

積分条件付反応拡散方程式の定常解の大域的構造について*

宮崎大学・工学教育研究部 辻川 亨†

Tohru Tsujikawa

Faculty of Engineering, University of Miyazaki

1 導入と背景

自然界で観察される様々なパターンについて、その形成メカニズムの解析が反応拡散方程式を用いて行われている。また、生物の集合メカニズムの解明に関して、1970年代から移流項を持つ反応拡散方程式の1つである Keller-Segel 型の方程式が扱われている。一方、サルモネラ菌などのバクテリアコロニー形成をモデル化した次のような増殖項を持つ移流反応拡散方程式の研究も行われてきた (e. g. [1], [6], [15]).

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{D} \nabla \{ \nabla u - \alpha u \nabla v \} + f(u), & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ v_t = d \Delta v + u - v, & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u_\nu(x, t) = 0, \ v_\nu(x, t) = 0, & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \geq 0, \ v(\cdot, 0) = v_0 \geq 0, & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とする。増殖項 $f(u)$ が無い場合 Keller-Segel 型の方程式となり、解の爆発などの興味ある問題について多くの研究がある。一方、増殖項のある問題については、移流不安定化により時間-空間に関する動的なパターンの存在が数値的に知られている (e. g. [5], [7], [2]). このようなパターンの出現メカニズムを解明するために定常解の存在及びその安定性を含めた解の大域的構造を調べることは重要な問題である。しかし、一般的にパラメータ依存の大域的解構造を求めることは難しい問題である。勿論、分岐理論、写像度理論などにより局所的な空間非一様定常解の存在は知られている (e. g. [12], [14], [3]). ここでは典型的な増殖項の1つである双安定系 $f(u) = u(1-u)(u-a)$ ($0 < a < 1$) を採用した反射境界条件の下で (1) の定常問題

$$\begin{cases} \mathcal{D} \nabla \{ \nabla u - \alpha u \nabla v \} + f(u) = 0, & x \in \Omega, \\ d \Delta v + u - v = 0, & x \in \Omega, \\ u \geq 0, \ v \geq 0, & x \in \Omega, \\ u_\nu(x) = v_\nu(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

*久藤 衡介 (電気通信大学) と出原 浩史 (宮崎大学) との共同研究に基づく。

†e-mail address: tsujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

を扱う.

ここでは大域的解構造を求めるための第一段階として, ある種の極限形を考察する. すなわち, パラメータ D を無限大にした場合, Shadow System と呼ばれている次の方程式系が形式的に得られる.

$$\begin{cases} \nabla\{\nabla u - \alpha u \nabla v\} = 0, & x \in \Omega, \\ d\Delta v + u - v = 0, & x \in \Omega, \\ u \geq 0, v \geq 0, & x \in \Omega, \\ u_\nu(x) = v_\nu(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

そして

$$\int_{\Omega} f(u) dx = 0. \quad (4)$$

2つの方程式系の関係について, 次の定理が成り立つ.

定理 1. [13] ($N \leq 3$) $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \infty$ を満たす任意の正の数数列 $\{D_n\}$ に対して, $D = D_n$ としたとき (2) の解を (u_n, v_n) とする. このとき, $\{D_n\}$ のある部分列 $\{D_{n'}\}$ と (3), (4) の解 (u_∞, v_∞) が存在し, かつ

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} (u_{n'}, v_{n'}) = (u_\infty, v_\infty) \quad \text{in } C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}) \quad (5)$$

が成り立つ.

この定理を証明するためには次の補題が必要となる.

補題 2. 任意の正定数 A に対して, D, d に依存しない次の条件を満たす正定数 C が存在する. 任意の $D, d > A$ に対して, (2) の解 $(u(x), v(x))$ は

$$\|u\|_{W^{2,6}(\Omega)} < C, \quad \|v\|_{W^{2,6}(\Omega)} < C \quad (6)$$

を満たす.

証明 (2) の正值解 $u(x)$ は (4) を満たすので, $\|u\|_{L^3(\Omega)} \leq (1+a)|\Omega|^{\frac{1}{3}}, \|u\|_{L^1(\Omega)} \leq (1+a)|\Omega|$ が成り立つ. これにより, $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ 及び $\|v\|_{H^2(\Omega)}$ の一様評価も得られる. また, (2) の第 1 式は第 2 式を用いて

$$\Delta u - \alpha \nabla u \nabla v - \frac{\alpha}{d} u(v-u) + \frac{1}{D} f(u) = 0 \quad (7)$$

と変形できるので, 楕円型方程式のア・プリオリ評価により $\|u\|_{H^2(\Omega)}$ の一様評価が得られる. したがって, [13] と同様にして補題が証明される. $\square$

定理 1 の証明は [13] の中で用いた手続きと同様にして証明できる. したがって, 十分大きな D に対して, (2) の定常解の解構造を解明するためには (3), (4) を解析すれば十分であることがわかる.

2 Shadow Systemの定常解

ここでは、空間次元が1の場合、すなわち $\Omega = (0, 1)$ を扱う。(3)の第1式から、 u は正の任意定数 E を用いて $u = Ee^{\alpha v}$ と表示される。したがって、 $g(v, E) = Ee^{\alpha v} - v$ とするとき、(3), (4) は次のような Allen-Cahn 型方程式に書き換えられる。

$$\begin{cases} dv_{xx} + g(v, E) = 0, & x \in (0, 1), \\ v_x(0) = v_x(1) = 0, \\ v \geq 0, & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (8)$$

そして

$$\int_0^1 f(Ee^{\alpha v}) dx = 0. \quad (9)$$

ここで、(8), (9) の解を $(v(x, d, E), d, E)$ と表示する。また、すべての解は単調な解を用いて表示できることから、単調増加な解のみを求めれば十分である。

まず、積分条件を考慮しない境界値問題 (8) を扱う。(8) の正値定数解について次の補題が成り立つ。

補題 3. ある正定数 $\hat{E}$ が存在する。 $0 < E < \hat{E}$ に対して、(8) は2つの正値定数解 $v_*(E)$, $v^*(E)$ を持ち、 $v_*(E)$ と $v^*(E)$ は $v_*(E) < v^*(E)$ と $v_*(\hat{E}) = v^*(\hat{E})$ を満たし、それぞれ E に関して単調増加、単調減少関数である。

したがって、(8) の定常解について、分岐理論により次の補題が成り立つ (e. g. [8], [9], [10]).

補題 4. $0 < E < \hat{E}$ に対して、 $\lim_{E \rightarrow 0} d^*(E) = \infty$, $\lim_{E \rightarrow \hat{E}} d^*(E) = 0$ を満たす単調減少関数 $d^*(d)$ が存在する。このとき、 $0 < E < \hat{E}$, $0 < d < d^*(E)$ に対して、(8) の解 $v(x, d, E)$ が存在して

$$\lim_{d \rightarrow d^*(E)} v(x, d, E) = v^*(E), \quad \lim_{d \rightarrow 0} v(x, d, E) = v^B(x, E) = \begin{cases} v_*(E) & 0 \leq x < 1 \\ \bar{v}(E) & x = 1 \end{cases} \quad (10)$$

が成り立つ。ここで、 $\bar{v}(E)$ は $\int_{v_*(E)}^{\bar{v}(E)} g(v, E) dv = 0$ を満たす定数である。

また、Shi ([9]) の結果を応用すれば、次の補題も成り立つ。

補題 5. $\Lambda := \{(d, E) \mid 0 < E < \hat{E}, 0 < d < d^*(E)\}$ とするとき、 $(d, E) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \Lambda$ について (8) の非定数解は存在しない。

つぎに、補題4で得られた解の中で積分条件 (9) を満たすものを求める。そこで、 d と E の関数 $h(d, E)$ を

$$h(d, E) := \int_0^1 f(Ee^{\alpha v(x, d, E)}) dx \quad (11)$$

と定義する. ここで, $v(x, d, E)$ は補題 4 で得られた解とする. したがって, 積分条件 (9) は

$$h(d, E) = 0 \quad (12)$$

となる. このとき, 関数 $h(d, E)$ に関して次の補題が成り立つ.

補題 6. $\Lambda^- := \{(d, E) \mid 0 \leq d \leq d(E), 0 < E \leq \hat{E}\}$, $\Lambda^0 := \{(d, E) \mid 0 < d \leq d(E), 0 < E \leq \hat{E}\}$ とする. このとき, 関数 $h(d, E)$ は $h(d, E) \in C(\Lambda^-) \cap C^1(\Lambda^0)$ と

$$\lim_{d \rightarrow 0} h(d, E) = f(Ee^{\alpha v^*(E)}) < 0, \quad (0 < E < E_a) \quad (13)$$

を満たす.

(8), (9) の単調増加な解全体 Γ を

$$\Gamma := \{(v(x, d, E), d, E) \mid (d, E) \in \Lambda \text{ に対して } v(x, d, E) \text{ は (8), (9) の解である}\}$$

とするとき, 定常解の存在に関する次の定理が成り立つ.

定理 7. [4] $a, 1$ に依存した 2 つの定数 $E_a, E_1 < \hat{E}$ が存在して, つぎのことが成り立つ.

(i) $1/\alpha < a, 1$ のとき, E_a, E_1 は関係式 $E_1 < E_a$ を満たし, 区間 (E_1, E_a) で定義された関数 $d(E)$ が存在して, $(v(x, d(E), E), d(E), E) \in \Gamma$ となる. その上,

$$\lim_{E \rightarrow E_1} v(x, d(E), E) = v^*(E_1), \quad \lim_{E \rightarrow E_a} v(x, d(E), E) = v^*(E_a) \quad (14)$$

が成り立つ.

(ii) $a < 1/\alpha < 1$ のとき, 区間 (E_1, E_a) 又は区間 (E_a, E_1) で定義された関数 $d(E)$ が存在して, $(v(x, d(E), E), d(E), E) \in \Gamma$ となる. その上,

$$\lim_{E \rightarrow E_1} v(x, d(E), E) = v^*(E_1), \quad \lim_{E \rightarrow E_a} v(x, d(E), E) = v^B(x, E_a) \quad (15)$$

が成り立つ.

(iii) $1/\alpha > a, 1$ のとき, E_a, E_1 は関係式 $E_a < E_1$ を満たし, 区間 (E_a, E_1) で定義された関数 $d(E)$ が存在して, $(v(x, d(E), E), d(E), E) \in \Gamma$ となる. その上,

$$\lim_{E \rightarrow E_1} v(x, d(E), E) = v^B(x, E_1), \quad \lim_{E \rightarrow E_a} v(x, d(E), E) = v^B(x, E_a) \quad (16)$$

が成り立つ.

また, (8), (9) の非定数定常解の非存在に関連した次の定理が成り立つ.

定理 8. もし非定数定常解 $v(x, d, E) \in \Gamma$ が存在すれば, 十分小さな $0 < E$ に対して関係式

$$(a+1) \cosh \frac{1}{\sqrt{d}} > -\frac{1}{\alpha} \log E \quad (17)$$

が成り立つ.

証明) 補題2の結果と $\int_{\Omega} (u(x) - v(x)) dx = 0$ より不等式 $\int_{\Omega} v(x) dx \leq (1+a)|\Omega|$ が成り立つ。したがって, [13] と同様にして定理が証明される。 $\square$

この定理により十分小さい $E > 0$ に対してある $d^+(E) > 0$ が存在し, $0 < d < d^+(E)$ に対して (8), (9) の解は存在しないことが示された。一方, (13) から α, a を固定するとき, $0 < E < E_a$ に対してある $d^-(E) > 0$ が存在して, $0 < d < d^-(E)$ ならば (8), (9) の解は存在しないことが示される。しかし, 原点近傍の (d, E) に対して, $(v(x, d, E), d, E) \in \Gamma$ となる解の非存在については証明されていない。

3 数値計算結果

定理7と8より, パラメータ α, a に依存して区間 (E_a, E_1) 又は (E_1, E_a) の E に対して解が少なくとも1つ存在することが示された。この結果から解の大域的構造に関して, 次の問題が残されている。

- 区間 (E_a, E_1) 又は (E_1, E_a) に属する E に対して, 解の一意性は成り立つか。
- 上記区間以外の E について, 解は存在するか。

これらの疑問に対して, 分岐構造を求めるソフトである AUTO を用いた数値計算結果を示す。ここで, 各図の図 (a) の曲線上の点 (d, E) に対して (8), (9) の単調増加な解が1つ対応している。また, d を分岐パラメータとして図 (b) の曲線は解 $v(x)$ の $x = 1$ での値, すなわち $v(x)$ の最大値を表している。図1, 図2-4, 図5はそれぞれ定理7の (i), (ii), (iii) に対応している。図1では2つの定数解 $v(x, d(E_a), E_a)$ と $v(x, d(E_1), E_1)$ から分岐した解が単純な解曲線で結ばれている。図2-4では解曲線は定数解 $v(x, d(E_1), E_1)$ から分岐したものと境界層をもつ特異極限解を結んでいる。また, 図5では解曲線は2つの境界層をもつ特異極限解を結んでいる。それ以外の結果をまとめておく。

- 定数解 $v(x, d(E_1), E_1)$ からの分岐はすべて超臨界型である。(図1-4)
- 区間 (E_a, E_1) 又は (E_1, E_a) に属さない E に対して, 解は存在する。(図3)
- ホップ分岐を除いて, 2次分岐は起こらない。(図1-5)
- 原点 $(d, E) = (0, 0)$ の近傍には解は存在しない。(図1-5)

4 まとめ

第1章の定理1より, $\mathcal{D} \rightarrow \infty$ の場合, 方程式系 (2) の極限方程式系として Shadow System (8), (9) を考察することが重要であることを示した。次に定理7により, パラメー

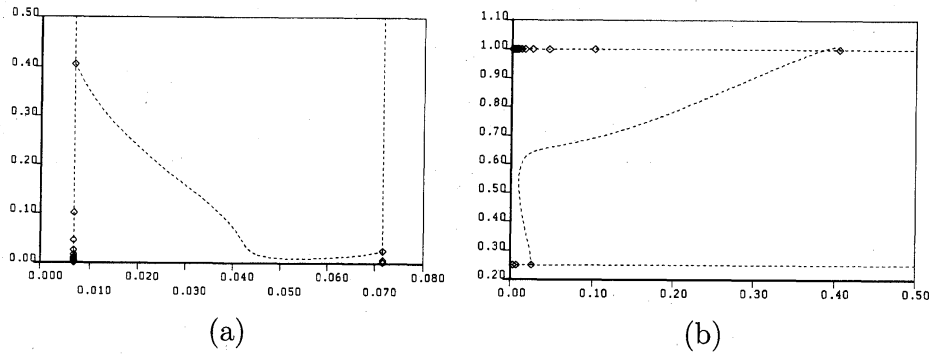


図 1: 図 (a) について横軸と縦軸はパラメータである E と d , 図 (b) についてはそれぞれ d と $v(1)$ の値に対応している. ここで, $\alpha = 5.0$ とする.

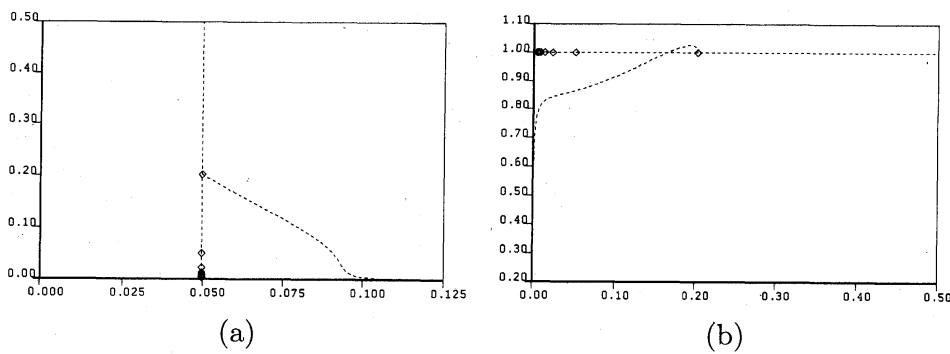


図 2: 軸は図 1 と同じとする. ここで, $\alpha = 3.0$ とする.

タ E に関して (8), (9) の単調増加な解の存在を示した. しかし, 解曲線が単純曲線で表示されることや 2 つの分岐解, 分岐解と特異極限解, 2 つの特異極限解がそれぞれ解曲線で結ばれていることなどを示していない. しかし, もし原点 $(d, E) = (0, 0)$ の近傍に解が存在しないならば, ほとんどのパラメータ a, α に対して, 解集合は単純曲線で表示できることが示される [4]. 一方, 定理 1 により Shadow System の解に収束する (2) の解の存在は示されているが, すべての Shadow System の解に収束する (2) の解が存在するかは未解決の問題である. これに関しては, 高木氏が Gierer-Meinhardt 系に対して結果を得ている [11]. また, 得られた解の安定性については議論していないが, 分岐点近傍の分岐解及び特異極限解については固有値の分布に関して結果を得ている [4].

参考文献

- [1] W. Alt and D. A. Lauffenburger, Transient behavior of a chemotaxis system modeling certain types of tissue inflammation, *J. Math. Biol.*, **24** (1987), 691-722.

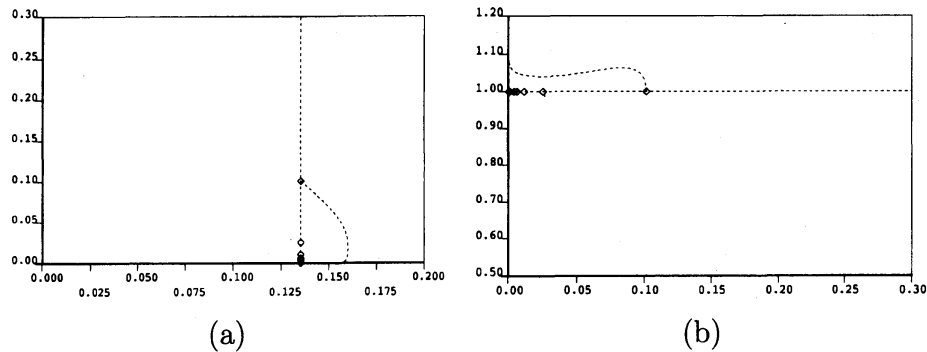


図 3: 軸は図 1 と同じとする。ここで, $\alpha = 2.0$ とする。

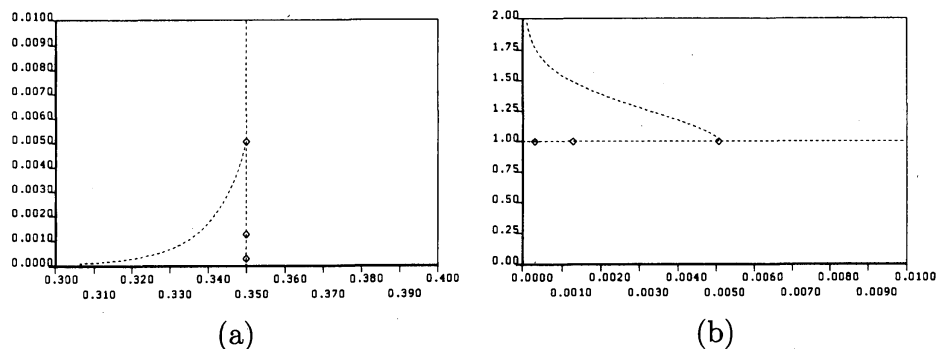


図 4: 軸は図 1 と同じとする。ここで, $\alpha = 1.05$ とする。

- [2] S.-I. Ei, H. Izuhara and M. Mimura, Spatio-temporal oscillations in the Keller-Segel system with logistic growth, *Physica D*, **277** (2014), 1-21.
- [3] C. Gai, Q. Wang and J. Yan, Qualitative analysis of stationary Keller-Segel chemotaxis models with logistic growth, preprint.
- [4] H. Izuhara, K. Kuto and T. Tsujikawa, Bifurcation structure of stationary solutions for a chemotaxis system with bistable growth, preprint.
- [5] K. Kuto, K. Osaki, T. Sakurai, T. Tsujikawa, Spatial pattern in a chemotaxis-diffusion-growth model, *Physica D*, **241** (2012), 1629-1639.
- [6] M. Mimura and T. Tsujikawa, Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth, *Physica A*, **230** (1996), 499-543.
- [7] K. J. Painter and T. Hillen, Spatio-temporal chaos in a chemotaxis model, *Physica D*, **240** (2011), 363-375.
- [8] R. Schaaf, Global solution branches of two-point boundary value problems, Lecture Notes in Mathematics, 1458, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

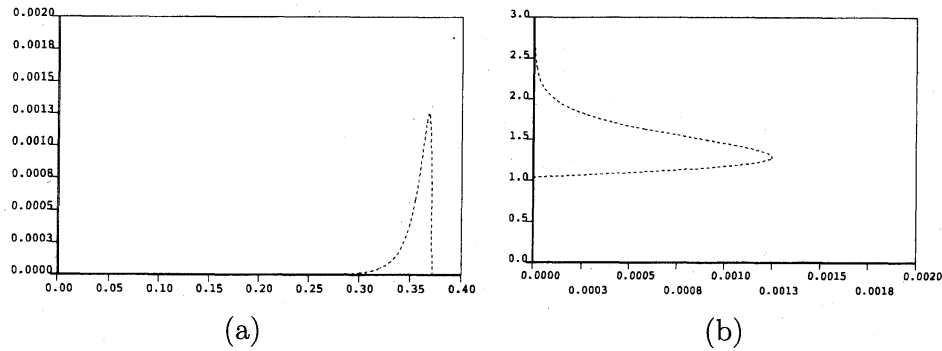


図 5: 軸は図 1 と同じとする. ここで, $\alpha = 0.99$ とする.

- [9] J. Shi, Semilinear Neumann boundary value problems on a rectangle, *Trans. AMS*, **354** (2002), 3117-3154.
- [10] J. Smaller and A. Wasserman, Global bifurcation of steady-state solutions, *J. Differential Equations*, **39** (1981), 269-290.
- [11] I. Takagi, Point-condensation for a reaction-diffusion system, *J. Differential Equations*, **61** (1986), 208-249.
- [12] J. I. Tello and M. Winkler, A chemotaxis system with logistic source, *Comm. Partial Differential Equations*, **35** (2007), 849-877.
- [13] T. Tsujikawa, Stationary problem of a simple chemotaxis-growth model, *RIMS Kokyuroku*, **1924** (2014), 55-63.
- [14] T. Tsujikawa, K. Kuto, Y. Miyamoto and H. Izuhara, Stationary solutions for some shadow system of the Keller-Segel model with logistic source, to appear in DCDS-S, 2014.
- [15] D. E. Woodward, R. Tyson, M. R. Myerscough, J. B. Murray, E. O. Budrene, B. O. Berg, Spatio-temporal patterns generated by *Salmonella typhimurium*, *Biophys.*, **68** (1995), 2181-2189.