

Fermat 型の超曲面の
対称群による商空間について

東大 理 大学院 川崎徹郎

Brieskorn 型の超曲面とは $\mathbb{C}^{n+1}$ の中の方程式

$$z_0^{a_0} + z_1^{a_1} + \cdots + z_n^{a_n} = 0$$

で定義される超曲面である。これは原点に孤立特異点を持ち、その特異点の構造は詳細に調べられている。(Brieskorn [1], Pham [3], Sakamoto [4])

特に $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = d$ の時、Fermat 型といい、この時は座標の置換によつて、 $(n+1)$ -文字の置換の作る対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ が作用する。 $\mathbb{C}^{n+1}$ の対称群による商空間は再び $\mathbb{C}^{n+1}$ であるから、Fermat 型の超曲面の対称群による商空間は $\mathbb{C}^{n+1}$ の中の超曲面と考えることができる。すぐにわかることであるが、この超曲面は原点に孤立特異点をもつ。この特異点の構造を調べてみよう。

Fermat 型の多項式は斉次であるから、 $P_n \mathbb{C}$ の超曲面と定義

する。この超曲面は特異点を持たない。そして座標の置換によって対称群が作用することもある。その商空間は特異点を持つ解析空間であるが、我々は有理ホモロジー多様体と考える。Zagier [5] による一般論から我々はその L-類を計算することができる。

§1. 予備的な注意

$(n+1)$ -変数の対称関数は $\mathbb{C}^{n+1}/\mathfrak{S}_{n+1}$ から $\mathbb{C}$ への写像と考えることができる。 σ_i を次数が i の基本対称式としよう。すると

$$\sigma: \mathbb{C}^{n+1}/\mathfrak{S}_{n+1} \xrightarrow{(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})} \mathbb{C}^{n+1}$$

は $\mathbb{C}^{n+1}/\mathfrak{S}_{n+1}$ から $\mathbb{C}^{n+1}$ への写像を定義する。

命題(1, 1). σ は解析空間の間の同型を与える。

証明. σ_i は次の公式を満たす。

$$\prod_{i=0}^n (t + z_i) = \sum_{j=0}^{n+1} \sigma_j t^{n+1-j}$$

根と係数の関係は σ が同型であることを示している。

$\mathfrak{S}_{n+1}$ は座標の置換により $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ や $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ に作用する。

$b = (b_0, \dots, b_n)$ は $(n+1)$ -個の正の整数のつくる組とする。空間 $P'(b)$ は

$$P'(b) = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim$$

$$((z_0, \dots, z_n) \sim (\lambda^{b_0} z_0, \dots, \lambda^{b_n} z_n), \lambda \in \mathbb{C}^*)$$

と定義する。

命題 (1.2). 次の同相がある。

$$S^{2n+1} / \mathcal{O}_{n+1} \cong S^{2n+1}$$

$$P_n \mathbb{C} / \mathcal{O}_{n+1} \cong P'(1, 2, \dots, n+1)$$

証明. S^{2n+1} は $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ 上の線型な $\mathbb{R}^+$ -作用による商空間と考える。すると

$$S^{2n+1} / \mathcal{O}_{n+1} = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \mathbb{R}^+) / \mathcal{O}_{n+1}$$

$$P_n \mathbb{C} / \mathcal{O}_{n+1} = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \mathbb{C}^*) / \mathcal{O}_{n+1}$$

ところが $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ 上の $\mathcal{O}_{n+1}$ -作用は線型な $\mathbb{R}^+$ -又は $\mathbb{C}^*$ -作用と交換するから

$$\begin{aligned}
 & (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / (R^+ \text{ 又は } \mathbb{C}^*)) / \mathbb{G}_{n+1} \\
 &= (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \mathbb{G}_{n+1}) / (R^+ \text{ 又は } \mathbb{C}^*)
 \end{aligned}$$

である。ところが命題(1,1)より $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \mathbb{G}_{n+1} \cong \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ 従って後の方の $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ に導入される $R^+ \text{ 又は } \mathbb{C}^*$ -作用を調べれば命題(1,2)は得られる。

整数 $d \geq 2$ に対して $V_{d,t}$ ($t \in \mathbb{C}$), $\bar{\Sigma}_d$, X_d と次の様に定義する。

$$V_{d,t} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_0^d + \dots + z_n^d = t\}$$

$$\bar{\Sigma}_d = V_{d,0} \cap S^{2n+1}$$

$$X_d = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{P}_n \mathbb{C} \mid z_0^d + \dots + z_n^d = 0\}$$

これ等の空間にはすべて $\mathbb{G}_{n+1}$ が座標の置換によって作用する。その商空間を $'$ とつけて表わす。

$$V_{d,t}' = V_{d,t} / \mathbb{G}_{n+1}, \quad \bar{\Sigma}_d' = \bar{\Sigma}_d / \mathbb{G}_{n+1}, \quad X_d' = X_d / \mathbb{G}_{n+1}$$

$V_{d,0}'$, X_d' は Newton 多項式によって定義される $\mathbb{C}^{n+1}$, $P'(b)$ の超曲面である。

§ 2. $V_{d,t}'$ について

命題 (2,1). $V_{d,0}'$ は原点以外に特異点を持たない。 $t \neq 0$ の時 $V_{d,t}'$ は特異点を持たない。

証明. 次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^{n+1} & \xrightarrow{z_0^d + \dots + z_n^d} & \mathbb{C} \\
 \downarrow \pi & & \nearrow \\
 \mathbb{C}^{n+1} / \mathfrak{S}_{n+1} & & \\
 \text{SIS} & & f_d (\text{Newton 多項式}) \\
 \mathbb{C}^{n+1} & &
 \end{array}$$

多項式函数 $z_0^d + \dots + z_n^d$ は原点のみに特異点をもつ。

σ は原点を原点に写す。従って f_d が特異点をもつとすれば原点だけである。

$t \neq 0$ のとき $V_{d,t}$ はすべて $\mathfrak{S}_{n+1}$ -作用も含めて同型である。それを V_d と表わす。 $\mathfrak{S}_{n+1}$ による商空間を V_d' と記す。

定理 (2,2). V_d' は $(d-1)$ -単体の n -切片と同じホモトピー型をもち、写像 $\pi: V_d \rightarrow V_d'$ はホモロジー群の全射

を与える。

証明。 V_d は

$$U_d = \{ z \in V_d \mid z_i^d \text{ は実数で } \geq 0 \}$$

を変位レトラクトにもつ。そして U_d は d -点の $(n+1)$ -個の結に同相である。この変位レトラクションは $\mathbb{S}_{n+1}$ の作用に関して同変である。従って

$$V_d' \simeq \mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d / \mathbb{S}_{n+1}$$

が得られる。 $(\mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d$ 上 $\mathbb{S}_{n+1}$ は因子の置換として作用する) 純粹に組合せ論的な議論により $(\Delta^{d-1})^n$ が

$\mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d / \mathbb{S}_{n+1}$ の変位レトラクトであることがわかる。

この議論でホモロジー群の対応を見れば後半が得られる。

Brieskorn 型の超曲面の研究により、各 $r = (r_0, \dots, r_n)$

$(0 < r_i < d)$ に対して $H_n(V_d)$ の元 L_r があって $\{L_r\}$

が $H_n(V_d)$ の基底を与えていることがわかる。(記号は

Zagier [5] に従った)。今 $0 < r_0 < \cdots < r_n < d$ なる r

に対して R を集合 $\{r_0, \dots, r_n\}$ とする。その時 $L'_R \in H_n(V_d')$

と $L'_R = \pi_* L_r$ ($\pi_*: H_n(V_d) \rightarrow H_n(V_d')$) で定義す

すると $\{L'_R\}$ は $H_n(V'_d)$ の基底を与えている。

定理(2.3). $H_n(V'_d)$ の交わり形式は

$$L'_R \circ L'_S = \begin{cases} (-1)^t (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & S_k - r_k \text{ のうち } t \text{ 個が } 1 \\ & \text{残りが } 0 \\ (-1)^{n-t} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & S_k - r_k \text{ のうち } t \text{ 個が } -1 \\ & \text{残りが } 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる。さらに V'_d の指数は

$$\begin{aligned} I(V'_d) &= \#\{R \mid 0 < r_0 + \dots + r_n < d \pmod{2d}\} \\ &\quad - \#\{R \mid d < r_0 + \dots + r_n < 2d \pmod{2d}\} \end{aligned}$$

で与えられる。

多項式関数 f_d の Milnor-ファイブレーション

$$\varphi' : S^{2n+1} - V'_{d,0} \xrightarrow{f_d/|f_d|} S^1$$

を考え、 $e^{2\pi i t}$ 上のファイバーを F'_t とおく。すると $F'_t \cong V'_d$ である。 φ' を $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ($t \mapsto e^{2\pi i t}$) により引き戻そう。

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{S^{2n+1} - V'_{d,0}} & \longrightarrow & S^{2n+1} - V'_{d,0} \\
 \downarrow \exp^* \varphi' & & \downarrow \varphi' \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\exp} & S'
 \end{array}$$

$\exp^* \varphi'$ は自明だから, 同型

$$\theta' : V'_d \times \mathbb{R} \longrightarrow \widetilde{S^{2n+1} - V'_{d,0}}$$

が得られる。 $\theta'_t : V'_d \rightarrow F_t$ と θ' の $V'_d \times \{t\}$ への制限とする。 f_d の Seifert 形式とは双線型写像

$$\gamma : H_n(V'_d) \otimes H_n(V'_d) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \gamma''$$

$$\begin{aligned}
 \gamma(x, y) &= L_{S^{2n+1}}(\theta_{0*} x, \theta_{\frac{1}{2}*} y) \\
 &\quad (\theta_{0*} x \text{ と } \theta_{\frac{1}{2}*} y \text{ の } S^{2n+1} \text{ の中でのまっかり数})
 \end{aligned}$$

なるもののことである。

定理 (2.4). f_d の Seifert 形式は

$$\gamma(L'_R, L'_S) = \begin{cases} (-1)^{n+t+1} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & s_k - r_k \text{ のうち } t \text{ 個が } -1 \\ & \text{残り } 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる。

注意. 孤立特異点のまわりの可微分的な構造は Seifert 形式によって完全に決定される。(Kato [2])

定理(2.3) の証明. 次の補題による。

補題. M をコンパクト $(2n)$ -次元向き付き多様体、 G を M に作用している有限群で、その作用は向きを保存し、有効であるとする。その時 $x \in H_n(M; \mathbb{Q})^G$, $y \in H_n(M; \mathbb{Q})$
 $\pi_* : H_n(M; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_n(M/G; \mathbb{Q})$ に対して

$$\pi_* x \cdot \pi_* y = \frac{1}{|G|} x \cdot y$$

が成立つ。

証明. M/G は有理ホモロジー多様体であるから、基本類 $[M/G, \omega M/G] \in H_{2n}(M/G, \omega M/G)$ があって Poincaré 双対

$$D' : H^k(M/G, \omega M/G; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_{2n-k}(M/G; \mathbb{Q})$$

を定義し、同型である。この時 $\pi_* [M, \omega M] = |G| [M/G, \omega M/G]$ だから M の双対と M/G の双対は $|G|$ -倍だけ違う。交わりは双対を通して定義されるから、上の結果が成立つ。

定理 (2.4) の証明. まづかりは Alexander 双対を通して定義されるから, 定理 (2.3) の証明と同様のことが成立つ。

§ 3. X_d' について

$\overline{V}_d$ と $V_d \cap (\text{大きな円板})$ とすると

$$V_d \cong \text{int } \overline{V}_d, \quad \partial \overline{V}_d = \Sigma_d$$

また X_d は Σ_d を自由な S' -作用で割ったものである。このことを $\mathbb{G}_{n+1}$ で割ると

$$V_d' \cong \text{int } \overline{V}_d', \quad \partial \overline{V}_d' = \Sigma_d', \quad \Sigma_d' / S' = X_d'$$

となる。但し最後の S' -作用は固定点はないが、自由ではない。 V_d' の交わりについての考察から次の命題が得られる。

命題 (3.1). Σ_d' の Betti 数は

$$\text{rank } H^i(\Sigma_d') = \begin{cases} 1 & i=0, 2n-1 \\ \text{corank } S & i=n-1, n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる。但し S は V_d' の交わり行列でその余階数は

$$\text{corank } S = \# \{ R \mid r_0 + \dots + r_n \equiv 0 \pmod{d} \}$$

で与えられる。

Σ_d 上の S' -作用は固定点をもたないから、有理係数の Gysin-系列が得られる。よく行われる完全性の議論から次の命題が得られる。

命題 (3.2). X'_d の有理コホモロジーは

$$H^*(X'_d; \mathbb{Q}) \cong H^*(P_{n-1}, \mathbb{C}) \oplus ((\text{corank } S) \cdot \mathbb{Q}, \text{ 次数} = n-1 \text{ の } \chi = 3)$$

で与えられる。(後の因子については環構造はわかっていない。)

定理 (3.3). X'_d の L-類は次の式で表わされる。

$$L(X'_d) = \frac{\tanh dx}{dx} \sum_{0 \leq \xi < \pi} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{k\xi}{\tanh k(\chi + i\xi)}$$

但し χ は X_d 上の Hopf-バンドルの Euler-類の符号を変えたもの。(写像 $X_d \rightarrow X'_d$ により $H^2(X'_d; \mathbb{Q})$ の元と考える。)

証明. $P_n \mathbb{C} / \mathbb{G}_{n+1} \cong P'(1, 2, \dots, n+1)$ で $P'(1, \dots, n+1)$ の L-類は計算されている (Zagier [5])

$$L(P'(1, 2, \dots, n+1)) = \sum_{0 \leq \zeta < \pi} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{k\zeta}{\tanh k(\zeta + i\pi)}$$

一方 X_d の $P_n \mathbb{C}$ における法ベクトルバンドルの L-類はわかっているから上の結果を得る。この時各 $\tau \in \mathbb{G}_{n+1}$ による固定点集合 $(P_n \mathbb{C})^\tau$ と X_d とが τ -正則に交わっていることと確かめる必要がある。

参考文献

1. E. Bröskan: Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten, *Inventiones Math.* 2 (1966) 1-14.
2. M. Kato: A classification of simple spinable structures on S^{2n+1} to appear in *J. Math. Soc. Japan*.
3. F. Pham: Formules de Picard-Lefschetz generalisees et ramifications integrales, *Bull. Soc. Math. France* 93 (1965) 333-367
4. K. Sakamoto: Milnor fibrings and their characteristic maps, to appear in *J. Math. Soc. Japan*.
5. D. B. Zagier: Equivariant Pontryagin classes and applications to orbit spaces, *Lec. Note in Math.* 290, Springer, 1972.