

一階双曲系の near-field 差分解,

または人工境界法

甲南大 理 田口友康

1. まえがきと結果 R_x^n における線形双曲系の初期値問題

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^m A_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + f(x), & u = u(t, x) \text{ は } m\text{-ベクトル} \\ u(0) = u_0(x) \end{cases}$$

に対して, 有限個のメッシュ点を用いて解 $u(t, x)$ を近似するスキームを提案する。方法は R_x^n を n 次元立方体 Ω $\Omega \subset R_y^n$ に 1 対 1 に写す座標変換 $G: y = Gx$ によって (1) を Ω 上の方程式にかきかえたものに fractional-stepwise の差分法を適用するのが要旨である。

Ω 上で得られるこの差分解を $u_h(t, y)$ とし, $y \in x \in R_x^n$ にかき直したものを $u_h(t, x)$ と記すとき, (1) に対する適当な仮定と, 後に示す安定条件の下で誤差評価

$$(2) \quad \max_{t \in [0, T]} \left[\int \cdots \int_{R_x^n} \Phi(x) |u_h(t, x) - u(t, x)|^2 dx \right]^{1/2} \leq C_{T, \Phi} h^s$$

かなりたつ。ここで s は差分の accuracy の次数, $\Phi(x)$ は

$$\Phi(x) = \prod_{i=1}^n \phi(x_i), \quad \phi(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{原点の近傍} \\ O(|x_i|^{-\frac{(2s+1)s}{s-1}}), & |x_i| \rightarrow \infty \end{cases}$$

の重み関数である。ただし q は G を定義するパラメータで $q \geq 3$ とする。

(2) から直ちに

$$(2') \quad \max_{t \in [0, T]} \left[\int_D \cdots \int |u_h(t, x) - u(t, x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq C_{T,D} h^s,$$

$D \subset \mathbb{R}_x^n$ は任意の有界領域

すなわち L^2_{loc} 収束が導かれる。

さて G として原点の近傍が等長変換になる変換 E とし (応用上これが自然), その領域を D_0 とする。ここで $\Omega \in \mathbb{R}_x^n$ の n 次元立方体とみなそう。そして $u_h(t, x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}_x^n$, 自身を (1) の Ω における“数値解”とみなすと, (2') により $u_h(t, x)$ は D_0 上で $u(t, x)$ に L^2 収束する近似解である。このことから, われわれの方法は (1) に対して $\partial\Omega$ を“人工境界”とし, D_0 上の L^2 収束を保証する近似解法とみなすことができる。Lax-Wendroff 系スキームを用いた数値実験によると, 原点近傍に“振動源”をもつ問題に対して D_0 上では数値的な再現性が良好である。また $\partial\Omega$ に近い領域では outgoing wave が吸収されていく様子が

観察される ([6]).

以下の議論のために次の仮定をおく。

- (i) $A_i(x)$, $i=1, \dots, n$, は $m \times m$ 行列で, 有界で滑らか, かつ遠方で定数行列 $A_{i\infty}$ となる. そして (1) は *regularly hyperbolic* とする.
- (ii) $f = f(x)$ と $u_0 = u_0(x)$ は有界で滑らかな m ベクトルで, 無限遠でゼロになる.
- (iii) 解 $u(t, x)$ は L^2 に属し, 収束の評価のためにさしあたり, t, x それぞれにつき $S+1$ 階まで一様に有界な導関数をもつ.

2. 座標変換

$\mathbb{R}_y^n$ の n 次元立方体 $\Omega = \overbrace{\omega \times \dots \times \omega}^n$ ($\omega = (-1, 1) \in \mathbb{R}^1$) と考え, $G: \mathbb{R}_x^n \rightarrow \Omega$ なる写像として

$$y = Gx$$

$$x_i = \int_0^{y_i} \frac{dy_i}{a(y_i)}, \quad y_i \in \omega$$

$$a(\eta) \in C_0^p(\bar{\omega}), \quad p = \max(4, n+2)$$

$$0 < a(\eta) \leq 1, \quad \eta \in \omega$$

$$a(\eta) \sim (1 - |\eta|)^{\delta}, \quad \delta \geq 3.$$

(記号 $\sim$ は $\eta = \pm 1$ の近傍で, 定数倍の η のとき左辺が右辺に一致することを表すものとする。)

なるものとする。 $B_i(y) \equiv A_i(G^{-1}y)$, $g(y) \equiv f(G^{-1}y)$

$v_0(x) \equiv u_0(G^{-1}y)$, $v(t, x) \equiv u(t, G^{-1}y)$ とかけば (1) は

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{i=1}^n a_i B_i \frac{\partial v}{\partial y_i} + g \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad a_i = a(y_i)$$

が導かれる。以下 (3) の差分をとる。

3. 差分近似

$\bar{\omega} = [-1, 1] \in 2Na$ 等分した長さ h とし, $\bar{\Omega}$ にメッシュ ω 中 h の一様な差分格子系 $y(\mu)$ とする。 $y(\mu)$ は

$$y(\mu) = h \sum_{i=1}^n \mu_i e_i \quad \begin{matrix} i \text{ 成分} \\ \mu_i \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm Na\}, e_i = {}^t(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ \mu \equiv (\mu_1, \dots, \mu_n) : \text{multi-index} \end{matrix}$$

である。また時間の区間 $[0, T]$ にメッシュ ω 中 $k = \lambda h$ (λ は正のパラメータ) の格子系 $t_\nu = \nu k$, ($\nu = 0, 1, \dots$) とする。以下 $\nu, (\mu)$ を省略して, 格子系 $(t_\nu, y(\mu))$ を (t, y) のように記す。また引数の記法として, 格子系 (t, y) からの displacement がある変数のみを明示する: $t = 1$ とす:

$$\text{例) } \begin{cases} v(t, y_1, \dots, y_{i-1}, y_i+h, y_{i+1}, \dots, y_n) = v(y_i+h) \\ v(t+k, y_1, \dots, y_n) = v(t+k) \end{cases} \quad \text{など。}$$

(差分スキーム) 次の形のものを考察する.

$$(4) \begin{cases} u_n(t+k) = \mathcal{L}_h u_n(t) + k d_n(t), & y_{(\mu)} \in \Omega \\ \text{境界条件} \\ u_n(t) = 0, & y_{(\mu)} \in \partial\Omega \\ \text{初期条件} \\ u_n(0) = u_0, & y_{(\mu)} \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

ここに

$$\mathcal{L}_h = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in P} \alpha_{i_1, \dots, i_n} L_{i_1, h} \cdots L_{i_n, h}$$

$$0 \leq \alpha_{i_1, \dots, i_n} \leq 1, \quad \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in P} \alpha_{i_1, \dots, i_n} = 1$$

P は $(1, \dots, n)$ の置換の集合.

$L_{i, h}$ は $\frac{\partial u}{\partial t} = a_i B_i \frac{\partial u}{\partial y_i}$ を近似する one-step の差分近似作用素.

$L_{i, h}$ は具体的に

Scheme I (Friedrichs-Lax 型²⁾, $\bar{u}_n$ を修正したもの.)

$$\left[\begin{array}{l} L_{i, h} u_n = \bar{u}_n + \frac{\lambda}{2} a_i B_i \{ u_n(y_i + h) - u_n(y_i - h) \} \\ \text{ただし } \bar{u}_n = (1 - a_i) u_n + \frac{a_i}{2} \{ u_n(y_i + h) + u_n(y_i - h) \} \\ d_n = q \\ \alpha_{i_1, \dots, i_n} = \frac{1}{n!}, \quad (i_1, \dots, i_n) \in P. \end{array} \right.$$

Scheme II

$$\left[\begin{array}{l} L_{i,h} v_R = \text{modified Lax-Wendroff (one-dimensional)} \\ d_R = \frac{1}{2} (g + g(t+h)) + \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^n a_i B_i \{ g(y_i+h) - g(y_i-h) \} \\ \alpha_{i_1 \dots i_n} = \frac{1}{n!}, (i_1, \dots, i_n) \in P. \end{array} \right.$$

を考へる。

4. 安定条件と収束

擬差分作用素の理論 (Yamaguti-Nogi [1], Schintani-Tomoeda [3] 等) に応用する。まず $y \in \Omega$ で定義されている諸関数は $y \in R_y^n$ 上の関数にさうよゝ定義域を拡張する:

$$\left[\begin{array}{l} \hat{B}_i(y) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} B_i(y), & y \in \Omega \\ A_{i\infty}, & y \in R_y^n - \Omega \end{array} \right. \\ \hat{g}_i(y) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} g(y), & y \in \Omega \\ 0, & y \in R_y^n - \Omega \end{array} \right. \\ \hat{v}_0(y) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \hat{v}_0(y), & y \in \Omega \\ 0, & y \in R_y^n - \Omega \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\hat{a}(\eta) = \begin{cases} a(\eta), & \eta \in \omega \\ 0 & \eta \in \mathbb{R}^1 - \omega \end{cases}$$

$$\hat{a}_i(y) = \hat{a}(y_i) \times \hat{\sigma}(y')$$

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad y_i \in \omega, \quad y' = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \in R_y^{n-1}$$

$$\hat{\sigma}(y') \in C^\infty(R_y^{n-1}) \text{ は support compact であり}$$

$$\begin{cases} \text{supp } \hat{\sigma}(y') \supseteq (\bar{\omega})^{n-1}, \\ 0 \leq \hat{\sigma}(y') \leq 1, \\ \hat{\sigma}(y') = 1 \text{ for } y' \in (\bar{\omega})^{n-1} \end{cases}$$

なるもの。

以下、記号 $\wedge$ を省略する。そして (3), (4) を R_y^n 上の方程式とみなす。すると (3) の解 $v(t, y)$, (4) の解 $v_a(t, y)$ につき

$$v(t, y) \in L^2(R_y^n); \quad v(t, y) = 0, \quad y \in R_y^n - \Omega$$

$$v_a(t, y) \in L^2(R_y^n); \quad v_a(t, y) = 0, \quad y \in R_y^n - \Omega$$

とすることには注意しよう。

定理1 (安定性). Scheme I は $\lambda \leq \min_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\sup_{x \in K_x^n} \rho(A_i)}$ なら安定である。

Scheme II は $\lambda \leq \min_{1 \leq i \leq n} \frac{2}{\sup_{x \in K_x^n} \rho(A_i)}$ なら安定である。ここで $\rho(A_i)$

は A_i のスペクトル半径である。

(証明) $\|L_{i,h} v_h\| \leq (1 + O(h)) \|v_h\|$ とする条件がある:
 とを示せばよい。ところが擬差分作用素を用いる通常のやり
 方として次に定義されるような L^2 等価なノルム III・III で議論
 してよい:

$$\text{III } v \text{ III} = \sum_j \operatorname{Re}(G_{i,h} d_j v, d_j v)$$

$\{d_j^2\}$ は適当な 1 の単位分割.

$G_{i,h}$ は B_i の対角化行列 n_i から定義される正定値行
 列 $g_i = n_i^* n_i$ に付随する one-parameter family.

III・III を用いて, 定理の条件が

$$\text{III } v_h \text{ III} - \text{III } L_{i,h} v_h \text{ III} \geq -O(h) \text{III } v_h \text{ III}$$

とある λ があることを示す。Shintani-Tomoeda [3] の定理 3.4
 が適用しよ。 $L_{i,h}$ の symbol は l_i とし

$$p_i = g_i - l_i^* g_i l_i$$

が非負定値とある条件を示める。

Scheme I に対しては

$$l_i(y, \omega) = 1 - a_i(y)(1 - \cos \omega_i) + i\lambda a_i B_i \sin \omega_i,$$

よって

$$p_i = n_i^* \{ 2a_i(1 - \cos \omega_i)(1 - a_i) + a_i^2 \sin^2 \omega_i (1 - \lambda^2 d_i^* d_i) \} n_i$$

$$d_i = n_i^{-1} d_i n_i = B_i.$$

したがって定理にのべた条件で p_i は非負定値とある。

Scheme II に対しては

$$l(y, \omega) = 1 + i\lambda a_i B_i \cos \omega_i \sin \omega_i - \frac{\lambda^2}{2} a_i^2 B_i^2 \sin^2 \omega_i,$$

よ, て

$$p_i = m_i^* (\lambda a_i B_i)^2 \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{4} (a_i B_i)^2 \right\} \sin^2 \omega_i.$$

したが, て 定理に $\alpha \wedge \tau$ 条件 τ p_i は非負定値となる.

証明終り.

定理 2 (42 束性). Scheme I または Scheme II の解 $v_a(t, y)$

$\in R^n$ の定したものが $u_a(t, x)$ とかく。すなわち

$$u_a(t, x) \equiv v_a(t, Gx). \quad \text{そのとき,}$$

$S+1$ 階まで連続 τ - τ には有界な偏導関数をもつ解 $u(t, x)$

に対して (2) 式の誤差評価がよりたつ。

(証明) $\psi(\eta) \in C_0^1(\bar{\omega})$ と

$$\begin{cases} 0 < \psi(\eta) \leq 1 & \eta \in \omega \\ \psi(\eta) \sim (1 - |\eta|)^2, & |\eta| \geq 1 \end{cases}$$

のように選ぶ, しか

$$\hat{\psi}(\eta) = \begin{cases} \psi(\eta), & \eta \in \omega \\ 0, & \eta \in R^1 - \omega \end{cases}$$

によ, て R^1 に拡張する.

重み関数として

$$\Psi(y) = \prod_{i=1}^n \hat{\psi}(y_i)$$

と取る。以下、記号 $\wedge$ を省略する。

$$\begin{cases} w_n \equiv \Psi(y) v_n, & v_n \text{ は (4) の解} \\ w \equiv \Psi(y) v, & v \text{ は (3) の解} \end{cases}$$

とおき、 w_n のみたす式を導く。(4) の両辺に Ψ を乗けると

$$w_n(t+k) = \Psi \mathcal{L}_n v_n + k \Psi d_n$$

となる。ここで、Scheme I, II について

$$(5) \quad \begin{cases} \Psi \mathcal{L}_n v_n \\ = \mathcal{L}_n w_n + k \mathcal{M}_n w_n + k E_n v_n \\ \|\mathcal{M}_n w_n\| \leq O(1) \|w_n\| \\ \|E_n v_n\| \leq O(h^{8+\lambda-1}) \|v_n\| \end{cases}$$

がなりたつ。(証明は後述。) また w について

$$v(t+k) - \mathcal{L}_n v - g = k h^\lambda \tau$$

(右辺は truncation term) がなりたつから、

$w_n - w$ を e_n とおいて

$$\begin{aligned} e_n(t+k) &= \mathcal{L}_n e_n + k \mathcal{M}_n e_n + k E_n (v_n - v) \\ &\quad - k h^\lambda \tau. \end{aligned}$$

が $\frac{1}{4}$ のける。よって

$$(6) \quad \|e_n(t+k)\| \leq (1+O(h))\|e_n\| + kO(h^{q+r-1})\|v_n-v\| \\ + k h^q \sup |\Psi r|^2 |\Omega|.$$

$D_t^\sigma u, D_x^\sigma u$ ($0 \leq s+1$) が一様に有界であるとき, Ψr は

$$\begin{cases} r \geq q, & \text{Scheme I } (s=1) \\ r \geq 2q, & \text{Scheme II } (s=2) \end{cases}$$

は一様に有界となる。以下を以下に

$$\begin{aligned} \Psi r &\sim a_i \psi_i \frac{\partial^{s+1} v}{\partial y_i^{s+1}} \\ &= a_i \psi_i \left(\frac{1}{a_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{s+1} u \\ &= \frac{\psi_i}{(a_i)^s} \frac{\partial^{s+1} u}{\partial x_i^{s+1}} + \dots \end{aligned}$$

だが,

$$\begin{aligned} \frac{\psi_i}{(a_i)^s} &\sim (|x|+c)^{-\frac{r}{q-1}} (|x|+c)^{-\frac{sq}{q-1}} \\ &= (|x|+c)^{-\frac{r-sq}{q-1}} \end{aligned}$$

かなり太っ腹。 $\|v_n-v\|$ の L^2 有界性からわかる。

で, (6) に離散 Gronwall lemma を適用すれば, $q+r-1 \geq 1$

と仮定して, $\|e_n(t)\| = O(h^q)$ の拘束が得られる。こゝ

で $e_n(t, y) \in x \in \mathbb{R}_x^n$ と仮定する。

$$\|e_n(t)\|^2 = \int_{\mathbb{R}_y^n} \dots \int |\Psi(v_n-v)|^2 dy$$

$$= \int \cdots \int_{\Omega} |\psi(u_n - v)|^2 dy = \int \cdots \int_{R_x^n} \Phi |u_n - u|^2 dx$$

ただし

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \left[(\Psi(y))^2 \prod_{i=1}^n a(y_i) \right]_{y=Gx} \\ &= \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(x_i) &= \psi(y_i)^2 a(y_i) \Big|_{y_i=(Gx)_i} \\ &\sim (|x|+c)^{-\frac{2\lambda+8}{8-1}} \end{aligned}$$

∴ $\lambda = 5/8$ とおくと

$$\phi(x_i) = O(|x_i|^{-\frac{(25+1)8}{8-1}}), \text{ as } |x_i| \rightarrow \infty$$

となる。

(5) の証明. Scheme I の場合のみ述べる。

(7) $\psi_i L_{i,h} v_h$

$$= L_{i,h}(\psi_i v_h) + h M_{i,h}(\psi_i v_h) + h E_{i,h} v_h$$

$$\begin{aligned} M_{i,h}(\psi_i v_h) &= \alpha_a^+(y_i) \left\{ \frac{1}{\lambda} + B_i(y) \right\} [\psi_i v_h](y_i + h) \\ &\quad + \alpha_a^-(y_i) \left\{ \frac{1}{\lambda} - B_i(y) \right\} [\psi_i v_h](y_i - h) \\ E_{i,h} v_h &= \varepsilon_a^+(y_i) \left\{ \frac{1}{\lambda} + B_i(y) \right\} v_h(y_i + h) \\ &\quad + \varepsilon_a^-(y_i) \left\{ \frac{1}{\lambda} - B_i(y) \right\} v_h(y_i - h) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} d_h^+(y_i) &= \begin{cases} a_i(y) \frac{\psi(y_i) - \psi(y_i - h)}{h \psi(y_i + h)}, & -1 \leq y_i \leq 1 - 2h \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ e_h^+(y_i) &= \begin{cases} 0, & -1 \leq y_i \leq 1 - 2h \\ a_i(y) \{ \psi(y_i) - \psi(y_i - h) \} / h, & \text{otherwise} \end{cases} \\ \alpha_h^-(y_i), e_h^-(y_i) &\text{も同様} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{また, } & \begin{cases} |d_h^+(y_i)|_\infty < +\infty & h \rightarrow 0 \text{ とき一様に} \\ |d_h^-(y_i)|_\infty < +\infty & \end{cases} \\ & \begin{cases} |e_h^+(y_i)|_\infty = O(h^{g+n-1}) \\ |e_h^-(y_i)|_\infty = O(h^{g+n-1}). \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{よって } \|M_{i,h}(\psi_i v_h)\| = O(1) \|\psi_i v_h\|$$

$$\|E_{i,h} v_h\| = O(h^{g+n-1}) \|v_h\|$$

よって,

$$\Psi_{\mathcal{L}_h} v_h = \left(\prod_{i=1}^n \psi_i \right) \sum_p \alpha_{i_1 \dots i_n} L_{i_1, h} \dots L_{i_n, h} v_h$$

$$= \sum_p \alpha_{i_1 \dots i_n} (\psi_{i_1} L_{i_1, h}) (\psi_{i_2, h}) \dots (\psi_{i_n, h}) v_h$$

α の両辺に (7) をつかうと展開し, $\prod_{i=1}^n \psi_i v_h$ と v_h を整理すれば

(5) が得られる。

証明終り。

(文献)

1. M. Yamaguti and T. Nogi, An algebra of pseudo difference schemes and its application, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, 3 (1967), 151 - 166.
2. R. Vaillancourt, A strong form of Yamaguti and Nogi's stability theorems for Friedrichs' scheme, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 5 (1969), 113 - 117.
3. H. Shintani and K. Tomoeda, Stability of difference schemes for nonsymmetric linear hyperbolic systems with variable coefficients, Hiroshima Math. J., 7 (1977), 309 - 378.
4. M. Yamaguti, Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégrale singulière, Mem. Coll. Sci., Kyoto Univ., Ser A, 32 (1959), 121 - 151.
5. T. Taguti, Finite difference schemes in the near field of linear hyperbolic systems, in preparation.
6. ———, Numerical solution to the elastodynamic equation in the half plane, in preparation.