

ソリトンと、特殊関数

大阪外国語大学 言語情報 中村あきら (Akira Nakamura)
1994. 7. 26

1. はじめに

ソリトンは、はじめに、KdV 方程式や、Toda 方程式などの、空間 1 次元 + 時間 1 次元のシステムで、おもに、研究され、そののち、KP (= 2 次元 KdV) 方程式や、2 次元 Toda 方程式などの、空間 2 次元、3 次元システムへと、研究が、すすんで、いった。歴史的には、この (空間的) 多次元ソリトンの研究に、おいて、ソリトンと、特殊関数との、つよい関係が、あきらかに、なったのであった。

すなわち、円筒 (Cylindrical) KdV ソリトンは、Airy 関数で、あらわされることが (1978, Calogero and Degasperis)、また、円筒 (Cylindrical) Toda ソリトンは、Bessel 関数で、あらわされることが (1983, Nakamura)、わかった。

もちろん、そのまえにも、ソリトンと、Painleve 方程式との、密接な関係が、みつけれられていたし、その Painleve 方程式の、おおくの解が、特殊関数で、かかれることが、みつけれられていたので、その面で、ソリトンと特殊関数は、間接的には、関係することは、しられていた、ともいえる。

さて、ここでは、ソリトンの、解析方法の Hirota bilinear method を、つかって、ソリトンと、特殊関数の、関係を、さらに、しらべたい。

2. 特殊関数は、かならず、Toda-like な、bilinear 関係式を、みたす

特殊関数は、linear な、関係式で、定義される、としてよい。これらの、linear な、関係式を、くみあわせれば、bilinear な、関係式を、みちびける。まずはじめに、一般論として、特殊関数は、かならず Toda-like な、bilinear relation を、みたすことを、しめす。

そのあと、それらの、個別論を、しらべる。それについては、のちのちの、ために、できるだけ、おおくの、具体例のリストがあれば、べんりであるので、それを、こころ

みる。普通に知られている、ほとんどの特殊関数 $S_n(x)$ は、次の linear な関係式を、満たすとしてよい。

$$a_1 S_n''(x) + b_1 S_n'(x) + c_1 S_n(x) = 0, \quad (1)$$

$$a_2 S_{n+1}(x) = b_2 S_n'(x) + c_2 S_n(x), \quad (2)$$

$$a_3 S_{n-1}(x) = b_3 S_n'(x) + c_3 S_n(x). \quad (3)$$

ここで $S_n'(x) \equiv (d/dx)S_n(x)$ 、 $S_n''(x) \equiv (d/dx)^2 S_n(x)$ であり、係数 $a_1, a_2, a_3, \dots, c_3$ は、 $a_1 = a_1(n, x)$ のように、変数 n と x を、含むものである。eq. (2) x eq. (3) より

$$a_2 a_3 S_{n+1}(x) S_{n-1}(x) - b_2 b_3 S_n'(x)^2 - c_2 c_3 S_n(x)^2 - (b_2 c_3 + b_3 c_2) S_n'(x) S_n(x) = 0. \quad (4)$$

また eq. (1) x $(b_2 b_3 / a_1) S_n(x)$ より

$$b_2 b_3 S_n''(x) S_n(x) + (b_1 b_2 b_3 / a_1) S_n'(x) S_n(x) + (b_2 b_3 c_1 / a_1) S_n(x)^2 = 0. \quad (5)$$

eq. (4) + eq. (5) より、つぎの式をえる

$$a_4 [S_n''(x) S_n(x) - S_n'(x)^2] + b_4 S_n'(x) S_n(x) + c_4 S_{n+1}(x) S_{n-1}(x) + d_4 S_n(x)^2 = 0. \quad (6)$$

ただし a_4, b_4, c_4, d_4 は、変数 n と x を含む係数であり、 $a_4 = b_2 b_3$ 、 $b_4 = b_1 b_2 b_3 / a_1 - b_2 c_3 - b_3 c_2$ 、 $c_4 = a_2 a_3$ 、 $d_4 = b_2 b_3 c_1 / a_1 - c_2 a_3$ である。eq. (6) が、特殊関数が満たす Toda-like な bilinear 関係式である。少なくとも、ほとんど、すべての特殊関数が、このようにして Toda-like bilinear relation を満たすということは、たいへんに、おもしろい発見では、ないだろうか？

つぎには、うへの議論の具体形を、さまざまなケースで調べてリストを作る。その結果としてつぎの表が得られる。

ただし、以下で、つかわれる、記号、 D_x は、Hirota bilinear derivatives であり、任意の関数 $a(x)$ と $b(x)$ にたいして、つぎで定義される、

$$D_x^n a(x) \cdot b(x) \equiv (\partial/\partial x - \partial/\partial x')^n a(x) b(x')_{x'=x}. \quad (7)$$

Airy function, $Ai(x)$ Linear relations $[(d/dx)^2 - x]Ai(x) = 0,$ Bilinear relations $[D_x^4 - 4xD_x^2 + 2(d/dx)]Ai(x) \cdot Ai(x) = 0,$
Bessel function, $J_n(x)$ Linear relations $[(d/dx)^2 + (1/x)(d/dx) + (1 - n^2/x^2)]J_n(x) = 0,$ $J_{n+1}(x) = -(d/dx)J_n(x) + (n/x)J_n(x),$ $J_{n-1}(x) = +(d/dx)J_n(x) + (n/x)J_n(x),$ Bilinear relations $[D_x^2 + (1/x)(d/dx)]J_n(x) \cdot J_n(x) + 2[-J_{n+1}(x) \cdot J_{n-1}(x) + J_n(x)^2] = 0,$
Legendre function, $P_n(x)$ Linear relations $[(x^2 - 1)(d/dx)^2 + 2x(d/dx) - n(n+1)]P_n(x) = 0,$ $(n+1)P_{n+1}(x) = (x^2 - 1)(d/dx)P_n(x) + (n+1)xP_n(x),$ $nP_{n-1}(x) = -(x^2 - 1)(d/dx)P_n(x) + nxP_n(x),$ Bilinear relations $[(x^2 - 1)^2 D_x^2 + x(x^2 - 1)(d/dx)]P_n(x) \cdot P_n(x) + 2n(n+1)[-P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) + P_n(x)^2] = 0,$
Associated Legendre function, $P_N^n(x)$ Linear relations $[(x^2 - 1)(d/dx)^2 + 2x(d/dx) + [-N(N+1) + n^2/(1-x^2)]]P_N^n(x) = 0,$ $\sqrt{x^2 - 1}P_N^{n+1}(x) = (x^2 - 1)(d/dx)P_N^n(x) - nxP_N^n(x),$ $(N+n)(N-n+1)\sqrt{x^2 - 1}P_N^{n-1}(x) = (x^2 - 1)(d/dx)P_N^n(x) + nxP_N^n(x),$ Bilinear relations $[(1-x^2)D_x^2 - 2x(d/dx)]P_N^n(x) \cdot P_N^n(x) - 2(N+n)(N+1-n)P_N^{n+1}(x)P_N^{n-1}(x) + 2(N^2 + N - n^2)P_N^n(x)^2 = 0,$

Hermite function, $H_n(x)$

Linear relations

$$\begin{aligned} [(d/dx)^2 - x(d/dx) + n]H_n(x) &= 0, \\ nH_{n-1}(x) &= (d/dx)H_n(x), \\ H_{n+1}(x) &= xH_n(x) - (d/dx)H_n(x), \end{aligned}$$

Bilinear relations

$$D_x^2 H_n(x) \cdot H_n(x) + 2n[-H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) + H_n(x)^2] = 0,$$

Tchebycheff function, $T_n(x)$

Linear relations

$$\begin{aligned} [(1-x^2)(d/dx)^2 - x(d/dx) + n^2]T_n(x) &= 0, \\ nT_{n-1}(x) &= +(1-x^2)(d/dx)T_n(x) + nxT_n(x), \\ nT_{n+1}(x) &= -(1-x^2)(d/dx)T_n(x) + nxT_n(x), \end{aligned}$$

Bilinear relations

$$[(x^2-1)^2 D_x^2 + x(x^2-1)(d/dx)]T_n(x) \cdot T_n(x) + 2n^2[-T_{n+1}(x)T_{n-1}(x) + T_n(x)^2] = 0,$$

Gauss hyper geometric function, $F(a, b; c; x)$

Linear relations

$$\begin{aligned} [x(1-x)(d/dx)^2 + [c - (a+b+1)x](d/dx) - ab]F(a, b; c; x) &= 0, \\ ax^{a-1}F(a+1, b; c; x) &= (d/dx)[x^a F(a, b; c; x)], \\ (c-a)x^{c-a-1}(1-x)^{a+b-c-1}F(a-1, b; c; x) &= (d/dx)[x^{c-a}(1-x)^{a+b-c}F(a, b; c; x)], \end{aligned}$$

Bilinear relations

$$\begin{aligned} [x^2(1-x)D_x^2 - x^2(d/dx)]F(a, b; c; x) \cdot F(a, b; c; x) \\ - a(a-c)[F(a+1, b; c; x)F(a-1, b; c; x) - F(a, b; c; x)^2] = 0, \end{aligned}$$

Generalized Laguerre function, $L_N^n(x)$

Linear relations

$$\begin{aligned} [x(d/dx)^2 + (n+1-x)(d/dx) + N]L_N^n(x) &= 0, \\ L_N^{n+1}(x) &= -(d/dx)L_N^n(x) + L_N^n(x), \\ (N+n)L_N^{n-1}(x) &= x(d/dx)L_N^n(x) + nL_N^n(x), \end{aligned}$$

Bilinear relation

$$[xD_x^2 + (d/dx)]L_N^n(x) \cdot L_N^n(x) - 2(N+n)[L_N^{n+1}(x)L_N^{n-1}(x) - L_N^n(x)^2] = 0.$$

3. Toda 方程式の、もっとも一般的な、bilinear form

つぎのような Toda 方程式を、かんがえる。

$$\Delta \log V(n, x, y, z) - V(n+1, x, y, z) + 2V(n, x, y, z) - V(n-1, x, y, z) = 0, \quad (8)$$

$$\Delta \equiv (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2 + (\partial/\partial z)^2 \equiv (\partial/\partial \rho)^2 + (1/\rho)(\partial/\partial \rho) + (\partial/\partial z)^2, \quad (9)$$

$$\equiv (\partial/\partial r)^2 + (2/r)(\partial/\partial r) + (1/r^2)[(\partial/\partial \theta)^2 + \cot \theta (\partial/\partial \theta) + (1/\sin^2 \theta)(\partial/\partial \phi)^2]. \quad (10)$$

ここで、 x, y, z は、ふつうの直交座標、 ρ, z は、円筒座標、 r, θ, ϕ は、球座標の変数である。 Hirota の bilinear method を、つかうために、変数変換を、かんがえる、

$$V(n, x, y, z) = V^0(n, x, y, z) + \Delta \log f(n, x, y, z). \quad (11)$$

ここで、 $V^0(n, x, y, z)$ は、かんたんな、Toda 方程式の解、いわゆる、バキューム解 (vacuum solution) であり、もとの Toda 方程式を、みたく、

$$\Delta \log V^0(n, x, y, z) - V^0(n+1, x, y, z) + 2V^0(n, x, y, z) - V^0(n-1, x, y, z) = 0. \quad (12)$$

eq. (11) を eq. (8) に、代入し、eq. (12) をつかうと

$$\Delta \log[V^0(n, x, y, z) + \Delta \log f(n, x, y, z)]$$

$$- \Delta \log[V^0(n, x, y, z)f(n+1, x, y, z)f(n-1, x, y, z)/f(n, x, y, z)^2] = 0. \quad (13)$$

ここで

$$\Delta \log c = 0, \quad (14)$$

をみたく "integration constant" c を、導入すると、つぎを、える、

$$V^0(n, x, y, z) + \Delta \log f(n, x, y, z) - cV^0(n, x, y, z)f(n+1, x, y, z)f(n-1, x, y, z)/f(n, x, y, z)^2 = 0, \quad (15)$$

$$f(n, x, y, z)\Delta f(n, x, y, z) - (\nabla f(n, x, y, z))^2 - cV^0(n, x, y, z)f(n+1, x, y, z)f(n-1, x, y, z)$$

$$+ V^0(n, x, y, z)f(n, x, y, z)^2 = 0, \quad (16)$$

$$(\nabla f)^2 \equiv (\partial/\partial x f)^2 + (\partial/\partial y f)^2 + (\partial/\partial z f)^2. \quad (17)$$

この式 eq. (16) が、もっとも、一般的な bilinear Toda equation である。ところで、いままでの、Toda Molecule 方程式についての、おおくの論文では、うえの式と、ちがうかたちの、bilinear form が、つかわれているので、その関係について、みておく。いま、変数 $f^0(n, x, y, z)$ 、 $f'(n, x, y, z)$ を、関係式 $V^0(n, x, y, z) = \Delta \log f^0(n, x, y, z)$ と、

$f'(n, x, y, z) = f^0(n, x, y, z)f(n, x, y, z)$ 、によって、導入すると、いままでと、同様にして、つぎをえる、

$$f'(n, x, y, z)\Delta f'(n, x, y, z) - (\nabla f'(n, x, y, z))^2 - cf'(n+1, x, y, z)f'(n-1, x, y, z) = 0. \quad (18)$$

この式のほうが、いままで、よりおおく、つかわれてきた。しかし、いまのように、特殊関数に、注目したいときは、まえのセクションで、もとめた、特殊関数の bilinear form のかたちに、よりよく、あうのは、eq. (16) のほう、であることが、わかる。だから、われわれは、以下では、eq. (16) のほうを、つかうことにする。もし、eq. (16) を、みたす $f(n, x, y, z)$ が、えられれば、eq. (11) と eq. (15) から、Toda 方程式 eq. (8) の、解 $V(n, x, y, z)$ は、つぎとなる

$$V(n, x, y, z) = cV^0(n, x, y, z)f(n+1, x, y, z)f(n-1, x, y, z)/f(n, x, y, z)^2. \quad (19)$$

さて、eq. (16) の、かんたんな、ばあいとして、つぎのケースを、かんがえよう、

$$f(n, x, y, z) = f(n, v(x, y, z)). \quad (20)$$

ここで $v(x, y, z)$ は、のちに、きめられる、 x, y, z の未知の関数である。このような、ケースでは、eq. (16) は、つぎの、かたち、となる

$$[(\nabla v)^2 D_v^2 + (\Delta v)(\partial/\partial v)]f(n, v) \cdot f(n, v)$$

$$- 2cV^0(n, x, y, z)f(n+1, v)f(n-1, v) + 2V^0(n, x, y, z)f(n, v)^2 = 0. \quad (21)$$

4. Toda 方程式の特殊関数でかけれる、solution

いままでで、われわれは、2つの bilinear relation [I] special function bilinear relation と [II] general Toda bilinear relation を、手に入れた。ここで、もし、この2つが、おなじものに、なるならば、われわれは、Toda 方程式の特殊関数でかけれた、答を手にすることになる。それは実際にできるのである。[II] の general Toda bilinear relation の簡単化されたもの、eq.(21)、をとる。この式には、未知の（あるいは、任意性を持つ）量 V^0, c, n が、含まれる。これらを、適当にとること（matching）によって、eq.(21) を、[I] の special function bilinear relation のひとつと、おなじものと、できるのである。てきとうな matching という、ことばは、すこしアイマイさがあるが、ここでは、この点についてのこれ以上の理論的な解析は、しない。これからの研究テーマの、ひとつとして、おもしろいであろう。以下に具体例で、この matching をみてみよう。

(i) ベッセル関数 $J_n(x)$ のケース： eq.(21) において、

$$f(n) = J_n(\rho), c = 1, V^0 = 1, v = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, (\nabla v)^2 = 1, \Delta v = 1/\rho, \quad (22)$$

ととると、eq.(21) は Bessel bilinear relation と、等しくなる。よって、つぎの Toda $V(n)$ 解をえる。

$$V(n) = J_{n+1}(\rho)J_{n-1}(\rho)/J_n(\rho)^2. \quad (23)$$

(ii) エルミート関数 $H_n(x)$ のケース : eq.(21) において、

$$f(n) = H_n(x), c = 1, V^0 = n, v = x, (\nabla v)^2 = 1, \Delta v = 0, \quad (24)$$

ととると、eq.(21) は Hermite bilinear relation と、等しくなる。 よって、つぎの Toda $V(n)$ 解をえる。

$$V(n) = n H_{n+1}(x) H_{n-1}(x) / H_n(x)^2. \quad (25)$$

(iii) Gauss 超幾何関数 $F(n, a; b; c; x)$ のケース : eq.(21) において、

$$f(n) = F(n - k'', b; -k' - k''; 1 + \exp(k_1 x + k_4)), v = 1 + \exp(k_1 x + k_4), (\nabla v)^2 = k_1^2 (v - 1)^2,$$

$$\Delta v = k_1^2 (v - 1), V^0 = -k_1^2 (n + k') (n - k'') \exp(k_1 x + k_4) [1 + \exp(k_1 x + k_4)]^{-2}$$

$$= -k_1^2 (n + k') (n - k'') (v - 1) / v^2, c = 1, \quad (26)$$

ととる。 ここで、 $b, k', k'', k_1, k_4 \equiv$ arbitrary constants である。 すると、eq.(21) は Gauss hyper geometric function bilinear relation と、等しくなる。 よって、つぎの Toda $V(n)$ 解をえる。

$$V(n) = -k_1^2 (n + k') (n - k'') \exp(k_1 x + k_4) [1 + \exp(k_1 x + k_4)]^{-2}$$

$${}_x F(n + 1 - k'', b; -k' - k''; 1 + \exp(k_1 x + k_4)) F(n - 1 - k'', b; -k' - k''; 1 + \exp(k_1 x + k_4))$$

$$/F(n-k'', b; -k' - k''; 1 + \exp(k_1 x + k_4)))^2. \quad (27)$$

5. むすび

われわれは、ソリトン方程式の代表例のひとつである、Toda 方程式を例にとって、この方程式が、いろいろの特殊関数で、かけれる解をもつことを、しめた。ここでの計算は、それぞれの特殊関数について、もっとも、簡単なもの (lowest order solution) が、みちびかれた、のであり、そのうえに、さらに、ふくざつな解 (higher order solution) がありうる。

Bessel タイプの higher order solution は、Toda lattice cylindrical soliton solution として、比較的よく、研究されている。このケースでは、いわゆる、Toda cylindrical N-soliton solutions に、あたる、かなり、くわしい higher order solutions が、えられている。