

On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms

吉田 敬之 (京大理)

0. 以下に記すのは、1992年3月に行、た筆者の数理解析研究集会での講演(数理解析講究録810)の続篇である。その後の考察で幾つかの本質的な改良ができた。新しい結果は Theorems 3, 7 である。重複を避ける意味でなるべく簡略に結果を説明する。詳しくは[Y2](又は[Y1])を見られたい。

1. F を n 次の代数体 ($n < \infty$)、 $G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $H = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$, Ω を G/H の non-empty subset とする。 G を G/H に左から作用させたときの Ω の stabilizer を H' とする。有限次代数体 F' があり、 $H' = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')$ となる。Shimura variety の zeta 函数についての簡単な思考実験により、 H の表現から H' の表現を構成しうる筈である、という見通しが得られる (cf. [Y2] の序)。これは実際可能であって、 H の表現 σ から H' の表現 $\tau = \bigotimes_{\Omega} \text{Ind}_H^{H'} \sigma$ を得る (cf. [Y2], §1)。この操作 $\sigma \rightarrow \bigotimes_{\Omega} \text{Ind}_H^{H'} \sigma$ は誘導表現の一般化になっていて、Tensor induction と呼ぶ。

Theorem 1. E を有限次代数体, λ は E の finite place を表わすとし, $\{\sigma_\lambda\}$ を $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ の E -rational な λ -adic 表現の compatible system とする。このとき, $\{\bigotimes_{\mathbb{Q}} \text{Ind}_H^{H'} \sigma_\lambda\}$ は $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')$ の E -rational な λ -adic 表現の compatible system である。

2. M を F 上の, E を係数体とする motive とする。このとき, M の λ -adic realization $\{H_\lambda(M)\}$ から, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ の E -rational な λ -adic 表現の compatible system が得られる。Theorem 1 により $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')$ の E -rational な λ -adic 表現の compatible system が得られるが, この system がやはり motive によ, て得られているであろう, と予想される。

Conjecture 2. F' 上の E を係数体とする motive $M' = \bigotimes_{\mathbb{Q}} \text{Res}_{F/F'}(M)$ が存在し, 任意の λ について $H_\lambda(M')$ における $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')$ の表現は, $\bigotimes_{\mathbb{Q}} \text{Ind}_H^{H'} H_\lambda(M)$ と同値である。

$M \rightarrow \bigotimes_{\mathbb{Q}} \text{Res}_{F/F'}(M)$ は, F 上の motives の category から F' 上の motives の category への functor にな, ており, restriction of scalars functor の一般化にな, ている。これを tensor restriction と呼ぶ。Conjecture 2 の別の根拠として, F 上の projective variety から F' 上の projective variety を

作る操作を、Weil の restriction of scalars を一般化して定義できる (cf. [Y1], §1.9).

3. 以下 F は総実と仮定する。 J_F は F から $\mathbb{C}$ の中への同型全ての集合とし、 J_F を F の archimedean places の集合と同一視する。 B を F 上の quaternion algebra で

$$B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})^r \times \mathbb{H}^{n-r}, \quad r > 0$$

をみたすものとする。 B の split する archimedean places の集合を $\delta \subset J_F$, ramify する所を $\delta' \subset J_F$ とする。 $|\delta| = r$, $|\delta'| = n - r$. このとき B は signature (δ, δ') であると呼ぶ。

$G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}}(B^\times)$ を $B^\times$ から得られる $\mathbb{Q}$ 上の代数群とする。 π を G_A の irreducible automorphic representation とする。 π には $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ の λ -adic 表現 σ_λ が attach していると仮定する。これは π が arithmetic type のときには成立つ (cf. [C], [T]).

Theorem 3: $L(\Delta, \pi, r_1) = L(\Delta, \bigotimes_{\lambda} \text{Ind}_H^{H'} \sigma_\lambda)$ が Euler p -factor, λ/p を除いて成立つ。

ここに r_1 は G の L -group ${}^L G = \text{GL}(2, \mathbb{C})^n \rtimes \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の $2^r[F':\mathbb{Q}]$ 次元の表現である (cf. [Y2]). $L(\Delta, \pi, r_1)$ は、 G から得られる Shimura variety の zeta 関数の

essential factor として現れるものである。Theorem 3 により, Shimura variety の zeta 函数を表わす Langlands の公式 [L1] が bad factor についても成立つことが証明できる。

4. Z を G の center とし, Z_A を $F_A^\times$ と同一視する。 I_F により J_F で生成される free abelian group を表わす。

$$k = \sum_{\tau \in \delta} k(\tau) \cdot \tau, \quad \kappa = \sum_{\tau \in \delta'} \kappa(\tau) \cdot \tau \in I_F,$$

$$k(\tau) \geq 0, \quad \kappa(\tau) \geq 0$$

とおく。 $\mathcal{S}_{k,\kappa}(B)$ により, G_A 上の weight が (k, κ) の automorphic forms の成す space を表わす (cf. [Y2], §6).

$\mathcal{S}_{k,\kappa}(B) \ni f$ は, 左 $G_{\mathbb{Q}}$ 不変で $\mathbb{C}^d$, $d = \prod_{\tau \in \delta'} (\kappa(\tau) + 1)$ に値をもつ G_A 上の函数である。 $f, g \in \mathcal{S}_{k,\kappa}(B)$ に対して

$$\langle f, g \rangle = \int_{Z_{\infty+} G_{\mathbb{Q}} \backslash G_A} \overline{f(x)} g(x) dx,$$

$$\text{vol}(Z_{\infty+} G_{\mathbb{Q}} \backslash G_A) = 1$$

とおく。 ($Z_{\infty+}$ は Z_A の archimedean part Z_{∞} の単位元の連結成分を表わす。) $\mathcal{S}_{k,\kappa}(B, \mathbb{Q})$ により, $\mathbb{Q}$ -rational forms の成す subset を表わす。

χ を $\mathcal{S}_{k,\kappa}(B)$ に現れる Hecke 作用素の固有値の system とする。これは次のことを意味すると解する。 $F_A^\times$ の位数有限の Hecke 指標 $\psi = \psi(\chi)$ があり, ある $0 \neq f \in \mathcal{S}_{k,\kappa}(B)$ に対して

$$(1) \quad f|T(p) = \chi(p)f \quad \text{for almost all } p,$$

$$(2) \quad f(zx) = \gamma(z)f(x) \quad , \quad \forall z \in Z_A, \forall x \in G_A.$$

上の (1), (2) をみたす $f \in S_{k,k}(B)$ の成す subspace を $W(\chi, B)$ とかく。(χ は常に、定めた γ を伴, τ なるとする。)

$$W(\chi, B, \overline{\mathbb{Q}}) = W(\chi, B) \cap S_{k,k}(B, \overline{\mathbb{Q}})$$

とおく。 Jacquet - Langlands ([JL]) により, $W(\chi, B) \neq \{0\}$ ならば, $W(\chi, M_2(F)) \neq \{0\}$ であり, χ は $S_{m,0}(M_2(F))$

$$m(\tau) = \begin{cases} k(\tau) & , \tau \in \delta, \\ k(\tau) + 2 & , \tau \in \delta', \end{cases}$$

に現れる。

Theorem 4. $f, g, h \in W(\chi, B, \overline{\mathbb{Q}})$, $f \neq 0$ ならば
 $\langle g, h \rangle / \langle f, f \rangle \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Theorem 5. B_1, B_2 はともに signature が (δ, δ') の F 上の quaternion algebras, $f \in W(\chi, B_1, \overline{\mathbb{Q}}) \cap S_{k,k}(B_1)$, $g \in W(\chi, B_2, \overline{\mathbb{Q}}) \cap S_{k,k}(B_2)$ とする。 $k(\tau) \geq 2$, $\forall \tau \in \delta$, $f \neq 0$ ならば

$$\langle g, g \rangle / \langle f, f \rangle \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

totally real field F_1 は F の k 次 cyclic extension とする。
 χ は $S_{m,0}(M_2(F))$ に現れる Hecke 作用素の固有値の

system とする。 $m(\tau) = 1$, $\forall \tau \in J_F$ の場合を除外する。
 [L2] により, $0 \neq f \in W(\chi, M_2(F))$ の base change lift $\tilde{f}$
 が $\mathcal{A}_{\tilde{m}, 0}(M_2(F_1))$, $\tilde{m}(\tau) = m(\tau|F)$, $\tau \in J_{F_1}$ に存在する。
 $\tilde{f}$ の定める Hecke 作用素の固有値の system を $\tilde{\chi}$ とかき, χ の
 base change lift と呼ぶ。

Theorem 6. χ は $\mathcal{A}_{k, k}(B)$ に現れるとし, $0 \neq g \in W(\chi, B, \overline{\mathbb{Q}})$
 をとる。 $B_1 = B \otimes_F F_1$ とおく。このとき $0 \neq \tilde{g} \in W(\tilde{\chi}, B_1, \overline{\mathbb{Q}})$
 が存在する。さらに $k(\tau) \geq 3$, $\forall \tau \in \delta$ ならば,

$$\langle \tilde{g}, \tilde{g} \rangle / \langle g, g \rangle^l \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

χ は $\mathcal{A}_{m, 0}(M_2(F))$ に現れるとし, 任意に $\delta \subset J_F$,
 $\delta \neq \emptyset$ をとる。 χ は $\mathcal{A}_{k, k}(B)$, B は signature (δ, δ') に現
 れるとは限らない。そこで F_1 を上記の様にとり, B_1 を F_1
 上の signature が $(\tilde{\delta}, \tilde{\delta}')$ の quaternion algebra とする。ここに
 $\tilde{\delta}' = J_F \setminus \delta$, $\tilde{\delta}, \tilde{\delta}'$ は制限写像 $J_{F_1} \rightarrow J_F$ による δ, δ'
 の full inverse images を表わす。 F_1, B_1 をうまくとると
 ($l=2$ でよい), $\tilde{\chi}$ は $\mathcal{A}_{\tilde{k}, \tilde{k}}(B_1)$ に現れる。そこで
 $0 \neq \tilde{g} \in W(\tilde{\chi}, B_1, \overline{\mathbb{Q}})$ をとり,

$$Q(\chi, \delta) = \langle \tilde{g}, \tilde{g} \rangle^{1/2} \quad (\text{任意の } l \text{ 乗根})$$

とおく。Theorems 4 ~ 6 により, $m(\tau) \geq 3$, $\forall \tau \in \delta$,
 $m(\tau) \geq 2$, $\forall \tau \in J_F$ のときは, $Q(\chi, \delta) \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times$ が well

defined になることが容易にわかる。(即ち $F_1, B_1, \mathcal{Y}$ のとり方に依存しない。) これが Shimura [Sh5], [Sh6] で定義された χ の $\mathbb{Q}$ -invariant で、上の結果はその拡張になっている。

χ, χ' はそれぞれ $\mathcal{J}_{k,0}(M_2(F))$, $\mathcal{J}_{l,0}(M_2(F))$ に現れるとする。

$$D(A, \chi, \chi') = \sum_{\alpha} \chi(\alpha) \chi'(\alpha) N(\alpha)^{-A}$$

とおく。これは本質的に χ と χ' の Rankin-Selberg convolution で全平面有理型の函数を定める。

Theorem 7. $\delta, \delta' \neq \emptyset$, $J_F = \delta \cup \delta'$ (disjoint union) とする。

$k(\tau) > l(\tau)$, $k(\tau) \geq 3$, $\forall \tau \in \delta$, $k(\tau) < l(\tau)$, $l(\tau) \geq 3$,

$\forall \tau \in \delta'$ と仮定する。 $A = \sum_{\tau \in \delta} k(\tau) + \sum_{\tau \in \delta'} l(\tau)$ とおく。

$k(\tau) + l(\tau) \pmod{2}$ が τ に依存せず、 $\tau \in \mathbb{Z}$ が

$$\tau \equiv k(\tau) + l(\tau) \pmod{2},$$

$$2 \leq \frac{\tau}{2} \leq 1 + \frac{|k(\tau) - l(\tau)|}{2}, \quad \forall \tau \in J_F$$

をみたすならば

$$D\left(\frac{\tau}{2}, \chi, \chi'\right) / \pi^A Q(\chi, \delta) Q(\chi', \delta') \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

証明の point は、 F の総実 2 次拡大体 F_1 をとり、[Sh5], Theorem 5.3 と上に与えた $Q(\chi, \delta)$, $Q(\chi', \delta')$ の定義を用いることである。(実際には、3 個の 2 次拡大体を用いて、

$D(\frac{\pi}{2}, \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}')$ の関係を分析する。)

5. Conjecture 2 と Deligne の予想 [D3] により、 F 上の quaternion algebra B から得られる Shimura variety の zeta 函数の critical values の超越部分が π の巾と $\mathbb{Q}$ -invariant の積で書けることがわかる。この事実の大要は [Y2] に書いたので省略するが、[Y2] の Conjecture 4.1 (Hilbert modular form $f \in S_{k,0}(M_2(F))$ に attach した motive についての予想) の correction を書く。

(2) は不正確で

$$\begin{aligned} & H_B(R_{F/\mathbb{Q}}(M_f)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \\ &= \bigoplus_{\tau \in J_F} \left(H^{(k_0+k(\tau))/2-1, (k_0-k(\tau))/2}(R_{F/\mathbb{Q}}(M_f)) \right. \\ & \quad \left. \oplus H^{(k_0-k(\tau))/2, (k_0+k(\tau))/2-1}(R_{F/\mathbb{Q}}(M_f)) \right) \end{aligned}$$

とすべきである。[Y2] での形に書くならば、weight k を $J_F = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) / \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ から $\mathbb{Z}$ の中への mapping とみて

$$\begin{aligned} & H_{\tau,B}(M_f) \otimes_{E,\sigma} \mathbb{C} \\ &= H^{(k_0+k(\sigma^{-1}\tau))/2-1, (k_0-k(\sigma^{-1}\tau))/2}(\tau, \sigma, M_f) \\ & \quad \oplus H^{(k_0-k(\sigma^{-1}\tau))/2, (k_0+k(\sigma^{-1}\tau))/2-1}(\tau, \sigma, M_f) \end{aligned}$$

となる。([Sh2], Prop. 2.6 により k は $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ で左不変である。 $\sigma \in J_E$ の $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ への拡張を同じ大文字 σ で表わした。 $k(\sigma^{-1}\tau)$ はこの拡張のとり方に依存しない。)

さらに、 $H_{\text{DR}}(M_f)$ 上の Hodge filtration ($E \otimes_{\mathbb{Q}} F$ -modules に

よる)を定めなければ予想としても不完全であるが、これは完全に書き切れる。これと関係して、 τ -periodの定義と、それを用いた周期についての結果も、さらに精密化される。
[Y1]に詳しく書いておいた。

References

- [BL] J.-L. Brylinski et J.-P. Labesse, Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura, *Ann. Éc. Norm. Sup.* 17(1984), 361–412.
- [Bl1] D. Blasius, On the critical values of Hecke L -series, *Ann. of Math.* 124(1986), 23–63.
- [Bl2] D. Blasius, Appendix to Orloff: Critical values of certain tensor product L -functions, *Inv. Math.* 90(1987), 181–188.
- [Bo] A. Borel, Automorphic L -functions, *Proc. Symposia Pure Math.* 33(1979), part 2, 27–61.
- [BZ] I. N. Bernstein and A. V. Zelevinski, Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-archimedean field, *Russian Math. Surveys* 31:3(1976), 1–68.
- [C] H. Carayol, Sur les représentations l -adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, *Ann. Éc. Norm. Sup.* 19(1986), 409–468.
- [D1] P. Deligne, Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, *Publ. Math. IHES* 35(1968), 107–126.
- [D2] P. Deligne, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L , in *Modular functions of one variable II*, 501–597, *Lecture notes in Math.* 349, 1973, Springer Verlag.
- [D3] P. Deligne, Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales, *Proc. Symposia Pure Math.* 33(1979), part 2, 313–346.
- [JL] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic forms on $GL(2)$, *Lecture notes in Math.* 114, 1970, Springer Verlag.
- [K] R. E. Kottwitz, Shimura varieties and λ -adic representations, *Automorphic forms, Shimura varieties and L -functions I*, 161–209, *Perspectives in Math.* 10(1990), Academic Press.
- [L1] R. P. Langlands, On the zeta-functions of some simple Shimura varieties, *Can. J. Math.* XXXI(1979), 1121–1216.
- [L2] R. P. Langlands, Base change for $GL(2)$, *Ann. of Math. Studies No. 96*, Princeton University Press, 1980.
- [R] D. E. Rohrlich, Nonvanishing of L -functions for $GL(2)$, *Inv. Math.* 97(1989), 381–403.
- [O] M. Ohta, On the zeta function of an abelian scheme over the Shimura curve, *Japan. J. Math.* 9(1983), 1–26.

- [Se1] J.-P.Serre, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris, 1967.
- [Se2] J.-P.Serre, Abelian l -adic representations and elliptic curves, Benjamin, New York, 1968.
- [Sh1] G.Shimura, On the Fourier coefficients of modular forms of several variables, Göttingen Nachrichten (1975), Nr. 17, 1–8.
- [Sh2] G.Shimura, The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms, Duke Math. J. 45(1978), 637–679.
- [Sh3] G.Shimura, The arithmetic of certain zeta functions and automorphic forms on orthogonal groups, Ann. of Math. 111(1980), 313–375.
- [Sh4] G.Shimura, On certain zeta functions attached to two Hilbert modular forms I, II, Ann. of Math. 114(1981), 127–164, 569–607.
- [Sh5] G.Shimura, Algebraic relations between critical values of zeta functions and inner products, Amer. J. Math. 104(1983), 253–285.
- [Sh6] G.Shimura, On the critical values of certain Dirichlet series and the periods of automorphic forms, Inv. Math. 94(1988), 245–305.
- [Sh7] G.Shimura, On the fundamental periods of automorphic forms of arithmetic type, Inv. Math. 102(1990), 399–428.
- [Sh8] G.Shimura, The critical values of certain Dirichlet series attached to Hilbert modular forms, Duke Math. J. 63(1991), 557–613.
- [T] R.Taylor, On Galois representations associated to Hilbert modular forms, Inv. Math. 98(1989), 265–280.
- [VS] Variétés de Shimura et fonctions L , Publication mathématique de l'Université Paris-VII, 1979.
- [W] A.Weil, The field of definition of a variety, Amer. J. of Math. 78(1956), 509–524.
- [Y1] H.Yoshida, On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms, preprint, 1992.
- [Y2] 吉田敬之, 保型形式の周期について,
数理解析研究所講究録 810, 218–263.