

# クノイド波に関する研究 (第 10 報)

—— 総括と今後の問題点 ——

岩垣雄一・酒井哲郎

## STUDIES ON CNOIDAL WAVES (TENTH REPORT)

—— Summary and Future Problems ——

By Yuichi IWAGAKI and Tetsuo SAKAI

### Synopsis

Nine reports of the studies on cnoidal waves discussed the applicability and the practice of Laitone's cnoidal wave theory. Especially, the hyperbolic wave theory which is the approximate expression of the cnoidal wave theory was derived, and many experiments were conducted in order to clarify the region of applicability of the cnoidal wave theory. Further, wave shoaling problems, which can not be explained by the small amplitude and Stokes wave theories, were solved by the application of the hyperbolic wave theory.

This final report summarizes nine reports and discussed the applicability of the cnoidal wave theory again. At first, the difference between the first and second approximations of this theory and secondly the difference between the cnoidal and hyperbolic wave theories are discussed. Finally, the criteria of applicability of the cnoidal wave theory are discussed from four kinds of view points: 1) the intersection points of the theoretical curves of the cnoidal and Stokes wave theories, 2) the fitness of the experimental values, 3) the relation between the water particle velocity and wave celerity and 4) the fitness of the experimental values of waves on the sloping beach.

### 1. ま え が き

昭和 39 年 3 月に第 1 報を報告してから、8 年を経過したが、その間種々の角度から有限振幅長波であるクノイド波の Laitone<sup>1)</sup> による理論を基礎として、理論の適用性を検討しその実用化をはかってきた。

その結果、クノイド波の近似理論であるハイパボリック波の理論を導いて、クノイド波理論の実用化に貢献するとともに、多くの実験を実施して Stokes 波理論とともにクノイド波理論の適用性を調べ、その適用限界をかなり明確にすることができた。また波の shoaling の問題も取りあげ、ハイパボリック波理論を応用して波の変形を取り扱ったが、線型理論である微小振幅波および有限振幅の Stokes 波理論では説明しえない多くの問題を解明することができた点は、この一連の研究のうちでも最も有用と思われる成果の 1 つである。

この研究は、第 9 報までに得た成果をかえりみて、クノイド波理論がどの程度まで使えるかどうか、すなわち理論の適用性の問題を中心として、これまでの研究を総括しようとするものである。

### 2. 第 1 近似と第 2 近似

水深・波長比が小さくても変形せずに進行する有限振幅波として、クノイド波理論を最初に求めたのは、Korteweg および de Vries<sup>2)</sup> である。その後も Keulegan および Patterson<sup>3)</sup> ならびに Keller<sup>4)</sup> らが研究を行ない、Wiegel<sup>5)</sup> あるいは Masch および Wiegel<sup>6)</sup> はこれらの理論を計算してその数表化を試みているが、

これらの数表は第1近似にもとづいたものである点に問題がある。

クノイド波の第2近似を求めたのは Laitone<sup>7)</sup> が最初であり、その後 Chappellear<sup>7)</sup> が第3近似を求めている。近似度が高くなるほど解の表現は複雑になるので、各近似解の相違があまりなければ、実用上は近似度の低いものほど便利といえる。ここでは、Laitone の第1近似解と第2近似解をいくつかの角度から比較してみる。

まず、波の谷から平均水面までの高さ  $\delta$  (Fig. 1 参照) に関して比較すると、Fig. 2 のようになる。図中、 $T$  は波の周期であり、 $H, h$  および  $h_t$  は、それぞれ Fig. 1 に示すように、波高、底面からの平均水面の高さすなわち静水深、および底面から波の谷までの高さである。図から明らかなように、 $h/H=5$  の場合は、

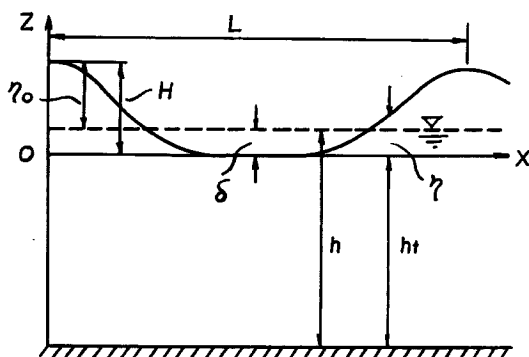


Fig. 1 Definition sketch of wave profile.

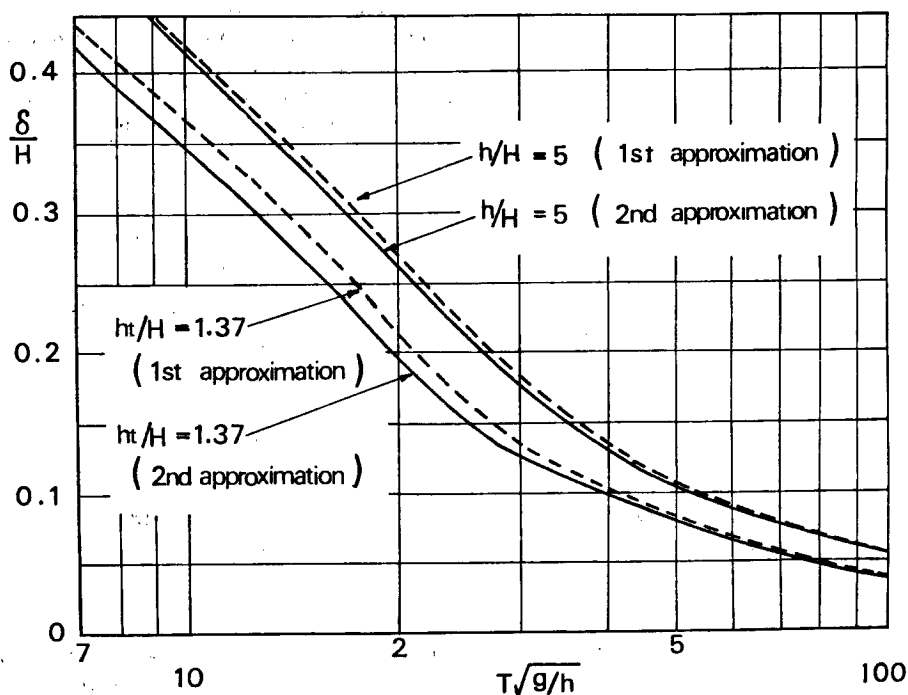


Fig. 2 Comparison of still water level height between 1st and 2nd approximations.

第1近似と第2近似の相違は約3%にすぎず、 $h_i/H=1.37$  すなわち碎波限界というもっとも極端な場合でも最大約6%であり、平均水面の高さに関しては第1近似を用いても実用上問題はないといえる。

つぎに、波形勾配  $H/L$  ( $L$ : 波長, Fig. 1 参照) に関して比較してみると, Fig. 3 のようになる。図は、波形勾配  $H/L$  と  $T\sqrt{g/h}$  の関係を示したものである。 $h/H=5$  および  $h_i/H=1.37$  (碎波限界) のいずれの場合も、第1近似と第2近似の相違は15%近くもあり、波形勾配に関しては、平均水面の高さと違って第1近似を用いることには問題がある。

波形に関して第1および第2近似の相違を、第1報 Fig. 13 (a)~(c) に比較して示している。第1近似と第2近似の波形を比較すると、波の峯および谷の付近で最も相違がなく、 $(\eta-\delta)/L=0$  の付近すなわち峯と谷の中間付近で最も相違が顕著である。この図の  $h/H=5$  の場合の両者の差は約4%である。一般に、 $h_i/H=3$  の場合約6%、 $h_i/H=2$  の場合約10%、 $h_i/H=1.37$  すなわち碎波限界の場合は約14%と、水深・波高比が減少するにつれてその差は大きくなり、波形に関しても第1近似を用いることはできない。

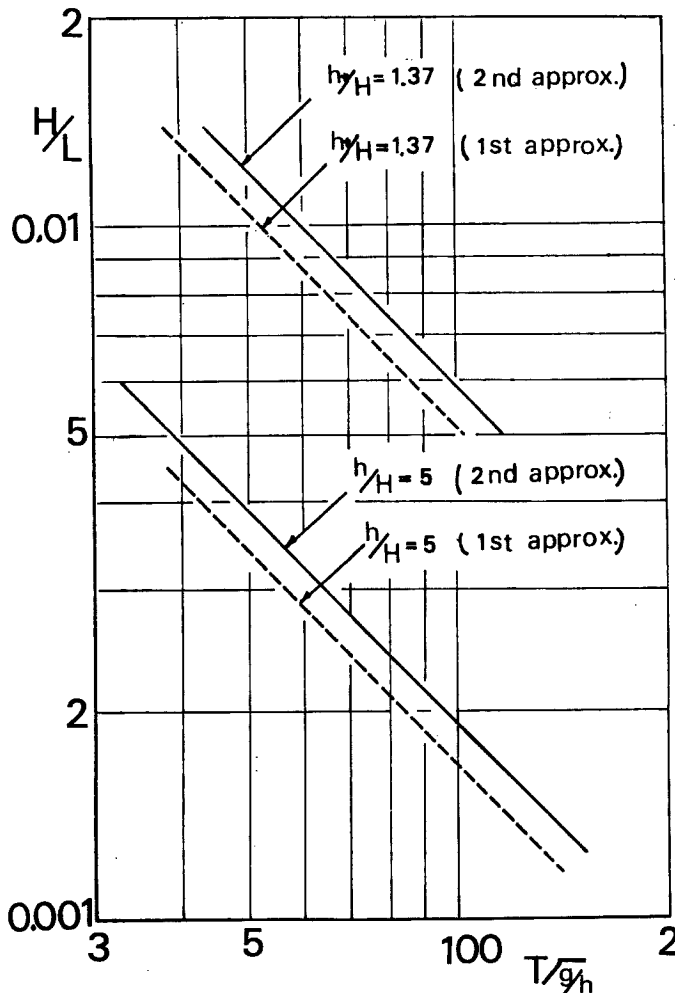


Fig. 3 Comparison of wave steepness between 1st and 2nd approximations.

つぎに波速  $c$  に関して比較してみると, Fig. 4 および Fig. 5 のようになる。Fig. 4 の場合には,  $T\sqrt{g/h}$  が非常に小さいところを除いて,  $h/H=5$  の場合には約 1%,  $h/H=2$  の場合には約 4% である。一方, Fig. 5 は Masch および Wiegel<sup>6)</sup> が第 1 近似解を用い  $h_i$  を  $h$  とおいて求めた波速 (図中破線) と, Fig. 4 と同じ方法で求めた第 2 近似解 (図中実線) とを比較したものである。この場合は, 例えば  $T\sqrt{g/h} = 15$  および  $h/H=2$  の場合にその差は約 15%,  $h/H=5$  の場合でも約 4% と Fig. 4 の場合よりその差は大きい。しかし, Fig. 4 の結果から波速に関しては第 1 近似を用いても問題はないといえる。

以上, 波の谷からの平均水面の高さ, 波形勾配, 波形および波速という波を表現する 4 つの代表量に関して, クノイド波の第 1 近似と第 2 近似との相違を調べてきたが, 最後に波の変形現象における両者の相違について述べる。

水深の減少にともなう進行波の波高の変化に関しては, 水深が減少しても波のエネルギーフラックスが一定であると仮定して求める方法がある。この場合, 深海での波のエネルギーフラックスとして同じ理論を用いても, 浅海での波のエネルギーフラックスとして, どのような理論解を用いるかによって結果が異なる。ここでは, クノイド波の近似表現であるハイパボリック波理論 (第 4 報参照) の第 1 近似および第 2 近似を用いた場合の結果の相違から, クノイド波の第 1 および第 2 近似の相違を検討する。

Fig. 6 は, 第 1 近似を用いた場合の水深減少にともなう波高の増加を示したものの<sup>9)</sup>で, 横軸に  $h/L_0$  ( $L_0$ : 沖波波長), 縦軸に  $H/H_0$  ( $H_0$ : 沖波波高), パラメータとして沖波波形勾配  $H_0/L_0$  をとっている。また, 図中には微小振幅波理論を用いた場合の理論曲線も一点鎖線で示している。一方, 第 5 報の Fig. 3 には, 浅海での波のエネルギーフラックスとして第 2 近似を用いた場合のものが示されている。ただし Fig. 6 の場合, 実際には第 1 近似を用いた場合の式をさらに簡略化しているため, 厳密には第 1 近似と第 2 近似との比較ではない。Fig. 6 を見てわかるように, 第 1 近似を用いた場合には, 水深の減少にともなって波高は増大するが, 水深の比較的大きい領域では微小振幅波理論による値よりかなり小さいのに対し, 第 2 近似を用いた場合は, つねに微小振幅波の理論値より大きい。このように, 水深減少にともなう波高の変化の現象では, 第 1 近似と第 2 近似の相違は非常に大きい。

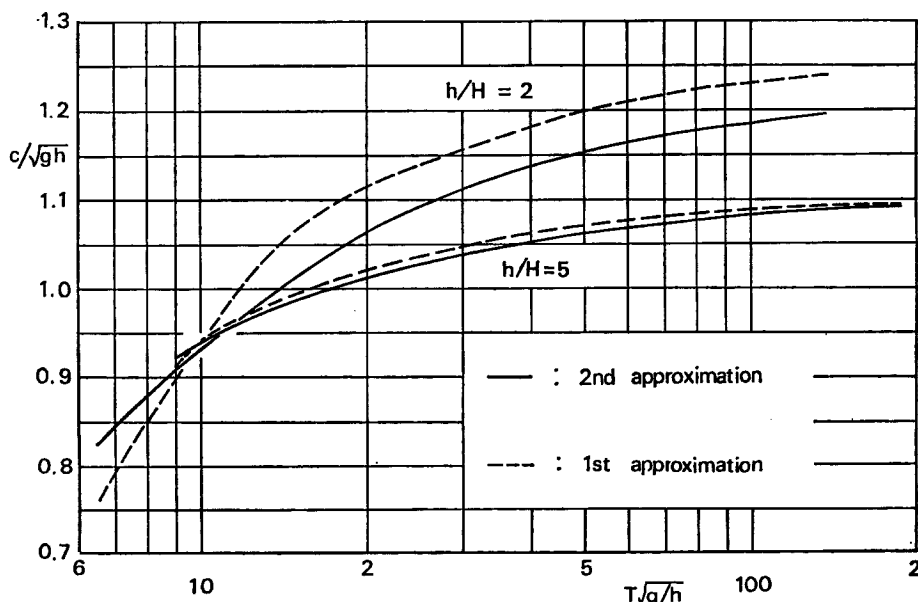
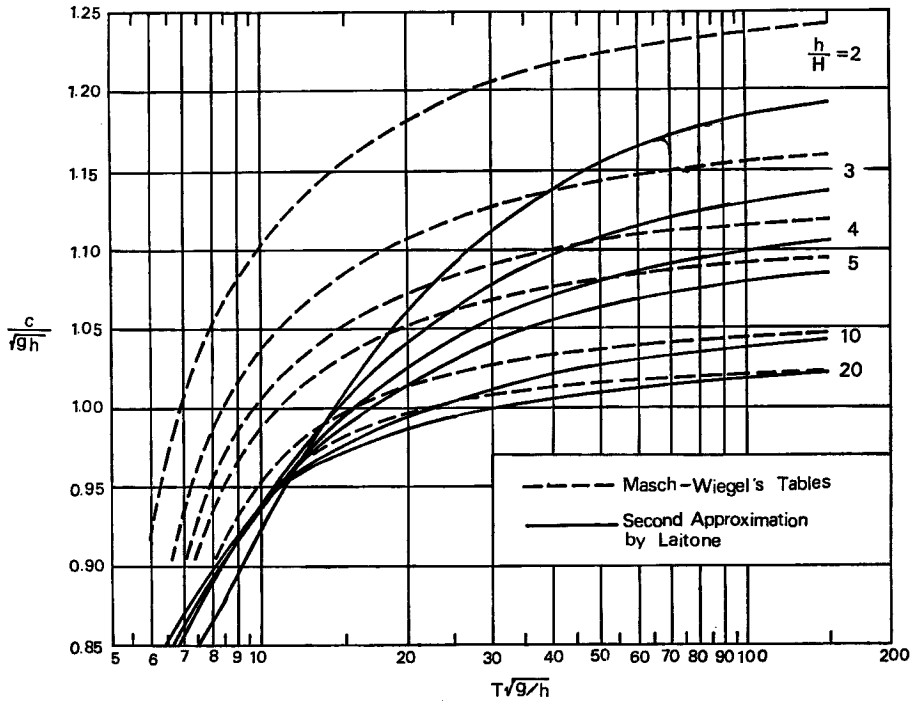
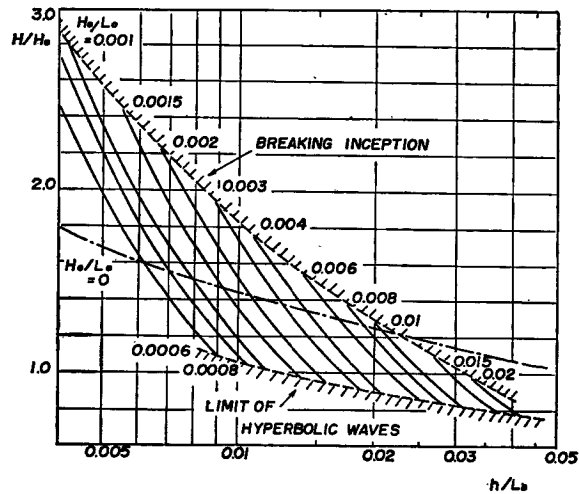


Fig. 4 Comparison of wave celerity between 1st and 2nd approximations.


 Fig. 5 Comparison of wave celerity between 1st (Masch and Wiegel<sup>6)</sup>) and 2nd approximations.

 Fig. 6 Wave height increase of simplified 1st approximation in shoaling water<sup>8)</sup>.

以上、クノイド波の第1近似解と第2近似解を、いくつかの観点から比較した結果、特定の量に関しては第1近似で実用上十分なものもあるが、一般的には第2近似との相違は無視しえないものがある。

### 3. クノイド波とハイパボリック波

すでに、まえがきで述べたように、クノイド波理論にはだ円関数や第1および第2種のだ円積分が含まれ、

その計算がきわめて困難なため、 $K \geq 3$  の条件のもとで円関数を初等関数である双曲線関数で近似したハイパボリック波の理論を第4報で提唱した。ここでは、まずクノイド波理論の適用領域を、波速および静水面からの波の峯高の2つの観点から、Skjelbreia<sup>9)</sup> の Stokes 波の第3次近似解と比較することによって検討し、ついで  $K = 3$  を満たす条件がその領域のどこに位置するか、また  $K \geq 3$  の領域でクノイド波とハイパボリック波の両理論がどの程度一致しているかを調べて、Stokes 波理論が適用しえない領域で、ハイパボリック波理論がどの程度適用しうるかを調べてみる。ただし、2. で明らかなようにクノイド波の第1近似と第2近似には一般にかなりの差があるので、ここでは第2近似について議論をする。

Fig. 7 は、微小振幅波、Stokes 波、クノイド波およびハイパボリック波の4つの理論による波速  $c/\sqrt{gh}$

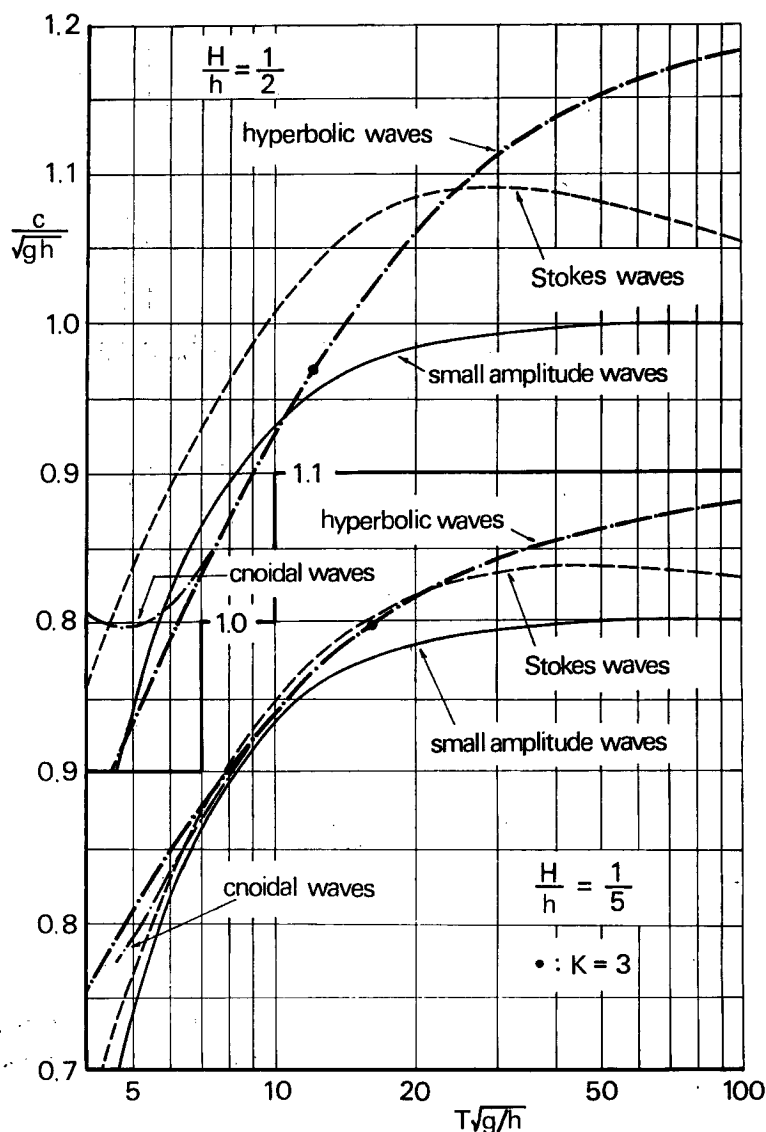


Fig. 7 Comparison of wave celerity between four kinds of wave theories<sup>10)</sup>.

と  $T/\sqrt{g/h}$  の関係を、 $H/h=1/2$  および  $1/5$  の場合について示したものである<sup>10)</sup>。図中には、 $K=3$  の点を黒丸で示してある。クノイド波とハイパボリック波の曲線は、それぞれ細い鎖線と太い鎖線で示されているが、両者に差が生じるのは、 $H/h=1/2$  および  $1/5$  のいずれの場合も、 $K=3$  の点より  $T/\sqrt{g/h}$  の値の小さい領域である。一方、クノイド波の曲線と Stokes 波の細い破線が交さる  $T/\sqrt{g/h}$  の値は、 $K=3$  での  $T/\sqrt{g/h}$  の値より大きい。一般に、クノイド波の適用領域は、Stokes 波の曲線と交さる付近より  $T/\sqrt{g/h}$  の値の大きい領域と考えれば、そのような領域では、クノイド波とハイパボリック波の波速の値はすでに一致しており、実用上は取り扱いの簡単なハイパボリック波理論で十分であるといえる。

Fig. 8 は、Fig. 7 と同じように、静水面からの波の峯高  $\eta_0$  (Fig. 1 参照) に関して比較したものであ

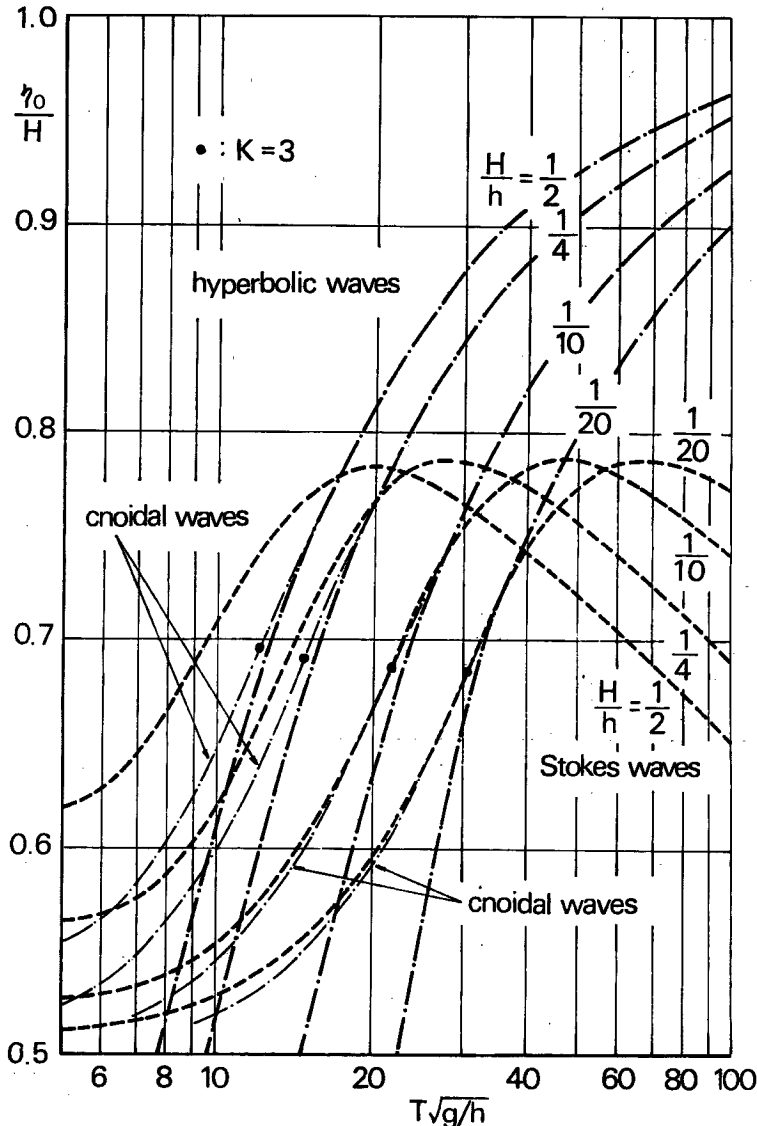


Fig. 8 Comparison of wave crest height between three kinds of wave theories<sup>10)</sup>.

る<sup>10)</sup>。この場合は  $H/h=1/2, 1/4, 1/10$  および  $1/20$  の場合について示してあるが、波速のときと違って  $K=3$  の点ではすでにクノイド波とハイパボリック波の値は一致していない。しかし、クノイド波と Stokes 波の曲線が交さる付近より  $T\sqrt{g/h}$  の値の大きい領域では、クノイド波とハイパボリック波の曲線は一致している。したがって峯高に関しても、一般に Stokes 波理論の適用できない領域では、実用上ハイパボリック波理論で十分であるといえよう。

#### 4. クノイド波の適用限界

3. のクノイド波とハイパボリック波の比較においては、クノイド波の適用領域として、クノイド波と Stokes 波の両理論値の一致する付近の  $T\sqrt{g/h}$  の値より大きい領域と考えたが、本来理論の適用限界は上述の観点からだけでなく、他にもいくつかの検討の方法が考えられる。ここでは、まず上述のクノイド波と Stokes 波の両理論曲線の交点からクノイド波の適用限界を検討したのち、実験値との適合度、砕波近傍の波の峯付近の水粒子速度と波速との関係、最後に底面が勾配を有する場合の実験値との適合度の観点からクノイド波の適用限界を検討する。

##### (1) Stokes 波の曲線との交点から求めた適用限界

3. で述べたように、Fig. 7 の波速および Fig. 8 の波の峯高のいずれにおいても、クノイド波と Stokes 波の両理論曲線が交さる点が存在する。たとえば、Fig. 8 の波の峯高の場合、Stokes 波の曲線はどの曲線もクノイド波の曲線と交さるする点の  $T\sqrt{g/h}$  の値よりさらに値が増加すると、峯高が減少をはじめる。このことは、ある程度  $T\sqrt{g/h}$  の値が増加すると Stokes 波理論が適用できないことを示している。これより、実用上からは両者の曲線の交点をその適用限界とすることも考えられる。

ここで、上述の交点を  $H/h$  と  $T\sqrt{g/h}$  の値で示し、横軸に  $H/h$  縦軸に  $T\sqrt{g/h}$  をとると、適用限界を示す曲線が得られる。上述の波の峯高の他に波速の場合についても示したのが Fig. 9 である。この図は、矢印

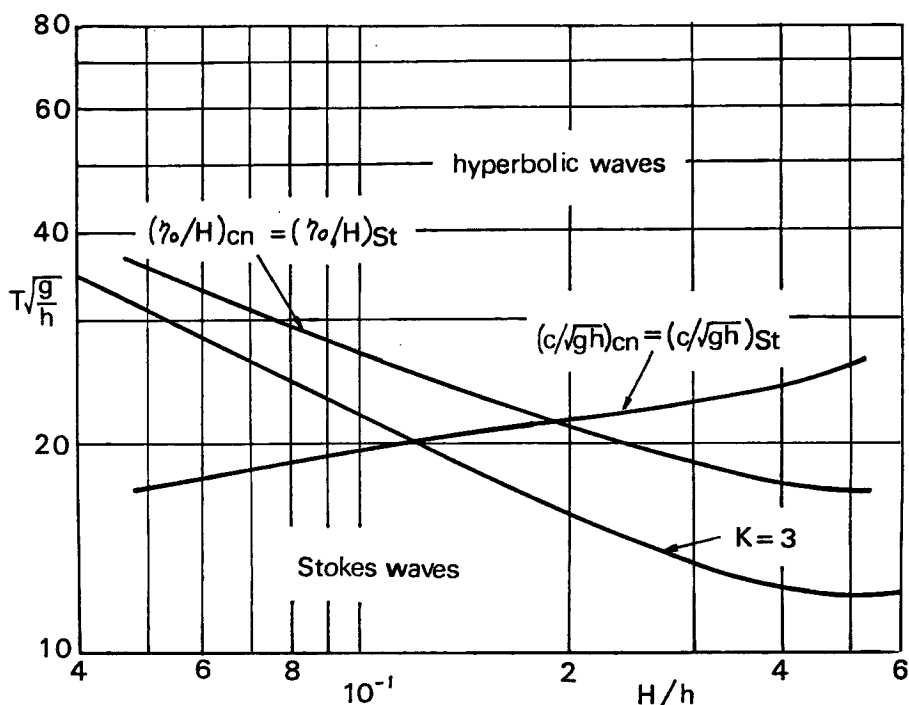


Fig. 9 .Region of applicability of hyperbolic waves.

で示しているように、それぞれの曲線上で Stokes 波とクノイド波の波速あるいは峯高が等しくなり、これらの曲線より  $T\sqrt{g/h}$  の値が大きくなるとクノイド波の適用領域であることを示している。図中にはクノイド波理論の  $K=3$  の関係を示す曲線も描かれており、曲線より上側では  $K \geq 3$  であることを示している。

いま峯高に関する曲線を見ると、この曲線は  $H/h$  のすべての値に関して、 $K=3$  の曲線より上側にある。したがって、クノイド波の適用領域では  $K \geq 3$  を満たしており、ハイパボリック波理論で十分であるといえる。一方、波速に関する曲線は、 $K=3$  の曲線と交さしており、交点より  $H/h$  の値の小さい領域では、クノイド波の適用領域のうちに  $K \leq 3$  の領域が存在し、クノイド波理論そのものを適用しなければならない  $T\sqrt{g/h}$  の値の領域が存在している。しかしながら、図を見てわかるようにこの領域での  $H/h$  の値は 0.12 以下であり、波高が小さい領域に限られている。Fig. 7 には  $H/h=1/2$  および  $1/5$  の場合しか示していないが、これらの比較から  $H/h$  が小さくなるほど曲線群の相違は少なくなる。したがって  $H/h \leq 0.12$  では、Stokes 波、クノイド波およびハイパボリック波の3種の理論のいずれを用いても実用上は大差がないため、この場合も、Stokes 波とハイパボリック波の両理論で十分であるといえる。

## (2) 実験値との適合性からみた適用限界

波浪水槽を用いて実験を行ない、波の諸量を測定して、それらが各理論とどの程度一致するかを調べることににより適用限界を知ろうとするものである。

Fig. 10 は、第3報、第6報に報告した波速の実験値のうち、 $h/H=3$  の場合について、 $c/\sqrt{gh}$  と  $T\sqrt{g/h}$  との関係を示したものである。図中には、微小振幅波、Stokes 波およびクノイド波の理論曲線をも

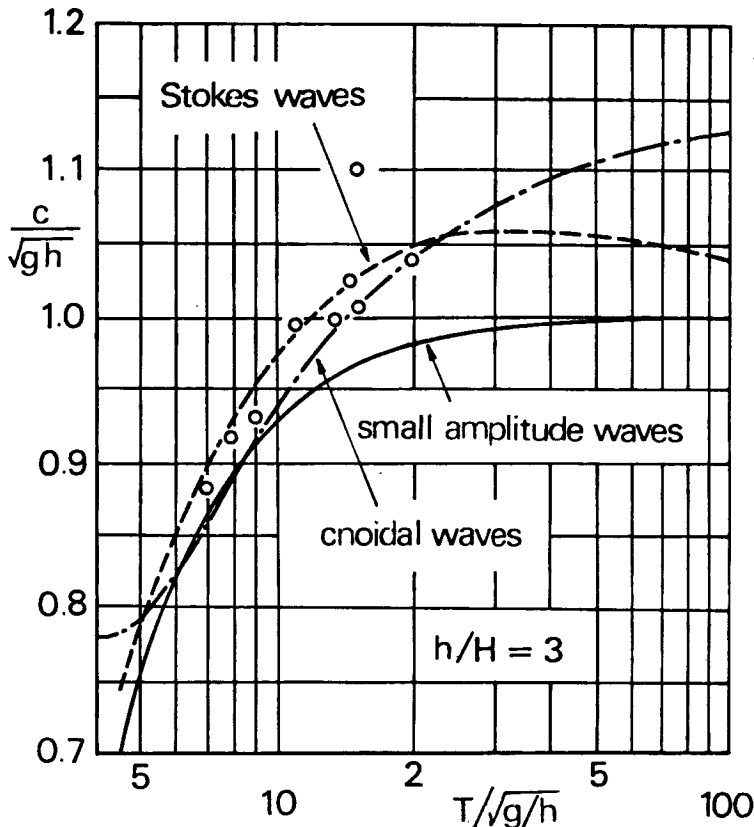


Fig. 10 Comparison between experimental and theoretical values of wave celerity.

示している。実験誤差は主に読み取り誤差で約0.5%である。実験値は  $T\sqrt{g/h}$  の値が7から20の間にしかないが、この間では Stokes 波とクノイド波の両曲線の差は約3%で、実験値から両者の適用限界を判定することはむづかしい。 $T\sqrt{g/h} \geq 30$  の領域では、両曲線の差が大きくなるが、実験波形に2次波峯が発生し実験誤差が大きくなるので実験値を示していない。

Fig. 8 からわかるように、波の峯高に関しても、波速の場合と同様、 $T\sqrt{g/h}$  の値が小さい領域では Stokes 波とクノイド波の両理論曲線はあまり差がなく、実験値も両曲線の中間にプロットされるが、実験値のうちの最大値を考えれば、Stokes 波理論を適用してもよいと思われる。 $T\sqrt{g/h}$  の値が大きくなると、波速と同様両曲線の差は大きくなり、とくに Stokes 波の理論曲線は  $T\sqrt{g/h}$  が大きくなるとかえって  $\eta_0/H$  が減少している。

とくに  $T\sqrt{g/h}$  の値が比較的大きい15, 20, 25および30の場合の実験値(第3報)を示したのが、Fig. 11 (a)~(d)である。横軸に  $\eta_0/H$ 、縦軸に  $h/H$  をとっており、図中には、微小振幅波、Stokes 波およびクノイド波の理論曲線をも示している。 $T\sqrt{g/h} = 15$  および20の場合には、両曲線にあまり差がなく、両理論の適用限界を判定できないが、 $T\sqrt{g/h} = 25$  および30の場合には、とくに  $h/H$  の値が小さいと差があらわれてくる。実験値は、 $h/H$  の大きい領域では両理論曲線よりかなり小さい値をとっているが、 $h/H$  が小さくなるにつれて増加し、最大値を考えればクノイド波理論の方を適用すべきと考えられる。

hot film 流速計および水素気泡をトレーサとする方法によって測定された水平方向水粒子速度の波の峯および谷の位相での実験値に関しては、第8報に報告されている。とくに hot film 流速計で測定された鉛直方向の特定の高さでの値を縦軸に、 $T\sqrt{g/h}$  を横軸にとって示した第8報の Fig. 8 の場合は、クノイド波と Stokes 波の両理論曲線にほとんど差のない  $T\sqrt{g/h} < 20$  の領域にしか実験値がなく、クノイド波の適用限界を検討しえない。

しかしながら、水素気泡をトレーサとして測定された、波の峯の位相での水平方向水粒子速度の鉛直分布の実験結果を示した第8報の Fig. 10 では、Stokes 波とクノイド波(実際にはハイパボリック波)の理論の相違が明瞭に見られ、実験値は  $T\sqrt{g/h} = 8.6$  の場合までは Stokes 波の理論曲線に近いのに対し、9.6以上ではクノイド波の理論曲線に近く、一般に  $T\sqrt{g/h} \geq 10$  ではクノイド波理論を適用すべきと考えられる。

以上のように、実験値と理論を比較することによって、クノイド波理論の適用限界をおよそ判定すること

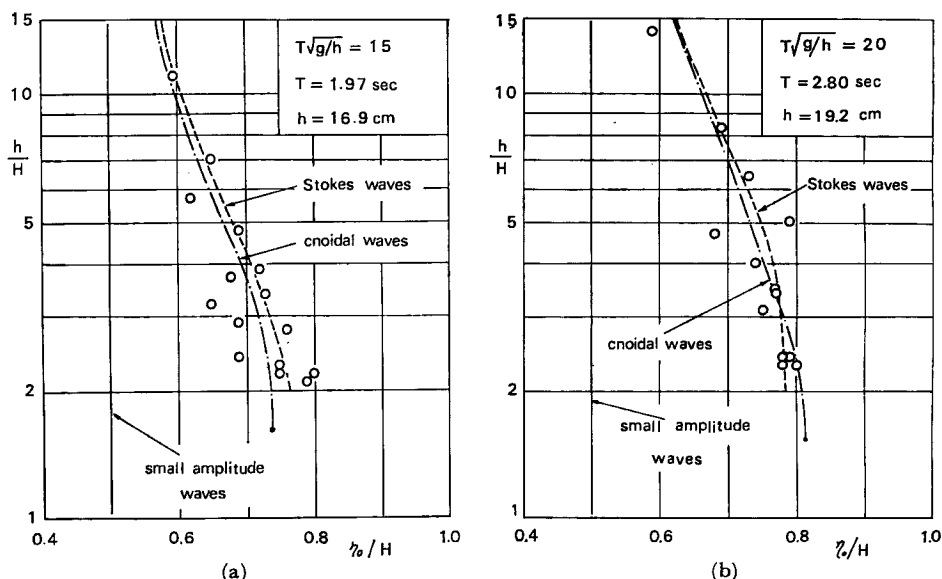


Fig. 11 (a), (b) Comparison between experimental and theoretical values of wave crest height.

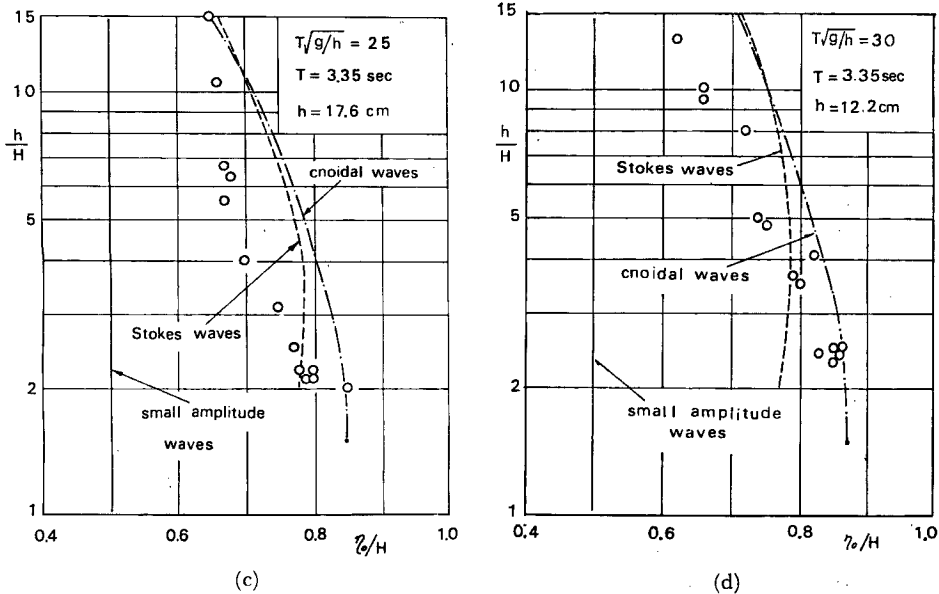


Fig. 11 (c), (d) Comparison between experimental and theoretical values of wave crest height.

は可能であるが、実験の精度および実験波形のきれいさなどによって明確にその境界を見出すことは不可能である。

### (3) 水粒子速度と波速との関係から見た適用限界

第9報で報告したように、進行波が砕けるときに、波の峯での水平方向水粒子速度  $u_c$  は波速とほぼ等しいことが実験的に確かめられた。しかしながら、クノイド波理論の  $u_c$  を計算してみると、従来孤立波の最高波の条件として提案されている波高・水深比（例えば、山田<sup>11)</sup> は  $H/h = 0.828$ , McCowan<sup>12)</sup> は  $H/h = 0.78$ , Laitone<sup>1)</sup> は  $H/h = 0.727$ ）よりも小さい値で、すでに波速  $c$  より大きくなることがわかった。このことは、 $u_c = c$  の付近、すなわち砕波近傍では、もはやクノイド波理論は適用しえないことを示すものであり、このような場合には、さらに高次の理論かまたは別の理論を導く必要があるだろう。

### (4) 底勾配がある場合の適用限界

第9報で、底勾配が  $1/200$  という非常に緩勾配の斜面上を進行し砕波にいたる波について、水面での波の峯付近の水平方向水粒子速度の分布を測定した結果、Stokes 波およびクノイド波理論の分布のいずれにも一致せず、非常に鋭い山を有していることがわかった。

一方、波形を調べてみると、一樣水深部では波形はほぼ理論に一致したが、砕波近傍の波形は、水粒子速度の水面での分布と同様、どの理論曲線とも一致せず、鋭い山を有していることがわかった。

この事実は、波形が底勾配に非常に敏感であることを示しており、「底勾配が波の特性にどのような影響を与えるか」という新しい課題を提起するものである。この問題に関連して、一樣勾配斜面上を進行する有限振幅長波の理論を土木学会論文報告集<sup>13)</sup> に発表したがこのここでは触れない。

以上、本報はこれまでの9報を要約しクノイド波理論の適用性を中心に総括したが、問題がすべて解決したわけではなく未解決の問題も多く残っている。最後にこれまでの研究に協力された多くの方々にあらためて感謝の意を表するとともに、この研究は文部省科学研究費に負うところが非常に大きいことを記して筆をきたい。

## 参 考 文 献

- 1) Laitone, E. V.: The second approximation to cnoidal and solitary waves, Jour. of Fluid Mech., Vol. 9, 1961, pp. 430-444.
- 2) Korteweg, D. J. and G. de Vries: On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag., Ser. 5, Vol. 39, 1895, pp. 422-443.
- 3) Keulegan, G. H. and G. W. Patterson: Mathematical theory of irrotational translation waves, Jour. of Res. of the National Bureau of Standard, U. S. Dep. Commerce, Vol. 24, 1940, pp. 47-101.
- 4) Keller, J. B.: The solitary wave and periodic waves in shallow water, Communications on Pure and Applied Math., Vol. 1, 1948, pp. 323-339.
- 5) Wiegel, R. L.: A presentation of cnoidal wave theory for practical application, Jour. of Fluid Mech., Vol. 7, 1960, pp. 273-286.
- 6) Masch, D. F. and R. L. Wiegel: Cnoidal waves, Table of functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, Univ. of California, 1961.
- 7) Chappellear, J. E.: Shallow-water waves, Jour. of Geophysical Res., Vol. 67, 1962, pp. 4693-4704.
- 8) 岩垣雄一・酒井哲郎: 有限振幅波の shoaling について, 第14回海岸工学講演会講演集, 1967, pp. 1-7.
- 9) Skjelbreia, L.: Gravity waves, Stokes' third order approximation, Table of functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1959.
- 10) 岩垣雄一・酒井哲郎: hyperbolic waves の特性と実際問題への応用について, 第23回年次学術講演会講演概要, 土木学会, 1968, pp. 9-12.
- 11) Yamada, H.: On the highest solitary wave, Reports of Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ., Vol. V, No. 18, 1957, pp. 53-67.
- 12) McCowan, J.: On the highest wave of permanent type, Phil. Mag., Ser. 5, Vol. 38, 1894, pp. 351-358.
- 13) 岩垣雄一・酒井哲郎: 一様勾配斜面上の有限振幅長波について, 土木学会論文報告集, 第196号, 1971, pp. 65-74.