

十分性, KMS 条件, 及び相互情報量の作用素代数
による研究。

東京理科大学 大矢雅則

これは、日合文雄、塚田真両氏と筆者とによる共同研究の
概要である。

十分性の概念は、Halmos と Savage に 의해導入され、以後
統計学の分野において、非常に有力な武器のひとつとなって
来ている。この概念は、測度論的には、次のように定式化さ
れる。 $(X, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ を確率空間とすると、 σ -代数 $\mathcal{A}$ の
部分代数 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{P}$ に対して十分であるとは、任意の $A \in \mathcal{A}$
に対して、 $\mathcal{B}$ -可測函数 f_A が存在して、

$$f_A = p(A|\mathcal{B}) \quad \text{a.e. } [p] \quad \text{for } \forall p \in \mathcal{P}$$

と存在することである。ここで $p(A|\mathcal{B})$ は A の p と $\mathcal{B}$ に関する
条件付き確率である。

この十分性の概念は、1960 年頃、相関代によって、

σ -finite 且 finite なる v. N. alg. の上へ拡張された。我々は、一般の
v. N. alg. の上へこの概念を拡張し、v. N. alg. の解析に重要な
道具となってきている。KMS 状態、時間不変な状態、

Relative Entropy (相互情報量) 等と十分性の関連を考察した。

§1 十分性と状態

$\mathcal{H}$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に作用する。恒等元 I をもつ V.N. a/g. とし、 $\mathcal{M}$ は $\mathcal{H}$ の部分代数 ($\ni I$) とする。又、 $\mathcal{G}$ は $\mathcal{H}$ 上の全ての normal 状態の集合とし、 $\mathcal{S}$ は $\mathcal{G}$ の部分集合とする。

よく知られてゐる通りに、各 $\varphi \in \mathcal{G}$ に対して、所謂、

modular automorphism σ_t^φ が存在して、それに関して、 φ は $\beta = 1$ の KMS 条件を満たしてゐる。

$\mathcal{H}$ から $\mathcal{M}$ への条件付き期待値を $E_\varphi(\cdot | \mathcal{M})$ (φ に関する) と記すと、 $E_\varphi(\cdot | \mathcal{M})$ が存在する必要且十分条件は、

$\sigma_t^\varphi(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ であること (竹崎氏) によって示されてゐる。

このとき、

<定義>

(1) 各 $\varphi \in \mathcal{S}$ に対して、 $E_\varphi(\cdot | \mathcal{M})$ が存在して、すべての $A \in \mathcal{H}$ に対して、 $E(A) = E_\varphi(A | \mathcal{M})$ a.e. $[\varphi]$ とする $E(A) \in \mathcal{M}$ が存在するとき、 $\mathcal{M}$ は $\mathcal{S}$ に対して十分であるという。

(2) $\mathcal{M}$ が $\mathcal{S}$ に対して十分であり、任意の $\mathcal{S}$ に対して十分である $\mathcal{H}$ の部分 V.N. 代数が $\mathcal{M}$ を含むとき $\mathcal{M}$ を最小且十分であるという。(minimal sufficient)

状態 φ に $\delta > 0$ を dominate する。状態の集合を $\mathcal{G}(\varphi)$ で表す。可なり。

$$\mathcal{G}(\varphi) \equiv \{ \psi \in \mathcal{G} \mid \psi \leq c\varphi \text{ for some } c > 0 \}.$$

又、 $\psi \in \mathcal{G}$ が $\varphi \in \mathcal{G}$ に対して、絶対連続 (ie. $\varphi(A^*A) = 0 \Rightarrow \psi(A^*A) = 0$) であるとき、 $\psi \ll \varphi$ と表すことにする。

(Lemma 1)

$\psi \ll \varphi$ のとき、 $(\varphi, \psi \in \mathcal{G})$

$\mathcal{M}$ sufficient for $\{\varphi, \psi\} \Leftrightarrow \exists E_\varphi(\mathcal{M}), \psi = \psi \circ E_\varphi$

が容易に示す。

以下のギロンのでは、簡単のため、 $\varphi \in \mathcal{G}$ を faithful としている。このとき、任意の $\psi \in \mathcal{G}$ に対して、 $\psi \ll \varphi$ となる。

(Lemma 2)

$E_\varphi(\mathcal{M})$ が存在して、 $\psi \in \mathcal{G}(\varphi)$ が $\psi(A) = \varphi(hAh)$, $h \in \mathcal{M}_+$ 与えられるとき、

$\mathcal{M}$ sufficient for $\{\varphi, \psi\} \Leftrightarrow h \in \mathcal{M}$

(Proof)

$$(\Leftarrow): \quad \psi(A) = \varphi(hAh) = \varphi(E_\varphi(hAh|\mathcal{M}))$$

$$= \varphi(hE_\varphi(A|\mathcal{M})h) = \psi(E_\varphi(A|\mathcal{M})) \quad \forall A \in \mathcal{M}$$

従, 2. Lemma 1 より $\mathcal{M}$ は $\{\varphi, \psi\}$ に対して十分である。

($\Rightarrow$): $\psi(A) = \varphi(kAk)$, $k \in \mathcal{M}_+$, $A \in \mathcal{M}$ と表わせる。

$\mathcal{M}$ が $\{\varphi, \psi\}$ に対して十分であることが示される。

$$\psi(A) = \psi(E_p(A|\mathcal{M})) = \varphi(k E_p(A|\mathcal{M}) k)$$

$$= \varphi(E_p(kAk|\mathcal{M})) = \varphi(kAk), \quad A \in \mathcal{M}$$

$k \in \mathcal{M}_+$ の一意性より $k = k$, $\therefore k \in \mathcal{M}$ ■

7. 次のような事実が容易に示される。

(1°) $\mathcal{M}$ が $\{\varphi, \psi\}$ に対して十分であること。

$$\mathcal{M} \perp \mathcal{M}' \text{ 上 } \varphi = \psi \iff \mathcal{M} \perp \mathcal{M}' \text{ 上 } \varphi = \psi.$$

(2°) $\mathcal{M}$ が $\mathcal{S}$ に対して十分 $\Rightarrow \mathcal{M}_1(\cap \mathcal{M})$ が $\mathcal{S}_1$ に対して十分。

(3°) 仮定 (1) のように, $\varphi \in \mathcal{S}$ が faithful のとき,

$$\mathcal{M} \text{ が } \mathcal{S} \text{ に対して十分} \iff \mathcal{M} \text{ が任意の pair } \{\varphi, \psi\}$$

$$(\forall \psi \in \mathcal{S}) \text{ に対して十分.}$$

v.N.alg. $\mathcal{M}$ の center $\mathcal{Z} \equiv \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$, centralizer (φ に
関する) $\mathcal{Z}_\varphi \equiv \{A \in \mathcal{M} \mid \varphi(AB) = \varphi(BA) \quad \forall B \in \mathcal{M}\}$ と
する。

(Theorem 3)

$$\mathcal{Z}_\varphi \text{ は } \mathcal{I}(\varphi) \equiv \{\psi \in \mathcal{G} \mid \psi \circ \sigma_\varphi^p = \psi\} \text{ に対して}$$

minimal sufficient である。

(Sketch of Proof)

$$\sigma_t^\varphi(Z_\varphi) = Z_\varphi \Rightarrow \exists E_\varphi(\cdot | Z_\varphi)$$

 $\psi \in I(\varphi)$ に対して $\exists h > 0$ s.t. $h \eta Z_\varphi$ 且

$$\psi(A) = \varphi(hAh), \quad A \in \mathcal{M}.$$

$$h = \int_0^\infty \lambda d e(\lambda) \quad (\text{spectral resolution})$$

$$h_n = \int_0^n \lambda d e(\lambda) \in Z_\varphi$$

 $\lambda \rightarrow \infty$ とき $\varphi(h_n A h_n) \rightarrow \varphi(h A h)$ as $n \rightarrow \infty$ あり

$$\psi(E_\varphi(A | Z_\varphi)) = \psi(A), \quad A \in \mathcal{M} \text{ が示される.}$$

故に Z_φ は $I(\varphi)$ に対して十分である。

Z_φ の最小性の証明: $\mathcal{M} \in I(\varphi)$ に対して十分ある v.N. 部分代数とある。このとき $\varphi(h^2) = 1$ となる $h \in Z_\varphi$ に対して。

$\psi(A) \equiv \varphi(hAh)$ と ψ を定めると $\psi \in I(\varphi) \cap \mathcal{C}(\varphi)$ がわかる。

従って (Lemma 2) より $h \in \mathcal{M} \quad \therefore Z_\varphi \subset \mathcal{M} \quad \blacksquare$

(Theorem 4)

$\beta = 1$ とき σ_t^φ に關して KMS 条件を満たす状態の集合を $K(\varphi)$

とすると $\mathcal{Z}$ は $K(\varphi)$ に対して minimal sufficient である。

(Proof)

$$\sigma_t^\varphi(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} \Rightarrow \exists E_\varphi(\cdot | \mathcal{Z})$$

$\psi \in K(\varphi)$ に対して $\exists h > 0$ s.t. $h \eta \mathcal{Z}$ 且

$$\psi(A) = \varphi(hAh)$$

Theorem 3 の証明と同様に (2). $\psi(E_\varphi(A|Z)) = \psi(A)$ が示せる.

Z の最小性の証明: $\mathcal{H} \in K(\varphi)$ に対して十分大 U, N 部分代数とする. $\varphi(\mathcal{H}^2) = 1$ なる $h \in Z$ に対して.

$\psi(A) \equiv \varphi(RAh)$ と ψ を定めると. $\psi \in \mathcal{G}(\varphi)$ であり. $\varphi \in K(\varphi)$ より $\psi \in K(\varphi)$ が示せる. ■

(Theorem 5)

$\psi \in I(\varphi) \iff Z_\varphi$ は $\{\varphi, \psi\}$ に対して十分.

(Proof)

($\Rightarrow$): Theorem 3.

($\Leftarrow$): $\psi(\sigma_t^\varphi(A)) = \psi(E_\varphi(\sigma_t^\varphi(A)|Z_\varphi))$

より $\psi(\sigma_t^\varphi(E_\varphi(A|Z_\varphi))) = \psi(A) < \infty$ である. したがって

Z のとき $\psi(\sigma_t^\varphi(A)) = \psi(A)$, $A \in \mathcal{H}$. $\therefore \psi \in I(\varphi)$ ■

(Theorem 6)

$\psi \in K(\varphi) \iff Z$ は $\{\varphi, \psi\}$ に対して十分.

(Proof)

($\Rightarrow$): Theorem 4.

($\Leftarrow$): $Z \subset Z_\varphi \Rightarrow$ Theorem 5 より $\psi \in I(\varphi)$

$\Rightarrow \exists h > 0$ s.t. $h \in Z_\varphi$ 且 $\psi(A) = \varphi(RAh)$.

又. 任意の $A \in Z$ に対して $\exists \rho \in L'(Z; \varphi)$ s.t.

$$\psi(A) = \varphi(PA).$$

$\therefore \tau$. $\exists$ φ, ψ に対して $1/2 + \delta$ があることが Lemma 1 と ψ の計算の後

$$\psi(A) = \varphi(PA), \quad A \in \mathcal{K}$$

が示される。 $\therefore \mathcal{K}^2 = \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{K} \neq \mathcal{Z}$

今、 $S(R)$ は $\mathcal{K}$ の support projection である。

$$\psi(A) = \begin{cases} \varphi(RAR) & \text{on } S(R)\mathcal{K} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{故に、} \sigma_t^\psi(A) = \sigma_t^\varphi(\mathcal{K}^{2it} A \mathcal{K}^{-2it}) = \sigma_t^\varphi(A), \quad A \in \mathcal{K}$$

$$\text{よって } \psi \in K(\varphi) \quad \blacksquare$$

これらの結果から、次のよく知られた事実がわかる。

$$(a) \quad \mathcal{K} \text{ is factor} \iff K(\varphi) = \{\varphi\}$$

$$(b) \quad \sigma_t^\varphi \text{ is ergodic} \iff I(\varphi) = \{\varphi\}.$$

§2. 正定値と相互情報量 (Relative Entropy).

しばらく、 $\mathcal{K}$ を有限次元の v.N. alg. としよう。そのとき、

任意の $\varphi, \psi \in \mathcal{C}$ に対して、density matrices $\rho_\varphi, \rho_\psi \in \mathcal{K}_+$ が存在

して、 $\varphi(A) = \tau(\rho_\varphi A)$, $\psi(A) = \tau(\rho_\psi A)$ と表わす。

$\therefore \tau$ は $\mathcal{K}$ 上の trace である。

このとき、 φ に関する ψ の Relative entropy $S(\psi|\varphi)$ は、

$$S(\psi|\varphi) = \tau(P_\psi \log P_\psi - P_\psi \log P_\varphi)$$

2.5 2.4 4. ψ は φ に対して faithful のとき τ は有限である。

又、 $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$ に対して $S(\varphi|\psi)$ の τ に対する Relative Entropy は

$$S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi) = \tau(\bar{P}_\psi \log \bar{P}_\psi - \bar{P}_\psi \log \bar{P}_\varphi)$$

2.5 2.4 3. τ に対して $\bar{P} = E_\tau(P|\mathcal{M})$.

(Theorem 2)

$$\|\psi - \varphi\| \leq \sqrt{2S(\psi|\varphi)}$$

(Proof)

$P_\psi - P_\varphi$ の positive part への support projection e

$e \equiv S(P_\psi - P_\varphi)^+ \in \mathcal{L}$, $\alpha \equiv \tau(P_\varphi e)$, $\beta \equiv \tau(P_\psi e)$ とおくと

2. $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$. $\bar{P}$ 上では

$$\|\psi - \varphi\| = \tau(P_\psi - P_\varphi) = 2(\beta - \alpha)$$

2.2. $\mathcal{M} = \mathbb{C}e + \mathbb{C}e^\perp$ と定まると

$$E_\tau(P|\mathcal{M}) = \frac{\tau(Pe)}{\tau(e)} e + \frac{\tau(Pe^\perp)}{\tau(e^\perp)} e^\perp \quad \text{と定まる.}$$

Relative Entropy の monotonicity を用いて δ とおくと $\delta = \beta - \alpha$,

$$\begin{aligned} S(\psi|\varphi) &\geq S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi) = \beta \log \frac{\beta}{\alpha} + (1-\beta) \log \frac{1-\beta}{1-\alpha} \\ &\geq \frac{1}{2} \{2(\beta - \alpha)\}^2 \end{aligned}$$

2.2 3. $\delta \geq \sqrt{2S(\psi|\varphi)} \geq \|\psi - \varphi\|$ ■

(Theorem 8)

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{Z}_\varphi, \quad \psi' = \psi \circ E_\varphi \quad \text{and } \mathbb{I}.$$

$$S(\psi|\psi') = S(\psi|\varphi) - S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi), \quad \delta > 2.$$

$$\|\psi' - \psi\| \leq \sqrt{2S(\psi|\psi')}$$

(Proof)

任意の $A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{M}$ に対し

$$\begin{aligned} \tau(P_\varphi AB) &= \varphi(AB) = \varphi(E_\varphi(A|\mathcal{M})B) = \tau(P_\varphi E_\varphi(A|\mathcal{M})B) \\ &= \tau(\bar{P}_\varphi E_\varphi(A|\mathcal{M})B) \end{aligned}$$

$$\therefore E_\tau(P_\varphi A|\mathcal{M}) = \bar{P}_\varphi E_\varphi(A|\mathcal{M})$$

φ は faithful であるから、 $\delta > 2$ の計算により得られる。

$$P_{\psi'} = \bar{P}_\varphi \bar{P}_\varphi^{-1} P_\varphi \quad \text{が成り立つ。} \quad (\because \psi'(A) = \tau(P_{\psi'} A))$$

更に、 $\mathcal{M} \subset \mathcal{Z}_\varphi$ より、 $S_\varphi \in \mathcal{M}'$ が成り立つ。

$$\text{従って、} [P_\varphi, \bar{P}_\varphi] = 0, \quad [\bar{P}_\varphi, P_\varphi] = 0$$

次に、

$$S(\psi|\psi') = \tau(P_\psi \log P_\psi - P_\psi (\log \bar{P}_\psi - \log \bar{P}_\varphi + \log P_\varphi))$$

注意深く計算の結果、 $\delta > 2$ となる。

$$S(\psi|\varphi) - S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi) \text{ に等しいことがわかる。} \quad \blacksquare$$

よっての結果より。

(Corollary 9)

$$(a) \quad \mathcal{M} \subset \mathcal{Z}_\varphi, \quad \psi \in \mathcal{G} \quad \text{and } \mathbb{I}.$$

$$\mathcal{M} \text{ が } \{\psi, \varphi\} \text{ に対して } \dagger \text{ 分} \iff S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi) = S(\psi|\varphi)$$

$$(b) \quad \psi \in I(\varphi) \iff S_{Z_{\varphi}}(\psi|\varphi) = S(\psi|\varphi)$$

$$(c) \quad \psi \in K(\varphi) \iff S_Z(\psi|\varphi) = S(\psi|\varphi)$$

が容易に証明できる。

以上の結果は、荒木元 [8], [2]、一般の v.N. alg. に対して
も成立することだ。筆者に示された。また、 $\mathcal{M} \in \text{v.N. alg.}$
とし、 $S(\psi|\varphi) = -\langle \bar{\psi}, \log \Delta_{\bar{\psi}, \bar{\psi}} \bar{\psi} \rangle$ と書ける。
ここで $\bar{\psi}, \bar{\varphi}$ は ψ, φ に対する cyclic, separating vectors
であり、 $\Delta_{\bar{\psi}, \bar{\psi}}$ は relative modular operator である。

2.2. 一般の v.N. alg. $\mathcal{M}$ に対して、次の事実が知られる。

(lemma 10)

$\{\mathcal{M}_{\alpha}\}$ を $\mathcal{M}$ の σ_{φ} -不変部分代数の増大 (resp. 減少)
列ととし、 $\mathcal{M} = \bigvee_{\alpha} \mathcal{M}_{\alpha}$ (resp. $\mathcal{M} = \bigcap_{\alpha} \mathcal{M}_{\alpha}$) とすると
き、 $E_{\varphi}(A|\mathcal{M}) = \text{st-}\lim_{\alpha} E_{\varphi}(A|\mathcal{M}_{\alpha})$, $A \in \mathcal{M}$.

(Proof)

$$\varphi(A) = \langle \bar{\psi}, A \bar{\psi} \rangle \quad \text{と書く.}$$

$$E_{\varphi}(A|\mathcal{M}_{\alpha}) \bar{\psi} = P_{\alpha} A \bar{\psi}.$$

$$E_{\varphi}(A|\mathcal{M}) \bar{\psi} = P A \bar{\psi}$$

$P_\alpha \rightarrow P$ strongly. $\therefore \exists \epsilon > 0$ such that $\gamma_\alpha' \in \mathcal{A}$ (2 cyclic
 γ exists) and $E_\varphi(A | \mathcal{M}) = s\text{-}\lim_\alpha E_\varphi(A | \mathcal{M}_\alpha)$ ■

有限次元の v. N. 部分代数の増大ネット $\{\mathcal{M}_\alpha\}$ に関する。
 $\mathcal{M} = \bigvee_\alpha \mathcal{M}_\alpha$ と仮定する。

(Theorem 11)

上の $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{A}$ ネット $\{\mathcal{M}_\alpha\}$ と $\sigma_t^\varphi(\mathcal{M}_\alpha) = \mathcal{M}_\alpha$,
 $\mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}_\beta$ と定まるとき、もし、ある $\psi \in \mathcal{A}$ に対して
 $\{\psi_\alpha\} \subset \mathcal{A}$ が存在して $\|\psi_\alpha - \psi\|_{\mathcal{M}_\alpha} \rightarrow 0$ となり、且
 $\mathcal{M}_\alpha$ が $\{\varphi, \psi_\alpha\}$ に対して十分であるならば、

$$\overline{\lim} \mathcal{M}_\alpha = \bigcap_{\beta \geq \alpha} \bigvee_{\gamma \geq \beta} \mathcal{M}_\gamma \text{ は } \{\varphi, \psi\} \text{ に対して十分である。}$$

(Proof)

$\mathcal{M}_{(\beta)} \equiv \bigvee_{\gamma \geq \beta} \mathcal{M}_\gamma$, $\mathcal{M}_{(\beta, \alpha)} \equiv \bigvee_{\beta \leq \gamma \leq \alpha} \mathcal{M}_\gamma$ とおく。
 $\therefore$ 以上は σ_t^φ -不変 且 $\mathcal{M}_{(\beta, \alpha)} \uparrow \mathcal{M}_{(\beta)}$ 。

又 $\mathcal{M}_{(\beta, \alpha)} \supset \mathcal{M}_\alpha$ あり。 $\mathcal{M}_{(\beta, \alpha)}$ は $\{\varphi, \psi_\alpha\}$ に対して
 十分である。従って

$$\psi_\alpha(A) = \psi_\alpha(E_\varphi(A | \mathcal{M}_{(\beta, \alpha)})) \quad , \quad A \in \mathcal{M}_\alpha, \quad \alpha \geq \beta.$$

$\therefore$ Lemma 10 を使うと

$$\psi(A) = \psi(E_\varphi(A | \mathcal{M}_{(\beta)})) \quad , \quad A \in \bigvee_{\alpha \geq \beta} \mathcal{M}_\alpha \text{ が示される。}$$

$$\mathcal{M} = \bigvee_{\alpha} \mathcal{M}_{\alpha}, \quad \mathcal{M}_{(\beta)} \downarrow \overline{\lim} \mathcal{M}_{\alpha} \quad \delta').$$

$$\psi(A) = \psi(E_{\varphi}(A | \overline{\lim} \mathcal{M}_{\alpha})) \quad , \quad A \in \mathcal{M}$$

とある。■

(Theorem 12)

Theorem 11 と同じ条件の下で. $\mathcal{M}_{\alpha} \subset Z_{\varphi}^{\alpha} \equiv \{A \in \mathcal{M}_{\alpha} \mid \varphi(AB) = \varphi(BA), B \in \mathcal{M}_{\alpha}\}$ のとき. 次の (a) と (b) の条件が満足されるならば. $\overline{\lim} \mathcal{M}_{\alpha}$ は $\{\varphi, \psi\}$ に δ' 12 十分である。

$$(a) \quad \{\psi_{\alpha}\} \text{ が } \delta' 12 \text{ 12. } \|\psi - \psi_{\alpha}\|_{\mathcal{M}_{\alpha}} \rightarrow 0 \quad \text{且}$$

$$S_{\mathcal{M}_{\alpha}}(\psi_{\alpha} | \varphi) - S_{\mathcal{M}_{\alpha}}(\psi_{\alpha} | \psi) \rightarrow 0.$$

$$(b) \quad S_{\mathcal{M}_{\alpha}}(\psi | \varphi) - S_{\mathcal{M}_{\alpha}}(\psi | \psi) \rightarrow 0.$$

(Proof)

$$(b) \Rightarrow (a) \text{ は trivial.}$$

$\delta' 2$ (a) のとき結論を示す。

$$\psi'_{\alpha}(A) \equiv \psi_{\alpha}(E_{\varphi}(A | \mathcal{M}_{\alpha})) \quad , \quad A \in \mathcal{M} \quad \text{と置く.}$$

Theorem 8 δ').

$$\|\psi'_{\alpha} - \psi_{\alpha}\|_{\mathcal{M}_{\alpha}} \leq \{2(S_{\mathcal{M}_{\alpha}}(\psi_{\alpha} | \varphi) - S_{\mathcal{M}_{\alpha}}(\psi_{\alpha} | \psi))\}^{1/2} \rightarrow 0$$

$$\therefore \|\psi'_{\alpha} - \psi\|_{\mathcal{M}_{\alpha}} \leq \|\psi'_{\alpha} - \psi_{\alpha}\|_{\mathcal{M}_{\alpha}} + \|\psi_{\alpha} - \psi\|_{\mathcal{M}_{\alpha}} \rightarrow 0$$

$$\langle \delta' 2. \quad \psi'_{\alpha}(A) = \psi_{\alpha}(E_{\varphi}(A | \mathcal{M}_{\alpha})) = \psi'_{\alpha}(E_{\varphi}(A | \mathcal{M}_{\alpha}))$$

$$\therefore \mathcal{M}_{\alpha} \text{ は } \{\varphi, \psi'_{\alpha}\} \text{ に } \delta' 12 \text{ 十分である.}$$

よって Theorem 11 より. $\overline{\lim} M_{\alpha}$ は $\{\varphi, \psi\}$ に対して十分である。■

(Corollary 13)

$$(a) S_{M_{\alpha}}(\varphi|\varphi) - S_{M_{\alpha} \cap Z_p}(\varphi|\varphi) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \varphi \in I(\varphi)$$

$$(b) S_{M_{\alpha}}(\varphi|\varphi) - S_{M_{\alpha} \cap Z}(\varphi|\varphi) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \varphi \in K(\varphi)$$

こうして、我々は、十分性の概念が K.M.S. 状態、時間不変の状態の精緻付けに有用であることを見、Relative Entropy と状態との間の新たな関係式を通じて、十分性と Relative Entropy 自身の関連を示すことができた。最後に、Theorem 10~12 の結果は、数理統計における、近似十分性の概念の非可逆への拡張を目指していることが得られたものであることに注意しよう。こゝの結果のより完全な議論と、他の分節との係りに関しては、preprint. "Sufficient, KMS condition and Relative Entropy in von Neumann algebras" (Research Reports on Information Sciences. No. A-62, 1979) を参照していただきたい。

REFERENCES

- [1] H. Araki, Relative entropy of states of von Neumann algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 11 (1976), 809-833.
- [2] I. Csiszár, Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations, Studia Sci. Math. Hungar. 2 (1967), 299-318.
- [3] N. Dang-Ngoc, Pointwise convergence of martingales in von Neumann algebras, Preprint.
- [4] H. A. Dye, The Radon-Nikodým theorem for finite rings of operators, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 243-280.
- [5] S. Gudder and J.-P. Marchand, Noncommutative probability on von Neumann algebras, J. Math. Phys. 13 (1972), 799-806.
- [6] R. Haag, N. M. Hugenholtz and M. Winnink, On the equilibrium states in quantum statistical systems, Commun. Math. Phys. 5 (1967), 215-236.
- [7] P. R. Halmos and L. J. Savage, Application of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics, Ann. Math. Statistics 20 (1949), 255-241.
- [8] R. Kubo, Statistical mechanical theory of irreversible processes I, J. Phys. Soc. Japan 12 (1957), 570-586.
- [9] H. Kudo, On an approximation to a sufficient statistic including a concept of asymptotic sufficiency, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I 17 (1970), 273-290. See also *ibid.* Sec. I 22 (1975), 449.
- [10] ———, A note on the strong convergence of σ -algebras, Ann. Probability 2 (1974), 76-83.

- [11] S. Kullback and R. A. Leibler, On information and sufficiency, *Ann. Math. Statistics* 22 (1951), 79-86.
- [12] T. Kusama, On approximate sufficiency, *Osaka J. Math.* 13 (1976), 661-669.
- [13] G. Lindblad, Expectations and entropy inequalities for finite quantum systems, *Commun. Math. Phys.* 39 (1974), 111-119.
- [14] P. C. Martin and J. Schwinger, Theory of many-particle systems I, *Phys. Rev.* 115 (1959), 1342-1373.
- [15] G. K. Pedersen and M. Takesaki, The Radon-Nikodym theorems for von Neumann algebras, *Acta Math.* 130 (1973), 53-87.
- [16] S. Sakai, C^* -Algebras and W^* -Algebras, Springer, Berlin, 1971.
- [17] I. E. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, *Ann. Math.* 57 (1953), 401-457.
- [18] M. Takesaki, Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications, Springer, Lecture notes in math. Vol. 128, 1970.
- [19] ———, Disjointness of the KMS-states of different temperatures, *Commun. Math. Phys.* 17 (1970), 33-41.
- [20] ———, Conditional expectations in von Neumann algebras, *J. Functional Analysis* 9 (1972), 306-321.
- [21] J. Tomiyama, On the projection of norm one in W^* -algebras, *Proc. Japan Acad.* 33 (1957), 608-612.
- [22] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, *Tôhoku Math. J.* 6 (1954), 177-181.
- [23] ———, Conditional expectation in an operator algebra, II, *Tôhoku Math. J.* 8 (1956), 86-100.

- [24] ———, Conditional expectation in an operator algebra, III, Kōdai Math. Sem. Rep. 11 (1959), 51-64.
- [25] ———, Conditional expectation in an operator algebra, IV (entropy and information), Kōdai Math. Sem. Rep. 14 (1962), 59-85.