

The anomalous behavior of coefficient of restitution in the oblique impact

京都大学 人間・環境学研究科 國仲 寛人¹

京都大学 理学研究科 早川 尚男²

質点と非線形ばねから構成される2次元の弾性円盤と弾性壁の斜め衝突モデルを用いて、衝突角度とはねかえり係数の関係を調べた。その結果はねかえり係数は衝突角度の上昇と共に増加して1を越え、ある角度をピークにまた減少することを確認した。更にこの結果に対し弾性論に基づく理論解析を行った。

1 Introduction

物体の衝突後の速度を求めるときに使われるパラメータとして、はねかえり係数というものがよく知られている。これは、衝突前後の速度の法線成分の比で表されるものであり、衝突速度によらない、物質の種類だけに依存する一定値であるとされている。しかし、実際にははねかえり係数は物体の衝突速度や衝突角度によって変化するパラメータである。近年 Louge らによって報告された実験 [1] は、アルミニウム酸化物の球を斜めに傾けたポリカーボネートの板の上に自由落下させ衝突角度とはねかえり係数の関係を調べたものであり、結果としてはねかえり係数が衝突角度の正接に対して線形に上昇し、ある角度を超えると1を超えるという一見奇妙な結果を得た。この報告では、この現象を数値シミュレーションによって再現し、衝突角度とはねかえり係数の関係を決定するメカニズムについて考察する。

2 数値モデル

我々の用いた衝突モデルは質点とばねによるランダム格子モデルである [2]。モデルは半径 R の円盤と高さ $2R$ 幅 $8R$ の板から構成され、それらの構成粒子はそれぞれ同じ密度になるように 800 個、4000 個をランダムに配置した (図 1)。質点はデローニー三角分割のアルゴリズムを用いて近接の 2 点同士を、以下のポテンシャルで表される非線形ばねで接続される。

$$V(x) = \frac{1}{2}k_a x^2 + \frac{1}{4}k_b x^4 \quad (1)$$

ここではね定数 k_a は円盤、板に対して各々 $k_a = 1.0 \times mc^2/R^2$ 、 $k_a = 1.0 \times 10^{-2}mc^2/R^2$ という値を用いた。また k_b に関しては円盤、板両方に対して $k_b = k_a/100$ という値を用いている (m は

¹E-mail:kuninaka@yuragi.jinkan.kyoto-u.ac.jp

²E-mail:hisao@yuragi.jinkan.kyoto-u.ac.jp

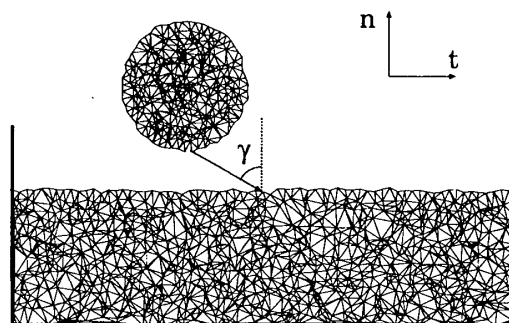


図 1: ランダム格子による円盤と板の衝突モデル。γ が衝突角度。

質点の質量、 c は 1 次元の音速)。壁の両端と底は固定境界にする。また、このモデルのポアソン比は機械的に壁を牽引して牽引力に対する垂直及び平行変位を測定することにより計算することができ、その値は $\nu = (7.50 \pm 0.11) \times 10^{-2}$ である。シミュレーションは初期速度を $|\mathbf{v}(0)| = 0.1c$ に固定して、衝突角度 γ の正接を $\tan \gamma = 1$ から $\tan \gamma = 7$ まで変化させて、それぞれの角度に対するはねかえり係数を測定した。また、質点配置のランダムネスを取り除くために質点配置を乱数で変化させた 100 パターンの円盤を用意し、各衝突角度毎に 100 データを採って平均した。数値計算は 4 次のシンプレクティック積分法を時間刻み $dt = 10^{-3} R/c$ を用いて行った。

3 結果と考察

図 2 の × 印は、シミュレーションによって得られた $\Psi_1 = \tan \gamma$ と e の関係である。我々の 2 次元シミュレーションでも、 e が 1 を越え始める角度と、 $\Psi_1 = 6.0$ あたりにピークが出るという傾向は違うものの、 e が $\tan \gamma$ の上昇につれて上昇し 1 を越え始めるという Louge らの実験と似た傾向が確認された。

ここでこの結果を説明するために、衝突で壁表面に生じる局所変形がはねかえり係数に与える影響を考えてみよう。壁に垂直な単位ベクトル $\mathbf{n}$ が、局所変形によって円盤に向かって角度 α だけ回転し、接触面上では $\mathbf{n}^\alpha$ になるとする。ここで $\mathbf{n}$ と $\mathbf{n}^\alpha$ で定義した 2 つのはねかえり係数、 $e = -(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n})/(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$ と $e^\alpha = -(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}^\alpha)/(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^\alpha)$ を導入すると、この 2 つのはねかえり係数の関係は、

$$e = (e^\alpha + \Psi_2^\alpha \tan \alpha) / (1 - \Psi_1^\alpha \tan \alpha) \quad (2)$$

となる。 Ψ_1^α と Ψ_2^α はそれぞれ $\Psi_1^\alpha = (\Psi_1 - \tan \alpha) / (1 + \Psi_1 \tan \alpha)$ と $\Psi_2^\alpha = (\Psi_1 - \tan \alpha) / (1 + \Psi_1 \tan \alpha) - 3(1 + e^\alpha)(\mu + \tan \alpha) / (1 - \mu \tan \alpha)$ で表される。ここで Ψ_2^α の表式を導くときに Walton らの剛体円盤の斜め衝突理論を用いている [3]。 $\tan \alpha$ を求めるためには、円盤の表面を何らかの関数形で表現する必要があるが、ここでは板が円盤よりもずっと軟らかいので剛体円盤が軟らかい表面と

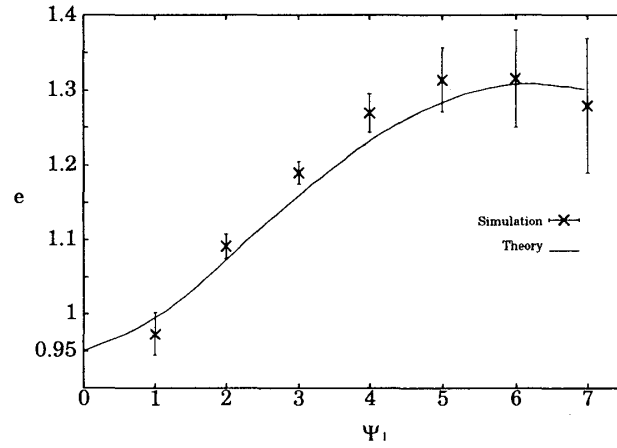


図 2: Ψ_1 とはねかえり係数 e の関係。×印：シミュレーション結果。エラーバー：標準変差。実線は式 (2) ($e^\alpha = 0.95$)。

摩擦力を受けて接触していると仮定し、接触面を $f(x) = (x-x_c)^2/2R+y_c$ という二次関数で表すことにする。接触面の両端の座標を x_a, x_b において $\tan \alpha = (f(x_b) - f(x_a))/|x_b - x_a|$ と定義すれば、弾性論の教科書 [4] によると $\tan \alpha = |x_c - x_a|(1-2\theta)/R(2-2\theta)$ 及び $\theta = (1/\pi) \arctan(1-2\nu)/(\mu(2-2\nu))$ で表すことができる (μ は表面の摩擦係数)。 $|x_c - x_a|$ の値及び各衝突角度に対する μ の値は、シミュレーションの結果から求める。 $|x_c - x_a|$ は $0.55R$ という一定値を用いた。 μ は力積を $\mathbf{J} = m(\mathbf{v}' - \mathbf{v})$ で定義し、水平及び垂直成分をそれぞれ J_t, J_n とすると、 $\mu = |J_t|/|J_n|$ で定義される。図 3 の × 印はこの定義によって計算した衝突角度と μ の関係である。これから各衝突角度における $\tan \alpha$ を計算できることになり、結果的にはねかえり係数と衝突角度の関係を知ることができる。

図 2 の実線は式 (2) を $e^\alpha = 0.95$ という値を用いて描いたものである。式 (2) はシミュレーション結果をうまくフィットできることがわかる。このように斜め衝突のはねかえり係数には、衝突角度と摩擦係数の関係が影響する。

最後に衝突角度と摩擦係数の関係を簡単なモデルで考察する。壁表面に同じ大きさの山が密度 ρ で等間隔に並んでおり、衝突時に円盤が接触した山の数で衝突後の速度が決まるとする。1 つの山に接触する度に円盤の接線方向の速度が η だけ減速すると仮定すると、接触時間に壁表面をすべる長さがわかれば、衝突後の速度を求めることができる。衝突時間を、円盤が壁に正面衝突したときの衝突時間 [5] にほぼ等しいと仮定すると、接線方向の力積は $J_t = -m\eta\rho|\mathbf{v}(0)|\sin\gamma\pi(R/c)\sqrt{\ln(4c/|\mathbf{v}(0)|\cos\gamma)}$ と計算される。また法線方向の力積ははねかえり係数 e を用いて $J_n = -m(e+1)|\mathbf{v}(0)|\cos\gamma$ と計算される。ここで、接線速度が速い場合に局所変形が崩れやすくなる効果を表現するために、 J_t は初期接線速度に比例する J'_t だけ減少するとしよう。 J'_t は比例定数 ζ を用いて $J'_t = -m\zeta|\mathbf{v}(0)|\sin\gamma$ と表現すれば、摩擦係数は $\mu = |J_t - J'_t|/J_n$ で計算され、

$$\mu = \left| \zeta \tan \gamma - \eta \rho \tan \gamma \pi \frac{R}{c} \sqrt{\ln \left(\frac{4c}{|\mathbf{v}(0)| \cos \gamma} \right)} \right| / (e + 1). \quad (3)$$

という形になる。この式において、 $\zeta = 0.397$ 、 $\eta\rho = 0.163c/R$ という値を用いると、図 3 の実線

を描くことができる。

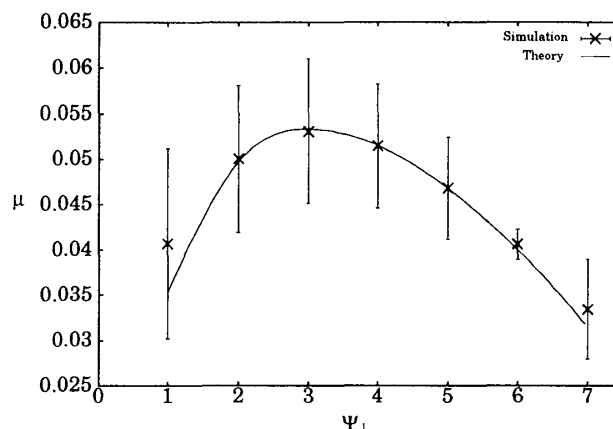


図 3: Ψ_1 と摩擦係数 μ の関係。

4 まとめ

今回報告したことは以下の通りである。

1. はねかえり係数が衝突角度によって上昇し、1 を越えるためには壁の局所的な変形が必要であり、その変形量を理論的に見積もることによって、衝突角度とはねかえり係数の関係を得ることができた。
2. 衝突角度とはねかえり係数の関係には壁表面の摩擦係数が関係しており、衝突角度と摩擦係数の関係も簡単なモデルで説明できる。

謝辞

この研究の一部は文部科学省科学研究費（Grant No. 15540393）を用いて行われた。

参考文献

- [1] M. Y. Louge and M. E. Adams, Phys. Rev. E **65** (2002), 021303.
- [2] H. Kuninaka and H. Hayakawa, cond-mat/0310058
- [3] O. R. Walton and R. L. Braun, J. Rheol. **30** (1986) 949.
- [4] L. A. Galin, *Contact problems in the theory of elasticity*, (Gostekhizdat, Moskow, 1953)
- [5] H. Hayakawa and H. Kuninaka, Chem. Eng. Sci., **57** (2002) 239.