + \mu_{n-1}(x_0)$ は今のところ explicit に書きあらわせないのので, 次の評価でこれをおまかえる.

$$(\mu_1^2 + \cdots + \mu_{n-1}^2)^{1/2} \leq \mu_1 + \cdots + \mu_{n-1} \leq \sqrt{n-1} (\mu_1^2 + \cdots + \mu_{n-1}^2)^{1/2}.$$

即ち,

$$(4.6) \quad \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Tr} (J_0 H_0)^2 \right]^{1/2} \leq \mu_1(x_0) + \cdots + \mu_{n-1}(x_0) \leq \sqrt{n-1} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Tr} (J_0 H_0)^2 \right]^{1/2}.$$

前に出て来た座標系を使ってやれば,

$$\operatorname{Tr} (J_0 H_0)^2 = 2 (\operatorname{Tr} C^2 - \operatorname{Tr} (I - D) (-4A - 2B))$$

から

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} (J_0 H_0)^2 = 2 & \left(\sum_{p,k} \beta_{pk} \beta_{kp} + 4 \sum_j \omega_j^2 \beta_j^2 + 2 \sum_{ij} \beta_i \beta_{ij} \right) \\ & - 4 \sum_{j,k} \omega_j \omega_k \beta_j^2 \beta_k^2 - 2 \sum_{ijk} \beta_i \beta_k \beta_j \beta_{ijk} \end{aligned}$$

これに, (4.4) を使って, 座標系によらぬ表現として,

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} (J_0 H_0)^2 = 2 & \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} L(x_0) - \operatorname{Tr} {}^t(\nabla_* b)(\nabla_* b) + \operatorname{Tr} (\nabla_* b)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \langle b(x_0), L(x_0) b(x_0) \rangle + |\nabla_{b(x_0)} b|^2 \right\}. \end{aligned}$$

これと (4.6) を定理 4 に用いて, 定理 1, 定理 2 を得る.

系3は, $\eta=2$ のとき

$$\left(-\frac{1}{2} \operatorname{Tr} (J_0 H_0)^2\right)^{1/2} = \mu_1(x_0)$$

による。

§ 5. 注 意

(イ) $a \equiv 0$ であって, b の interior differentiation と $a_0 + ib_0$ が適当な関係にあれば, $Bu|_P = 0$ なる境界条件で考えた Δ は形式的 self-adjoint 作用素となるが, もしこれが, 定理2, 3 あるいは4の条件をみたせば, Friedrichs 拡張が存在することが証明されたことになる。

(ロ) 以上の理論を高階の作用素に行うことは試みていない。

文 献

[1] Boutet de Monvel, Pseudo-noyaux de Poisson.

C. R. Acad. Sc. Paris, 1966

[2] Fujiwara, D. On some homogeneous boundary value problems bounded below. J. Fac. Sc. Univ. Tokyo. 17. 1970. 123-152.

[3] Lions, J. L. Sur les problemes aux limites du type derivees obliques. Ann. of Math. 64 (1959) 207-239

[4] Melin, A. Lower bound for pseudo-differential operators. Pre-print. Inst. Mittag-Leffler.