

Operators with one dimensional self-commutators

北大応電研 中村美浩 (Yoshihiro Nakamura)

§ 1. 序. $\mathcal{H}$ を可分な複素 Hilbert 空間、 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素の全体とする。 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ は、 self-commutator $[T^*, T] \equiv T^*T - TT^*$ が positive semi-definite のとき hyponormal operator と呼ばれる。例えば、 normal operator は hyponormal である。また、 self-commutator が rank 1 の作用素 T は、 T または T^* が hyponormal である。 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ は、 normal summand を持たないとき (i.e. closed subspace $\mathcal{M}$ が $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, $T^*\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, $T|_{\mathcal{M}}: \text{normal} \Rightarrow \mathcal{M} = \{0\}$) completely non-normal であると言われる。 T が $\text{rank}[T^*, T] = 1$ のときは、 T が completely non-normal であることと T が irreducible (自明でない reducing subspace を持たない) であることは同値である。

self-commutator が rank 1 の作用素の例としては、 unilateral shift がまず上げられるが、一般に次のような例がある。

定理 (Xia, 1962). $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ を irreducible な self-commutator が rank 1 の作用素とする。さらに、 $\operatorname{Re} T$ が simple spectrum を持つとするならば、 T は次のような $L^2(\alpha, \beta)$ 上の作用素と unitary 同値である： $S : L^2(\alpha, \beta) \rightarrow L^2(\alpha, \beta)$,

$$Sf(t) = tf(t) + i \left\{ a(t)f(t) + \frac{b(t)}{2i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\overline{b(s)}f(s)}{t-s} ds \right\}, \quad f \in L^2(\alpha, \beta)$$

ただし、 $a, b \in L^{\infty}(\alpha, \beta)$, $a = \bar{a}$ 。

一般の hyponormal operator についても、上のような singular integral model が知られている。 T が completely non-normal hyponormal operator ならば、その real part $\operatorname{Re} T$ は absolutely continuous であることを注意しておく。(Clancey [3] 参照)

この稿では、hyponormal operator (特に self-commutator が 1 次元の作用素) に関する最近の結果を、principal function との関連に重点を置いて紹介する。

§2. Principal function. hyponormal operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が completely non-normal であるための必要十分条件としては次のようなものがある：

- (i) $\operatorname{ran} D$ を含む最小の T で reducing な subspace は $\mathcal{H}$ である。
- (ii) $\operatorname{span} \{ T^{*m} T^n f : f \in \operatorname{ran} D, m, n = 0, 1, 2, \dots \} = \mathcal{H}$ 。
- (iii) $\operatorname{span} \{ T_{\omega}^{*-1} T_z^{-1} f : f \in \operatorname{ran} D, |z|, |\omega| > \|T\| \} = \mathcal{H}$ 。

ただし、 $D \equiv [T^*, T]$ といった。また、 $T_z = T - zI$ ($z \in \mathbb{C}$)。

上から次が容易にわかる。

定理. T と S を self-commutator が 1 次元, $[T^*, T] = \varphi \otimes \varphi$, $[S^*, S] = \psi \otimes \psi$ ($\varphi, \psi \in \mathcal{H}$), かつ irreducible な作用素とするとき、次は同値である。

(i) T と S は unitary 同値である。

(ii) $\langle T_z^{-1}\varphi, T_w^{-1}\varphi \rangle = \langle S_z^{-1}\psi, S_w^{-1}\psi \rangle$ for $|z|, |w| > M$.

(iii) $\|T_z^{-1}\varphi\| = \|S_z^{-1}\psi\|$ for $|z| > M$.

上は $\{\|T_z^{-1}\varphi\|\}_{z \in \mathbb{C}, |z| > \|T\|}$ が 1 次元の self-commutator を持つ作用素の unitary invariant であることを示している。この他に、hyponormal operator の unitary invariant としては determining function ($T = X + iY$, $D = [T^*, T] \geq 0$ のとき)

$$E(z, w) = I + \frac{1}{2i} D^{\frac{1}{2}} (X - z)^{-1} (Y - w)^{-1} D^{\frac{1}{2}}, \quad z \notin \sigma(X), w \notin \sigma(Y).$$

などがあるが、Pincus によ、 E 導入された principal function は重要な unitary invariant である。

定理. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が $[T^*, T] \in \text{trace class}$ のとき、次を満たす compactly supported real valued integrable function g が存在する:

$$\operatorname{tr} [p(T, T^*), g(T, T^*)] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \{ \bar{\partial} p \partial g - \partial p \bar{\partial} g \} g \, dm_2$$

for $\forall p = p(z, \bar{z}), g = g(z, \bar{z}) : \text{polynomials}$.

ただし、 $\partial p, \bar{\partial} p$ は各々変数 $z, \bar{z}$ による微分を表し、 dm_2 は 2次元の Lebesgue measure である。また、 $p(z, \bar{z}) = \sum a_{ij} z^i \bar{z}^j$ に対し $p(T, T^*) = \sum a_{ij} T^i T^{*j}$ とする。

上の g を T の principal function と呼ぶが、 g は次の式から決まると云、 z もよい：

$$\begin{aligned} & \det \{ (T-w)^* (T-z) (T-w)^{*^{-1}} (T-z)^{-1} \} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)(\bar{\zeta}-\bar{w})} \, dm_2(\zeta) \right\} \quad \text{for } \forall z, \bar{w} \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T). \end{aligned}$$

principal function は Fredholm index と密接に関連している：

$$g(z) = -\operatorname{ind}(T-z) \quad \text{for } z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_e(T).$$

$[T^*, T] \geq 0$ ならば $g \geq 0$ a.e. であり、さらに T が cyclic vector を持つば $0 \leq g \leq 1$ a.e. である。また、 T が self-commutator が rank 1 の hyponormal operator ならば $0 \leq g \leq 1$ である。このとき、 g は completely unitary invariant である。すなわち、compact support を持ち $0 \leq g \leq 1$ を満す可測関数と self-commutator が rank 1 の hyponormal operator は、unitary 同値を除いて一対一に対応する。(詳しくは、Clancey [3], Carey-Pincus [1] と参照。)

§ 3. Global local resolvent. principal function は local resolvent との関連と invariant subspace の存在のための十分条件の証明にも使われた (Clancey-Wadhwa [7], Nakamura [8]).
ここでは、global local resolvent との関係について述べる。

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ を hyponormal operator, $D \equiv [T^*, T]$ とする。
このとき、 $D + T_z T_z^* = T_z^* T_z$ ($z \in \mathbb{C}$) より

$\exists C(z), K(z) : \text{contraction s.t.}$

$$T_z^* C(z) = D^{\frac{1}{2}}, \quad T_z^* = K(z) T_z$$

$$C(z)^* \ker T_z^* = K(z) \ker T_z^* = \{0\}.$$

$C(z), K(z)$ は $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T^*)^*$ で weakly continuous になる。また、 $\ker T_z^*$ への projection を $P(z)$ とかけば、

$$C(z) C(z)^* + K(z)^* K(z) = I - P(z) \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$[K(z), T] = D^{\frac{1}{2}} C(z)^* \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

が成り立つ。 $C(z)$ を hyponormal operator T の global local resolvent と呼ぶ。(または、 $C(z)f, f \in \mathcal{H}$ と呼ぶ。)

global local resolvent と principal function の間には、次のような関係がある。(Clancey [5])

定理. $D^{\frac{1}{2}} \in \text{trace class}$ ならば、 $\text{tr}\{D^{\frac{1}{2}} C(z)^*\} = \hat{g}(z)$ が成り立つ。ただし、 $\hat{g}$ は measure $g d\mu_2$ の Cauchy 変換を表す。
特に、 $g(z) = -\bar{\partial} \text{tr}[K(z), T] = -\bar{\partial} \text{tr}\{D^{\frac{1}{2}} C(z)^*\}$ a.e. z .

T の self-commutator が rank 1, $[T^*, T] = \varphi \otimes \varphi$ ($\varphi \in \mathcal{H}$) のときは, $C(z) = T_z^{*-1} \varphi \otimes \frac{\varphi}{\|\varphi\|}$ ($T_z^{*-1} \varphi$ z における T_z^* の minimum norm solution を表す.) となるから上を言い換えると

$$\langle r(T)\varphi, T_z^{*-1}\varphi \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{r(\zeta)}{\zeta - z} g(\zeta) dm_2(\zeta)$$

for $\forall r \in \text{Rat}(\sigma(T))$,

$$g(z) = -\bar{\partial} \langle \varphi, T_z^{*-1} \varphi \rangle \quad \text{a.e.}$$

となる。global local resolvent $T_z^{*-1} \varphi$, $z \in \mathbb{C}$ には以下のよう性質がある:

- (i) $\|T_z^{*-1} \varphi\| \leq 1$, $z \in \mathbb{C}$,
- (ii) $\text{span} \{ T_z^{*-1} \varphi : z \in \mathbb{C} \} = \mathcal{H}_1 \equiv \text{completely non-normal part}$
- (iii) $\|T_z^{*-1} \varphi\| = 1$ on $\sigma_p(T_1^*)^*$, $T_1 \equiv T|_{\mathcal{H}_1}$
- (iv) $T_z^{*-1} \varphi$ は weakly continuous on $\mathbb{C}$, strong continuous off $\{z \in \sigma(T) : \|T_z^{*-1} \varphi\| < 1\}$.

さらに, (iv) の strongly continuous ではない集合は principal function による

$$\{z \in \mathbb{C} : \int_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta)}{|\zeta - z|^2} dm_2(\zeta) < +\infty\}$$

とも characterize できる。この集合は零集合だから,

$$\|T_z^{*-1} \varphi\| = 1 \quad \text{a.e. } z \in \sigma(T).$$

よって, g による $\sigma_p(T^*)$ の characterize と合せて,

$$\exists z_0 \in \sigma(T) \text{ s.t. } K(z_0) \text{ は co-isometry かつ } \text{rank}(I - K(z_0)K(z_0)^*) = 1.$$

がわかる。すなわち, $\exists K = K(z_0)$ co-isometry s.t.

$$T_{z_0}^* = K T_{z_0}, \quad \text{rank}(I - K K^*) = 1.$$

これから、次のような 1次元の self-commutator を持つ作用素の Toeplitz model が導ける。(Clancey [4])

定理. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ を $\text{rank}[T^*, T] = 1$ の irreducible な hyponormal operator とすれば、 $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ が存在して T_{z_0} は Toeplitz model $T_{\gamma(\omega)A}$ と unitary 同値になる:

$$\tilde{\mathcal{H}} = L^2 \oplus \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \mathcal{H}(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad \tilde{\mathcal{H}} = H^2 \oplus \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \mathcal{H}(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$U: \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}, \quad U \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta} f \\ e^{i\theta} g \end{bmatrix}$$

$P: \tilde{\mathcal{H}}$ から $\tilde{\mathcal{H}}$ への projection

$$T_{\gamma(\omega)A} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_1^* & A_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

$$AU = UA, \quad \gamma(e^{i\theta}) = e^{i\theta/2}, \quad A = A^*.$$

global local resolvent $T_z^{*-1}\varphi$ を持っていると、 T の distributional model も考えることが出来る。すなわち、 T が irreducible 2" $[T^*, T] = \varphi \otimes \varphi$ のとき 線型作用素

$$V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}' = \{ \text{distributions with compact support} \}$$

$$Vf = -\bar{\partial} \langle f, T_z^{*-1} \varphi \rangle$$

は連続で 1-対-1 であり、

$$VTf = z Vf \quad f \in \mathcal{H}$$

を満たすので、 $\mathcal{E}'$ に適当な ノルム を入れてやれば、 T を z -multi-

plication と unitary 同値にできる。(Putinar [9])

§4. Cyclic vector. hyponormal operator が cyclic vector を持つば、その principal function が $0 \leq g \leq 1$ となることから、十分大きい自然数 n で T^n が invariant subspace を持つことは以前に指摘されていた (Clancey [3] 参照)。その他の形でも、principal function を利用した cyclic vector の存在の判定がある。

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が irreducible で $[T^*, T] = \varphi \otimes \varphi$ のとき、次は容易にわかる：

$$\varphi : \text{cyclic vector for } T \Leftrightarrow T^* \varphi \in V \{ T_z^{-1} \varphi : |z| > \|T\| \},$$

$$\varphi : \text{rationally cyclic vector for } T$$

$$\Leftrightarrow T^* \varphi \in V \{ T_z^{-1} \varphi : z \notin \sigma(T) \}.$$

この条件と global local resolvent を合せて考えることにより例えば、

$$g = \chi_E, \quad E \text{ は closed set of finite perimeter}$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ は rationally cyclic for } T$$

等のことを導くことが出来る。(Clancey [5])

REFERENCES

1. Carey, R. W. and Pincus, J. D.: Construction of seminormal operators with prescribed mosaic, *Indiana Univ. Math. J.*, 23 (1974), 1155-1165.
2. Carey, R. W. and Pincus, J. D.: Mosaics, principal functions and mean motion in von Neumann algebras, *Acta Math.*, 138 (1977), 153-218.
3. Clancey, K.: Seminormal operators, Springer Verlag, Lecture Notes in Math., No. 742, 1979.
4. Clancey, K.: Toeplitz models for operators with one dimensional self-commutators, *Operator Theory: Advances Appl.*, Vol. 11, pp. 81-107, Birkhäuser Verlag, 1983.
5. Clancey, K.: The Cauchy transform of the principal function associated with a non-normal operator, *Indiana Univ. Math. J.*, 34 (1985), 21-32.
6. Clancey, K.: Hilbert space operators with one dimensional self-commutators, *J. Operator Theory*, 13 (1985), 265-289.
7. Clancey, K. and Wadhwa, B. L.: Local spectra of seminormal operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 280 (1983), 415-428.
8. Nakamura, Y.: Principal functions and invariant subspaces of hyponormal operators, *Hokkaido Math. J.*, 12 (1983), 1-9.
9. Putinar, M.: Hyponormal operators are subscalar, *J. Operator Theory*, 12 (1984), 385-395.

10. Xia, D.: On non-normal operators, Chinese J. Math., 3 (1963), 232-246.
11. Xia, D.: Spectral theory of hyponormal operators, Operator Theory: Advances Appl., Vol. 10, Birkhäuser Verlag, 1983.