

S 行列のミクロ解析性について. I.

京大・数理研

佐藤幹夫

§0.

S 行列の解析において macro-causality と呼ばれる台(あるいは減少度)あるいは(Fourier 変換を經由してそれと同値な)解析性との関係は最近かなりよく調べられてきている。(たとえば Iagolnitzer [1], Iagolnitzer-Stapp [17], Bros-Iagolnitzer [1], Pham [1] 等) 本講演では, Pham との討論の結果, 認識された解析性に関する定式化 ("ミクロ解析性の仮説") を §1 で述べる. 尚, この仮説は, Olive による ε -則 よりはるかに本質的なものである。(実際, 中西[1] は反例により, Feynman 積分の場合に ε -則 が満たされないことがあることを示したか, §2 で述べるように, "ミクロ解析性の仮説" は Feynman 積分に対しては常に成立する.) §2. においては, Feynman 積分に対しては, "ミクロ解析性の仮説" は成立し, 更に強く, それを特徴付ける極大過剰擬微分方程式系 (その概念については 佐藤-河合-柏原 [7] (S-K-K と以下略記す) 参照) を見出たせることを示す. 同様に Pham と講演者により提唱されている, S 行列の合成に関する "ソフトールの仮説" は S 行列と擬微分方程式系の関係については

次稿に譲りたい。

§1. ミクロ解析性の変説

粒子 i の質量を m_i とし、反応前の粒子の添数集合を I 、
反応後の粒子の添数集合を J とする。その反応を記述する
S 行列 S_{IJ} は mass shell $M_i = \{p = (p_{(0)}, p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}) \in \mathbb{R}_p^4 ;$
 $p^2 - m_i^2 = 0, p_{(0)} > 0\}$ (ここに $p^2 = p_{(0)}^2 - p_{(1)}^2 - p_{(2)}^2 - p_{(3)}^2$)
の直積 $\prod_{i \in I \cup J} M_i$ 上の超函数である。我々はこの超函数
($m_i \neq 0$ としておく)

S_{IJ} の特異性の構造を考察したい。あるいは, mass shell
上での運動量保存則 $(\sum_I p_{i,(\nu)} - \sum_J p_{j,(\nu)}) S_{IJ} = 0$

を考慮して $S_{IJ} = \delta^4(\sum_I p_i - \sum_J p_j) S_{(IJ)}$ と
 δ 函数をくり出して process (I, J) に関する散乱振幅
 $S_{(IJ)}$ を考察してもよいが, $\sum p_{i,(\nu)} - \sum p_{j,(\nu)} = 0$ ($\nu = 0, 1,$
 $2, 3$) で定められる variety が特異性を持つ時, δ 函数を
くり出すことは一般には出来ないため, むしろ S_{IJ} は
微分方程式 (実は この場合は 代数方程式)

(1) $(\sum_I p_{i,(\nu)} - \sum_J p_{j,(\nu)}) S_{IJ} = 0$ ($\nu = 0, 1, 2, 3$)
を満たす, として以下の議論を進めよう。

更にこの立場を進めて, "mass shell 上の超函数 S_{IJ} "

という捉え方の代わりに, $(\mathbb{R}^4)^{|I|+|J|}$ 上の超函数 $\tilde{S}_{IJ}$ を $S_{IJ} \prod_{i \in I \cup J} \delta(p_i^2 - m_i^2)$ によって定めて, $\tilde{S}_{IJ}$ の満たす次の方程式 (0) を常に付加して考えてもよい。

$$(0) \quad (p_i^2 - m_i^2) \tilde{S}_{IJ} = 0 \quad i \in I \cup J.$$

この時 (1) は

$$(1') \quad \left(\sum_I p_{i,(v)} - \sum_J p_{j,(v)} \right) \tilde{S}_{IJ} = 0 \quad (v=0, 1, 2, 3)$$

によりおさかえる。

さて, 我々は, $\tilde{S}_{IJ}$ の特異性を, $\tilde{S}_{IJ}$ を microfunction (註1) p.6 参照。 として考察することにより, その余接成分に合わせて考察する。ここで "余接ベクトル" は, 運動量空間 $(\mathbb{R}_p^4)^{|I|+|J|}$ のものであるから, space-time ベクトルとなる。又, 通常は "函数の特異性の '高周波近似' を考える" という着眼点をとるか, これをこの場合に適すべく翻訳すれば, "十分遠く離れた状態'を考える," ということになり, macro-causality に対応した statement になる。microfunction の概念については S-K-K Chap. 1. を参照。

尚, §0. で我々は S 行列を擬微分方程式系の観点から考察するのを最終目標とする, と言ったが, 擬微分方程式から S 行列の特異性を如何に支配するかは 次の定理により明らかにされる。(通常 "佐藤の基本定理" と呼ばれる。)

定理 (S-K-K Chap. II. Th. 2.1.1) 今 u, f を多様体 M 上の microfunctions, $P(\alpha, D)$ を 擬微分作用素 とし,

$Pu = f$ が満たされていると

$$\text{Supp } u \subset \{(\alpha, \frac{1}{i}\gamma) \in iS^*M; p_m(\alpha, \frac{1}{i}\gamma) = 0\} \cup \text{Supp } f$$

が成り立つ。ここに $p_m(\alpha, \gamma)$ は $P(\alpha, D)$ の 主要表象, $S^*M = T^*M - M/\mathbb{R}^+$ は M の 余接球バンドル。(P 及び u, f は iS^*M 上 局所的に 定義される 対象であることを 注意しておく。)

この定理により, 大雑把に言えば, $\left. \begin{array}{l} \text{microfunction} \\ u \end{array} \right\}$ が “独立な” d 個の 擬微分方程式 $P_j(\alpha, D)u = 0$ ($j=1, \dots, d$) を満たせば, u の 台は iS^*M 内の 余次元 d の 部分多様体に含まれてしまうことが判る。更に, この多様体は S^*M の 接触多様体の構造と関係した 特殊な性質 (involutory submanifold) を持っていることも知られている。そのような幾何学的性質がどのように 擬微分方程式の 解を支配するかを (generic には) 説明したのが S-K-K (Chap. II 及び Chap. III) である。

時に我々が 今必要とするのは, そのような方程式系の 内で 最も “強い” (即ち d の 大きい, 実際 それは 高々 $\dim M$ で

あることが知られている) 物, 既に 極大過剰決定系である。
 極大過剰決定系の最も著しい特徴はその解空間が有限次元になってしまうことである。従って 標語的には,

"極大過剰決定系" = "函数"

と言えよう。これから, 我々が 5 行の満たす 極大過剰決定系に興味を持つ所以である。

さて, "ミクロ解析性" の仮説を述べる為に, $(p, \frac{1}{i}u)$
 $\in iS^*((\mathbb{R}_p^4)^{|I|+|J|})$ ($p = (p_i)_{i \in I \cup J}$, $u = (u_i)_{i \in I \cup J}$)
 が (ある graph G について) causal である, あるいは
 causal configuration である, という事実の定義を思い出しておこう。(たとえば Jagolmitzer [17] pp. 75-82 参照)

定義. $(p, \frac{1}{i}u) \in iS^*((\mathbb{R}_p^4)^{|I|+|J|})$ が (時空) net $\mathcal{N}$ に関して causal であるとは, Δ の向き付けられた
 線分 ℓ からなる net $\mathcal{N}$ があって, 各 ℓ に対し

実 4-ベクトル k_ℓ と 非負数 m_ℓ が 次の Landau 方程式 (L.0) ~ (L.2) を満たすように指定され得ることである。

$$(L-0) \quad k_\ell^2 - m_\ell^2 = 0, \quad k_{\ell, (0)} > 0 \quad (\ell = 1, \dots, L),$$

$$\text{eps } k_\ell \in M_\ell$$

(L-1) $\mathcal{N}$ の各頂点において 運動量保存則が成立する。

$$(L-2) \quad u_{f(l)} - u_{i(l)} = \alpha_l k_l \quad (l=1, \dots, L)$$

但し, $u_{f(l)}$ は 線分 l の 終点の 位置ベクトル,
 $u_{i(l)}$ は 線分 l の 始点の 位置ベクトル。

(勿論, この他に自明な関係式, 即ち 2つ(以上)の
 粒子が衝突する際, それ等の位置ベクトルが相等,
 というのがあるが, これは $\alpha_l = 0$ とし 関係式を増せばよい。)

注意: α_l は Feynman parametrix; (Kadan 方程式の下
 に $m_l \alpha_l = \tau_l$ とすれば, これは固有時間に相当する。)

以上の準備の下に "ミクロ解析性の仮説" は次のように
 述べられる。

① S.S. $\tilde{S}_{IS} (\subset i S^* (\mathbb{R}_p^4, |I|+|J|))$ は causal
 な点の集合に含まれる。

ここに S.S. は (超函数 S_{IS} を) microfunction
 とみての 台の意。 (i.e. singularity spectrum of $\tilde{S}_{IS}$)
 換言すれば, S 行列の特異性は, 古典的な process に対
 応している。

註 1. Microfunction の理論に慣れてみえない方の為に,
 その基本的な性質について付言しておく。

Microfunction の層 C とは, (実解析的多様体 M が

与えられたとして) iS^*M 上の層であり, 次の性質を満たす。

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{sp.} \pi_* C \rightarrow 0$$

ここで A は M 上の実解析関数の層, B は M 上の超関数の層, π は $iS^*M \rightarrow M$ への自然な写像 (i.e. $(x, \frac{1}{2}\eta) \mapsto x$), $\pi_* C$ は π による C の順像である。あるいは層 A がコホモロジカルには自明であることを用いれば, 上の^(層の)完全列は, 次のように書き直してもよい。

(切断加群の完全列に)

U を M の開集合として

$$0 \rightarrow \Gamma(U, A) \rightarrow \Gamma(U, B) \xrightarrow{sp.} \Gamma(U, \pi_* C) \rightarrow 0$$

ここで定義により

$$\Gamma(U, \pi_* C) = \Gamma(\pi^{-1}(U), C)$$

即ち, 超関数の (A を法としての) 特異性は層 C によって iS^*M 上で詳述される。

§2. Feynman 積分に対する “ミクロ解析性の仮説” の 検証

Graph G に付随した Feynman 積分 F_G の場合には、その形が具体的に知られているから、microfunction に関しての基本的事実 (積分 etc. S-K-K (Chap. 1 参照)) を用いて容易に証明が “ミクロ解析性の仮説” を満たすことを示し得る。実際 中西 [2] の記号を用いて $F_G(p)$ は次のように与えられる。

$$F_G(p) = \int \prod_{\substack{j \\ (\text{頂点})}} \delta(p_j + \sum_l [j:l] k_l) \prod_l \left(\frac{1}{k_l^2 - m_l^2 + i0} dk_l \right)_{(\text{内線})}$$

ここに $[j:l]$ は G の内線 l と頂点 j の incidence number であって ± 1 または 0 。

ここで上の被積分函数の singularity spectrum は容易に調べることが出来て、それは次の集合 S に含まれる。

$$S = \left\{ (p_j), (k_l); \frac{1}{i} ((u_j), (v_l)) \in \underbrace{\infty}_{(p_j), (k_l) \text{ に対応する余接ベクトル成分}}; ((u_j), (v_l)) \text{ は各 } j, l \right\}$$

$$p_j + \sum_l [j:l] k_l = 0 \quad (\forall j), \quad \det(k_l^2 - m_l^2) = 0$$

$$v_l = \alpha_l k_l + \sum_j [j:l] u_j \quad (v_l) \quad \alpha_l \geq 0 \quad \left. \vphantom{\sum_j [j:l] u_j} \right\}$$

ここで 助変数についての積分と singularity spectrum
 の関係 (S-K-K Chap. 1. § 2.3 Th. 2.3.1)
 により, $((p, k; \frac{1}{i}(u, v)\infty) \mapsto (p, u)$ なる写像から
 $S_{1/v=0}$ 上の固有, ^{ie} コンパクト集合の逆像はコンパクト, という
 仮定の下に) ^{読む} S.S. F_G は次の集合に含まれることが判る。

$$\{(p_j), \frac{1}{i}(u_j)\infty\}; \exists k_l, \exists d_l(\geq 0) \text{ があって}$$

$$\sum_j [j; l] u_j + d_l k_l = 0 \text{ が成立する, 即ち}$$

$$(p, \frac{1}{i}u\infty) \text{ は causal な点である。}$$

これは明らかに F_G が "ミフは解析性の仮説" を満たし
 ていることを意味している。

註 2. この条件は $\forall d_l \neq 0$ なら自明に満たされる。以下考察を

この場合 (leading case) に限定する。すなわち $d_l = 0$ に対応する reduced
 graph が closed circuit を含まなければならない。一般には, renormalization により ^{compact 化を要する行っており} 引き起さる。

以上では, Feynman 積分の特異性を "超函数の積分と
 特異性" の観点より論じたが, 実は p. 4. に触れた基本定理
 の観点から問題を論じることが可能であり, その方がより本
 質的である。(なぜなら, $P(\alpha, D_x)u=0$ なら $\text{supp } u \subset \{p_m(\alpha, \frac{1}{i}\gamma)$
 $= 0\}$ は従うが, $\text{supp } u \subset \{p_m=0\}$ だけでは u が擬微

分方程式を満たすかどうかは全く判らない。) 実際、我々は (擬) 微分方程式と“函数”の統制原理と信じていたからである。実は、その議論も Feynman 積分の場合には、擬微分方程式に関する基本的事実 (S-K-K Chap 2. §3.5, Th. 3.5.5 等) を用いれば容易に行い得て、 F_q の満たす極大過剰決定系を容易に見出させる。(勿論、そのような方程式系を見出たせば、p.4. の基本定理により S.S. F_q は容易に決定できる。但し、mass shell の内 $p_{(0)} > 0$ の例にのみ特異性があることは擬微分方程式系の情報だけでは出てこない。実際 F_q の代りに、その被積分函数と

$$\prod_j \delta(p_j + \sum_i [j; i] k_i) \prod_l \left(\frac{1}{k_l^2 - m_l^2 - i0} \right) dk_l$$

おきかえて得られる函数も同じ方程式系を満たし、その内は mass shell の内 $p_{(0)} < 0$ の例に特異性を持っている。このような ambiguity (有限次元) を取り去るには方程式系以外の付加的な情報が必要。)

今 F_q の被積分函数を Φ_q とする。まず質量も変数と思つて $\lambda_l = \frac{1}{2} m_l^2$ なる助変数を導入しよう。即ち $\Phi_q = \Phi_q(p, k, \lambda)$ と考える。又 $D_p = \left(\frac{\partial}{\partial p_{(0)}}, -\frac{\partial}{\partial p_{(1)}}, -\frac{\partial}{\partial p_{(2)}}, -\frac{\partial}{\partial p_{(3)}} \right)$ とする。この時 Φ_q は次の微分方程式系を満たすことは明らかである。

3.1) 今ここで $X_l = \sum_j [l; j] D_{p_j}$ と定めよう

$$(2') \quad k_l \Phi_G = -(D_{k_l} - X_l) D_{\lambda_l}^{-1} \Phi_G$$

と (2) は 書き換えられるから (1) と合わせて

$$(4) \quad (p_j + \sum_l [l; j] (X_l - D_{k_l}) D_{\lambda_l}^{-1}) \Phi_G = 0 \quad (\forall j)$$

さらに $F_G = \int \Phi_G dk$ であつたから 上の (4) より (b) を得る手続きにより

$$(5) \quad (p_j + \sum_l [l; j] X_l D_{\lambda_l}^{-1}) F_G = 0 \quad (\forall j)$$

より関係式が得られる。

又, (2), (3) を合わせて

$$(6) \quad ((\lambda_l D_{\lambda_l} + 1) + \frac{1}{2} k_l (D_{k_l} - X_l)) \Phi_G = 0$$

即ち, $N = \#(\text{曲線})$ とおけば,

$$(6') \quad ((\lambda_l D_{\lambda_l} + 1) + \frac{1}{2} (D_{k_l} - X_l) k_l - \frac{N}{2}) \Phi_G = 0$$

これに D_{λ_l} を作用させて (2) を用いれば

$$(6'') \quad (D_{\lambda_l} \lambda_l D_{\lambda_l} + (1 - \frac{N}{2}) D_{\lambda_l} - \frac{1}{2} (D_{k_l} - X_l)^2) \Phi_G = 0$$

従つて (4) より (5) を得たと同じ理由で

$$(7) \quad (D_{\lambda_l} \lambda_l D_{\lambda_l} + (1 - \frac{N}{2}) D_{\lambda_l} - \frac{1}{2} X_l^2) F_G = 0$$

より 微分方程式を得る。

このようにして (5), (7) という $F_q(p, \lambda)$ を特徴付ける擬微分方程式系を得ることができたが, λ_e は本来質量 $\frac{1}{2} m_e^2$ であったから, これを変数と見ることなく, 定数と見る方が望ましい。それには D_{λ_e} を消去しなければならない。それには (7) 式を

$$(7') \quad (D_{\lambda_e}^{-1} - \psi_e(X_e, \lambda_e)) F_q = 0$$

の形に書き直せばよい。

かかる (7') において X_e^2 は λ_e , D_{λ_e} とは可換故, これをあにかも定数であるかのように取り扱えば (7') の一般解 u は

$$C(X_e)(X_e^2 \lambda_e)^{\frac{\nu}{2}} Z_\nu(\sqrt{2} X_e^2 \lambda_e) \quad | \text{あることに注意しよう。} |$$

で与えられる。 ($\nu = 1 - \frac{N}{2}$) (尚 X_e は, 再び基本定理を用いて可逆で) 従って 円柱函数の不定積分により

$$D_{\lambda_e}^{-1} u = \sqrt{2} C(X_e) X_e^{\nu-1} \lambda_e^{\frac{\nu+1}{2}} Z_{\nu+1}(\sqrt{2} X_e \sqrt{\lambda_e})$$

故に

$$(7'') \quad D_{\lambda_e}^{-1} u = X_e^{-1} \lambda_e^{\frac{1}{2}} \frac{Z_{\nu+1}(\sqrt{2} X_e \sqrt{\lambda_e})}{Z_\nu(\sqrt{2} X_e \sqrt{\lambda_e})} u$$

$$= - \frac{i m_e}{\sqrt{2}} X_e^{-1} \frac{{}_2F_0\left(\frac{3}{2} + \nu, -\frac{1}{2} - \nu, \frac{1}{i m_e X_e}\right)}{{}_2F_0\left(\frac{1}{2} + \nu, \frac{1}{2} - \nu, \frac{1}{i m_e X_e}\right)} u$$

ここで Z_ν として H_ν を用いて その無限遠での漸近展開を用いたが, これは擬微分作用素としては well-defined な議論であることが判っている。(S-K-K Chap. II. §2.1等参照。註)

従って (γ'') を (5) に代入すれば求める D_{λ_ϵ} を含みぬ方程式系が得られたことになる。又, その主要部 (i.e. 0階有次の部分) の交通零点が Landau singularity を定めることは見易い。

註3. 厳密に言うと H_ν 自身が擬微分作用素として well-defined なのではないが, その quotient に現れる

${}_2F_0(\frac{3}{2}+\nu, -\frac{1}{2}-\nu, \frac{1}{ime\lambda_\epsilon})$ 等は擬微分作用素として well-defined であり, 又, その最高階 (i.e. 0階) の部分は 1 故可逆であるから, 上の $D_{\lambda_\epsilon} u$ と u の関係式は well-defined な擬微分方程式になる。

(以上 河合隆裕記)

筆記者註: 以上のノートは 佐藤先生が 1983年 9月~12月にセミナー等で話されたことを大体忠実にまとめたもののつもりですが, 筆記者自身がこの方面は勉強し始めの為思わぬ間違いをしているかも知れません。どうか その場合はよくし

御教示下さい。又、以下の文献も、筆記者加佐藤先考のお話を理解する為に参照したもののみですので、極めて客観性に欠けるものと思っております。その点も含めて御教示頂ければ幸いです。又、中西先考にはこのノートをもとめる際、いろいろ御教示も頂きました。厚くお礼申し上げます。

文 献

Bros-Jagolnitzer [1] Ann. Inst. Poincaré, 18 (1973) 147

Jagolnitzer, D. : [1] Introduction to S-matrix theory, CEN-Saclay, 1973

— - Stapp : [1] Comm. Math. Phys. 14, 15 (1969)

中西 : [1] フォレフオリント(RIMS -

[2] Graph Theory and Feynman Integrals, Gordon-Breach, 1971

Pham, F. : [1] Proc. of Nice meeting (1973. 5)

佐藤 - 河合 - 相原 : [1] Proc. Katata conf. Springer

Lecture Note No. 287. Part II.