

興奮反応拡散系における自己組織化

お茶の水大・理・太田隆夫

1 はじめに

非平衡開放系の最大の特徴は時間的振動と空間的局在パターンの出現にある。このいずれも平衡から遠くはなれた系では一般に熱力学ポテンシャルが存在しないことに起因している[1]。ここでは、上の二つが同時に起こったときどのような秩序が生じるかを問題にしよう。

2 モデル方程式

1 で述べた要請を満たすおそらく最も簡単なモデル方程式として次のようなものがある。

$$\varepsilon \tau \partial_t u = \varepsilon^2 \nabla^2 u + f(u) - v \quad (1a)$$

$$\partial_t v = D \nabla^2 v + u - \gamma v \quad (1b)$$

ここに、 $f(u)$ は、例えば、 $f(u)=u(1-u)(u-a)$ 、($0 < a < 1/2$) のように、3次の非線形性をもつとする。また、すべての定数は正である。

上のモデル方程式はポテンシャルをもたず、ペロソフ・ザボチンスキー反応[2]、神経軸索上のパルス伝播[3]、グロー放電[4]などのように興奮性を示す現象を記述するものとして知られている。普通、 u を活性化因子、 v を抑制因子とよぶ。

3 解の性質

まず、方程式(1)は空間的に一様な振動解をもたないことに注意しよう。空間的に局在した動かない解は、 ε が十分小さいとき(1b)において反応による v の増加と拡散による減少がうまくつりあうことによつて起こる。孤立した局在解(興奮領域)の存在と安定性についてはすでに発表してある[5]。注目すべきことは、(1a)のパラメーター τ を小

さくしていくと動かない解から脈動解への分岐が起こる点にある[6],[7],[5]。これは境界（界面）の動きに v の変化がついていけなくなるためである。興奮領域が多数あると抑制因子 v を媒介にして相互作用が生じる。そのときはいかなる振動が発現するだろうか。図1のように、興奮・非興奮領域が互いに交互に層状にならんでいるとき、その幅が同程度であれば、全てのドメインがin-phaseに振動する。(1)から特異摂動法で界面に対する運動方程式をだし、その線形安定性を解析してこの結果を得た[8]。

4 結合振動子系

パラメーター τ の値をさらに小さくしていったとき、各ドメインがどのような運動をするかは興味のある問題である。界面方程式に簡単な非線形項をつけ加えたモデルから振動するドメインの位相と振幅に対する方程式を導出した。ドメイン間の相互作用が弱く（隣あう興奮領域が十分はなれている）、位相と振幅の時間変化は振動の1周期の間に小さいことを仮定し、また、高調波成分は無視した。

得られた方程式はin-phaseと π -out-of-phaseの振動を定常解としてもち、あるパラメーターの範囲では両方が共存する（双安定）。このことは文献[8]の結果と矛盾しない。解の振舞いを具体的に調べるため、数値計算を実行した。そのうちのひとつを述べると、3個の興奮ドメインの場合には、初期条件が同じでも、パラメーターを変えるとin-phaseな振動から準周期的（あるいは、おそらく、カオス）な振舞いに変化する。しかも、3個のうち2個は互いに引き込まれた運動をする。結果の詳細は現在解析中である。

5 おわりに

反応拡散系(1)から自由度を遡減して界面方程式を導き、さらに、結合振動子系を導出した。従来の結合振動子モデルはリミットサイクルを直接的あるいは、拡散的に結合したものである[9],[10]。4で構成した振動子は本質的に異なる結合形態をもつ。また、そこで述べた解の多様性は位相のみならず、振幅を変数にとったことに起因している。

一見したところ単純にみえる方程式(1)でも実に多彩な解を内在していることが上に示した方法で明らかになった。対象とする現象がはつきりしているモデル(1)から明確な手法で得られた結果は、現時点では対応する実験がなくても、将来、有用となるであろう。

参考文献

- [1] T. Ohta and M. Mimura, in Formation, Dynamics and Statistics of Pattern
edited by K. Kawasaki et. al. (World Scientific, Singapore, 1990)
- [2] J. J. Tyson and J. P. Keener, Physica 32D, 327 (1988)
- [3] R. FitzHugh, Biophys. J. 1, 445 (1961),
J. Nagumo et. al. Proc. IRE 50, 2061 (1962)
- [4] C. Radehaus, Phys. Rev. A42, 7426 (1990)
- [5] T. Ohta, M. Mimura and R. Kobayashi, Physica 34D, 115 (1989)
- [6] S. Koga and Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. 63, 106 (1980)
- [7] H. Fujii, M. Mimura and Y. Nishiura, Physica 5D, 1 (1982)
- [8] T. Ohta, A. Ito and A. Tetsuka, Phys. Rev. A42, 3225 (1990)
伊藤綾、物性研究 研究会”パターン形成”の報告 (1990)
- [9] Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 99 (1989)
- [10] D. G. Aronson, G. B. Ermentrout and N. Kopell, Physica 41D, 403 (1990)

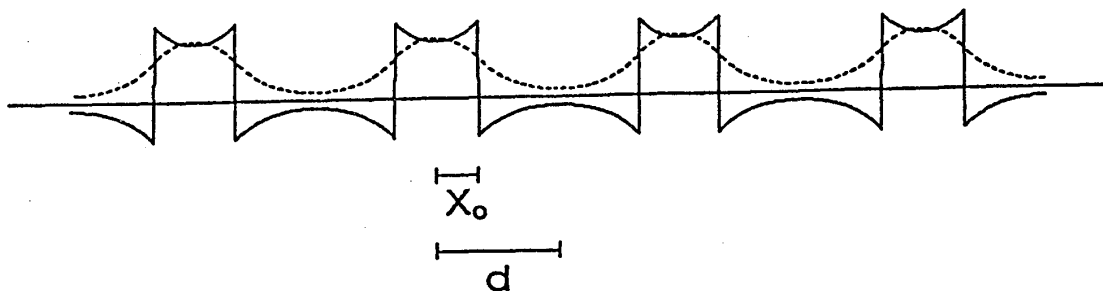


図 1